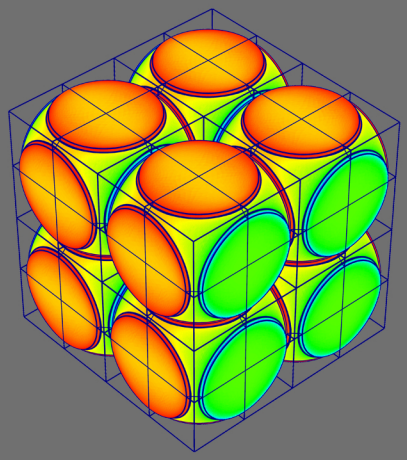
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Кишов Е.А., Золотов Д.В., Коваль И.Ю. Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 4, с. 19–30.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/355/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:44

УДК 621.7, 004.9 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-4-1930

Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке

© Е.А. Кишов[1], Д.В. Золотов[1], И.Ю. Коваль[1,2]

[1]Самарский университет, Самарская область, город Самара, 443086, Россия

[2]АО «Моделирование и цифровые двойники», город Москва, 125167, Россия

Предложена одномерная математическая модель нестационарного процесса теплопереноса в процессе 3D-печати технологии SLM. Особенность модели – учёт послойного добавления материала в расчётную область с течением времени. Модель реализована в собственном программном обеспечении, использующем метод конечных элементов. Добавление материала учитывается алгоритмом активации/деактивации элементов. Решена тестовая задача по определению температурного поля при выращивании детали, геометрия которой идеализируется стержнем переменного сечения. Для оценки достоверности результатов проведены аналогичные расчёты в сторонних программных продуктах: в Ansys – в полной трёхмерной постановке – и в Matlab – решено одномерное уравнение теплопроводности для стержня изменяющейся во времени длины и переменной площади сечения. Сравнение поля температур показывает, что результаты расчётов в разработанном программном обеспечении соответствуют сторонним решениям при обеспечении высокой вычислительной эффективности.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, нестационарный процесс, послойное добавление материла, 3D-печать, метод конечных элементов, Ansys, Matlab*

Введение. Технологический процесс 3D-печати связан с возникновением в детали значительных температурных деформаций, что сказывается на конечной форме изделий. Для корректного предсказания этих явлений необходимо расчётным путём определять температурное поле в процессе печати. Данное направление активно исследуется в научных работах [1-6]. Также на рынке имеются коммерческие программные продукты по численному моделированию 3D-печати (в частности, Ansys Additive [7] и Simufact Additive [8]).

Полное решение тепловой задачи в трёхмерной постановке сопряжено со значительными вычислительными затратами. В то же время, для изделий, обладающих теми или иными конструктивными особенностями, можно ввести в модель упрощения, позволяющие ускорить расчёт. Одними из таких случаев является печать детали, два габаритных размера которой намного больше третьего. Тогда деталь можно рассматривать как стержень переменного поперечного сечения и моделировать процесс теплопередачи в одномерной постановке. К нюансам этого процесса следует отнести увеличение длины

стержня с течением времени. Заметим, в классических методах математической физики размеры расчётной области, как правило, считаются неизменными. Таким образом, основная задача данной работы – построить одномерную математическую модель нестационарной теплопроводности в процессе 3D-печати с учётом пошагового добавления материала и оценить возможность её применения для ускорения тепловых расчётов в данном контексте.

Математическая постановка задачи. Получим нестационарное уравнение теплопроводности для стержня переменного поперечного сечения $A = A(z)$, где A — площадь сечения, z — координата вдоль оси стержня.

Классическое уравнение энергии (уравнение притока тепла) для твердого тела V без учета внутренних напряжений и деформаций, в общем виде записывается следующим образом [9]

$$\frac{dU}{dt} = Q_e, \tag{1}$$

где Q_e — скорость нагрева тела за счет поверхностных источников (массовые источники тепла полагаются отсутствующими), а U — внутренняя энергия тела

$$Q_e = \int_{\Sigma} q_{\Sigma} d\Sigma, \; U = \int_{V} \rho e dV, \tag{2}$$

здесь V — объем тела, Σ — его внешняя поверхность, $q_{\Sigma} = -\vec{q} \cdot \vec{n}$ — приток тепла за счет поверхностных источников, $\vec{q}$ — вектор потока тепла, $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности, ρ — плотность материала стержня, e — плотность внутренней энергии, для которой принимаем классическое выражение

$$e = c_p T, \tag{3}$$

где T — температура, c_p — удельная теплоёмкость. Плотность ρ и теплоемкость c_p полагаются постоянными.

Согласно закону Фурье

$$\vec{q} = -k \; gradT, \tag{4}$$

где k — коэффициент теплопроводности, $gradT$ — дифференциальный оператор градиента температуры.

Уравнение притока тепла (1) с учетом (2) и (3) принимает вид

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_{V} T dV = \int_{\Sigma} q_{\Sigma} d\Sigma. \tag{5}$$

Сделаем основное допущение, что боковые поверхности стержня теплоизолированы, т.е. на этих поверхностях $q_\Sigma = 0$, а температура в стержне зависит только от продольной координаты z и времени:

$$T = T(z,t). \tag{6}$$

Выберем в качестве области V(z) часть стержня, соответствующую значениям координаты z в диапазоне $0 \le \tilde{z} \le z$. Тогда уравнение притока тепла (5) с учетом сделанных допущений для области V(z) примет вид

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_0^z \int_{A(\tilde{z})} T(\tilde{z},t) d\Sigma d\tilde{z} = \int_{A(z)} q_\Sigma d\Sigma - \int_{A(0)} q_\Sigma d\Sigma, \tag{7}$$

$$0 \le z \le L(t),$$

где $L(t)$ — длина стержня, зависящая от времени. В силу сделанных допущений приток тепла q_Σ и температура являются постоянным по сечению $A(z)$, тогда из (7) получаем

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_0^z A(\tilde{z}) T(\tilde{z},t) d\tilde{z} = A(z) q_\Sigma(z,t) - A(0) q_\Sigma(0). \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по z и учитывая, что закон Фурье (4) для случая (6) дает следующее выражение:

$$q_\Sigma(z,t) = k \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{9}$$

из (8) получаем итоговое уравнение притока тепла для стержня переменного сечения

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(kA \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{\rho c_p A}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial T}{\partial z} \right). \tag{11}$$

Одномерная идеализация при решении тепловой задачи здесь связана с учётом изменения температуры только вдоль оси объекта. Заметим, что 1D-подход при моделировании тепловых процессов в SLM-печати использован также в работе [10].

Граничные условия соответствуют поддерживанию заданной температуры на концах стержня:

$$T\left(z,t\right)\Big|_{z=0} = T_{\min},$$
$$T\left(z,t\right)\Big|_{z=L(t_i)} = T_{\max}. \tag{12}$$

Уравнение теплопроводности (11) решается итерационно в цикле по временным шагам. На каждом шаге по времени Δt происходит увеличение длины стержня на величину ΔL. Начальное распределение температур задаётся на основе поля температур на предыдущей итерации:

$$T\left(z,t\right)\Big|_{t=t_i} = T\left(z,t\right)\Big|_{t=t_{i-1}}. \tag{13}$$

При этом длина стержня L увеличивается с течением времени, что соответствует пошаговому добавлению материала при печати.

Численное решение одномерного нестационарного уравнения теплопроводности процесса 3D-печати в Matlab. Для решения уравнений в частных производных в Matlab используется функция «pdepe». Синтаксис данной функции требует, чтобы уравнение было представлено в виде [11]

$$c\left(z,t,u,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\partial T}{\partial t} = z^{-m}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^m f\left(z,t,T,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) + s\left(z,t,T,\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{14}$$

В нашем случае для величин *c, m, f, s* получаем следующие значения

$$c\left(z,t,u,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\rho c_p A}{k},\ f\left(z,t,T,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = A\frac{\partial T}{\partial z},$$
$$s = m = 0. \tag{15}$$

Зависимость площади сечения от координаты задаётся функцией

$$A\left(z\right) = \begin{cases} A_{\text{base}}, z \le L_{\text{base}}, \\ A_{\text{part}}, z > L. \end{cases} \tag{16}$$

Алгоритм конечно-элементного расчёта температурного поля в одномерной постановке. Конечно-элементная формулировка нестационарной задачи теплопроводности записывается в виде [12, 13]:

$$\mathbf{C}\cdot\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{T} = \dot{\mathbf{Q}}, \tag{17}$$

где $\mathbf{C}$ — матрица теплоёмкости, $\mathbf{K}$ — матрица теплопроводности, $\dot{\mathbf{Q}}$ — вектор тепловой нагрузки (мощности). Для одномерных двухузловых элементов матрицы теплопроводности и теплоёмкости имеют вид:

$$\mathbf{k}_e = \frac{kA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_e = \frac{c\rho A}{l}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где l — длина элемента.

Сборка глобальных матриц осуществляется по стандартному алгоритму.

В работе используется неявная схема интегрирования по времени:

$$\mathbf{C}\cdot\left(\frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t}-\mathbf{T}_t}{\Delta t}\right)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{T}_{t+\Delta t}=\dot{\mathbf{Q}}, \tag{19}$$

откуда получаем систему линейных уравнений для нахождения вектора температур на следующем шаге:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{T}_{t+\Delta t}=\mathbf{r} \tag{20}$$

где

$$\mathbf{M}=\mathbf{C}\Delta t+\mathbf{K}\Delta t^2,\ \mathbf{r}=\dot{\mathbf{Q}}\Delta t^2+\mathbf{C}\cdot\mathbf{T}_t\Delta t.$$

Для учёта пошагового добавления материала используется метод активации/деактивации элементов. Для деактивированных элементов матрицы $\mathbf{k}_e$ и $\mathbf{c}_e$ получают множитель 10^{-6}. В начальный момент времени все элементы, кроме первого, деактивированы. На каждом шаге по времени активируется один очередной элемент. Матрицы теплопроводности и теплоёмкости пересобираются на каждой временной итерации с учётом нового набора активных элементов.

Граничные условия в виде заданной температуры на концах задаются по методу Пэйна-Айронса [14]: соответствующие диагональные компоненты матрицы **M** в (21) полагаются равными большому числу (например, 10^{20}), а компоненты вектора правой части **r** — заданной температуре $T_{\min}$ или $T_{\max}$ соответственно.

Данный алгоритм реализован в программе «PrintHeat» на языке C++. Для выполнения векторно-матричных операций и решения системы уравнений используется библиотека Eigen [15].

Решение тестовой задачи. Сравнение и анализ результатов. Рассмотрим задачу численного моделирования теплопередачи в процессе SLM-печати образца, изображённого на рис. 1.

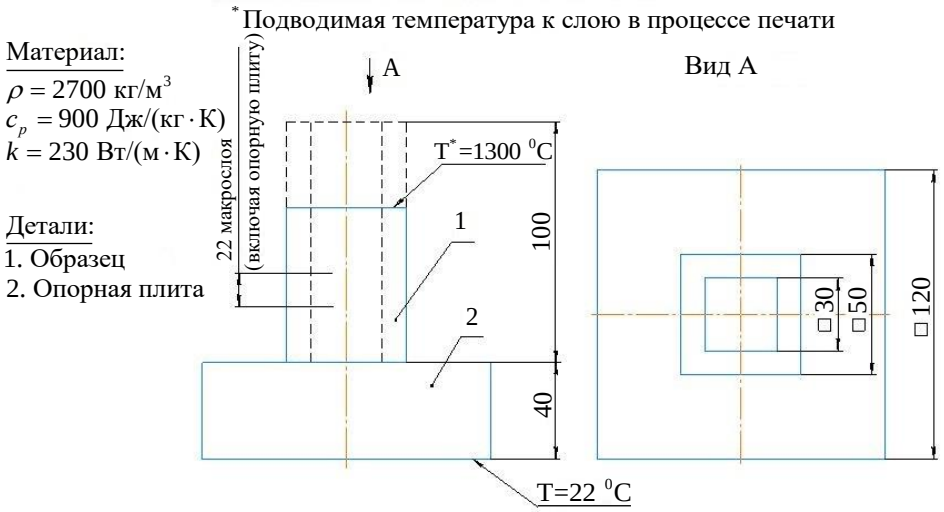


Рис. 1. Геометрия тестовой задачи

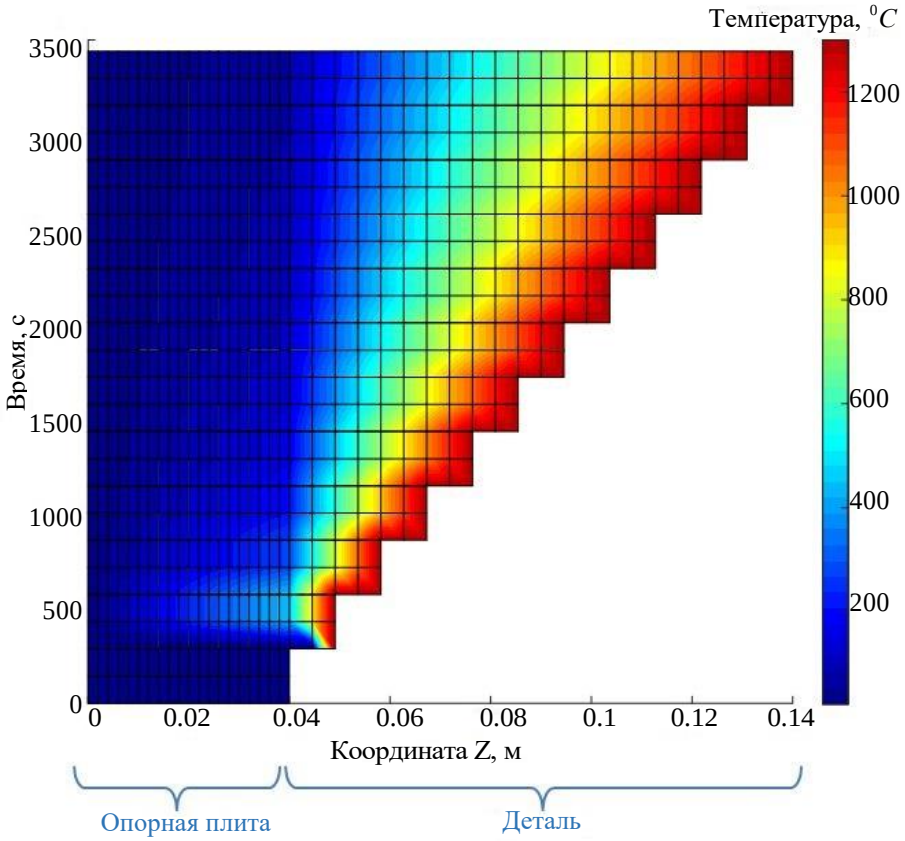
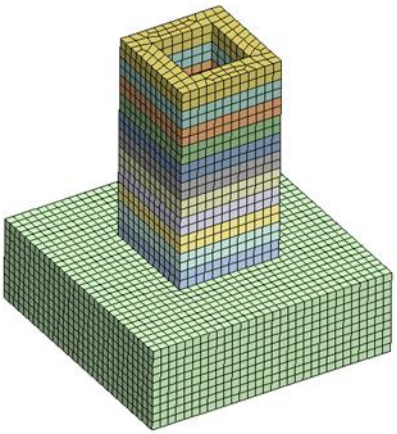


Рис. 2. Распределение температур по оси Z (по направлению выращивания) на основе решения Matlab

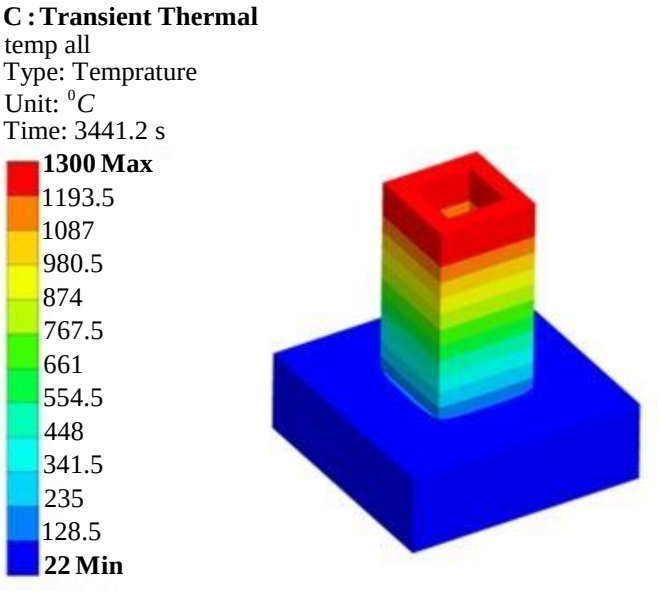
Данная задача решена тремя способами: 1) при помощи Matlab-функции «pdepe», 2) с использованием разработанного кода

«PrintHeat» и 3) с использованием Ansys. Решение Matlab приведено на рис. 2.

Конечно-элементная сетка и распределение температур в конечный момент времени в Ansys приведено на рис. 3.



а)



б)

Рис. 3. КЭ-сетка (а) и распределение температуры (б) на основе решения Ansys в конечный момент времени

Сравнение распределения температур в конечный момент времени на основе решений в Matlab, PrintHeat и Ansys приведено на рис. 4.

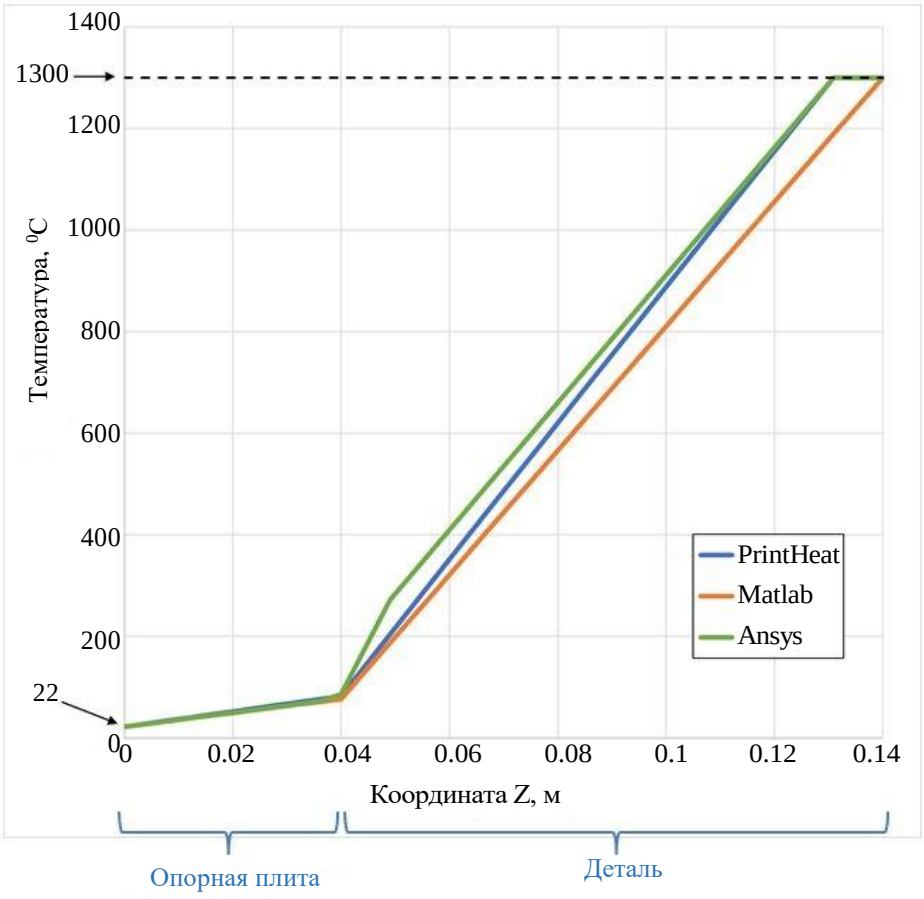


Рис. 4. Сравнение распределения температур в конечный момент времени в Matlab, PrintHeat и Ansys

Анализ результатов расчётов. Распределение температур в конечный момент времени (рис. 4), согласно трём проведенным расчётам (PrintHeat, Matlab, Ansys), полностью совпадает на участке опорной плиты. По толщине детали наблюдается некоторое отличие, которое объясняется следующим образом. В алгоритме конечно-элементного расчёта (PrintHeat, Ansys) подвод тепла осуществляется ко всему слою целиком, т.е. к двум узлам элемента. Вследствие этого, на графиках на вершине детали (в окрестности $z = 0{,}14$ м) видна «полочка», отражающая постоянство температуры по толщине последнего слоя. Тогда как численное решение уравнения теплопроводности в Matlab подразумевает задание граничных условий строго в концевых точках стержня. Отличие двух конечно-элементных решений связнано с тем, что моделирование в Ansys осуществляется в трёхмерной постановке, а в PrintHeat – в одномерной. Температура, нанесённая на график рис. 4 с модели Ansys представляет собой среднюю температуру элементов слоя. При этом в Ansys в зоне пере-

хода от опорной плиты к детали имеет место определённый температурный градиент по осям X и Y.

Заметим, что время расчёта задачи в одномерной постановке в программе PrintHeat на порядки меньше полного 3D-моделирования в Ansys.

Вывод. Разработанная тепловая математическая модель корректно описывает температурное поле в процессе печати для детали, геометрия которой допускает одномерную идеализацию в виде стержня переменного сечения. При этом обеспечивается значительное сокращение вычислительных затрат по сравнению с трёхмерной постановкой.

Направлением дальнейшей работы в части расширения возможностей разработанного конечно-элементного теплового решателя для аддитивного процесса является расширение списка доступных граничных условий для более гибкого учёта теплоотвода и переход к трёхмерной постановке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), номер проекта 23-79-01213.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ökten K., Biyikoğlu A. *Development of thermal model for the determination of SLM process parameters*. *Optics & Laser Technology*, Vol. 137, 2021. https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106825.

[2] Papazoglou, E.L., Karkalos, N.E., Markopoulos, A.P. *A comprehensive study on thermal modeling of SLM process under conduction mode using FEM. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 111, 2020, pp. 2939–2955, https://doi.org/10.1007/s00170-020-06294-7.

[3] Trejos, J.D., Reyes, L.A., Garza, C., Zambrano, P. and Lopez-Botello, O. *Numerical modeling of thermal anisotropy on a selective laser melting process. Rapid Prototyping Journal*, Vol. 26, 2020, No. 9, pp. 1555-1567. https://doi.org/10.1108/RPJ-02-2020-0032.

[4] Luo, Z., Zhao, Y. *Numerical simulation of part-level temperature fields during selective laser melting of stainless steel 316L. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 104, 2019, pp. 1615–1635, https://doi.org/10.1007/s00170-019-03947-0.

[5] *Yang, Y., van Keulen, F., Ayas, C. A computationally efficient thermal model for selective laser melting*. *Additive Manufacturing*, Vol. 31, 2020, https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100955.

[6] Foteinopoulos P., Papacharalampopoulos A., Stavropoulos, P. *On thermal modeling of Additive Manufacturing processes. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol. 20, 2018, pp. 66-83, https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2017.09.007

[7] https://www.ansys.com/products/additive

[8] https://hexagon.com/products/simufact-additive

[9] Димитриенко, Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[10] Jeronen J., Tuovinen T., Kurki M. *One-Dimensional Thermomechanical Model for Additive Manufacturing Using Laser-Based Powder Bed Fusion.* Vol. 10. Iss. 6. 2022. https://doi.org/10.3390/computation10060083.
[11] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pdepe.html
[12] https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_heat2.html
[13] Zienkiewicz O.C., Parekh C.J. *Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 1970, pp. 61-71. https://doi.org/10.1002/nme.1620020107.
[14] Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов.* Москва, Мир, 1981, 304 с.
[15] https://gitlab.com/libeigen/eigen.

Статья поступила в редакцию 06.04.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Кишов Е.А., Золотов Д.В., Коваль И.Ю. Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 4, с. 19–30.

Кишов Евгений Алексеевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструкции и проектирования летательных аппаратов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва. e-mail: evgeniy.kishov@ssau.ru

Золотов Дмитрий Викторович — аспирант кафедры «Конструкции и проектирования летательных аппаратов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва. e-mail: dmitriy.zolotov.98@mail.ru

Коваль Илья Юрьевич — аспирант кафедры «Сопротивление материалов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва, инженер по направлению прочности АО «Моделирование и цифровые двойники». e-mail: koval.ilya@list.ru

Numerical simulation of unsteady one-dimensional heat transfer during 3D-printing using SLM

© E.A. Kishov[1], D.V. Zolotov[1], I.Yu. Koval[1,2]

[1]Samara National Research University, Samara, 443086, Russia
[2]Joint stock company «Simulation and Digital Twin»

A one-dimensional mathematical model of unsteady heat transfer process in the process of 3D printing of SLM technology is proposed. The feature of the model is taking into account the layer-by-layer addition of material to the calculation domain over time. The model is implemented within in-house software using the finite element method. Addition of material is taken into account by the algorithm of activation/deactivation of elements. A test problem for determining the temperature field during the growth of a part whose geometry is idealized by a rod of variable cross-section has been solved. To assess the reliability of the results, similar calculations are performed in third-party software products: in Ansys – in full three-dimensional formulation and in Matlab – the one-dimensional heat conduction equation for a rod of time-varying length and variable

cross-sectional area is solved. Comparison of the temperature field shows that the results of calculations in the developed software correspond to third-party solutions while ensuring high computational efficiency.

***Keywords**: heat conduction equation, unsteady process, layer-by-layer addition of material, 3D printing, finite element method, Ansys, Matlab*

REFERENCES

[1] Ökten K., Biyikoğlu A. *Development of thermal model for the determination of SLM process parameters*. *Optics & Laser Technology*, Vol. 137, 2021. https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106825.

[2] Papazoglou, E.L., Karkalos, N.E., Markopoulos, A.P. *A comprehensive study on thermal modeling of SLM process under conduction mode using FEM. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 111, 2020, pp. 2939–2955, https://doi.org/10.1007/s00170-020-06294-7.

[3] Trejos, J.D., Reyes, L.A., Garza, C., Zambrano, P. and Lopez-Botello, O. *Numerical modeling of thermal anisotropy on a selective laser melting process. Rapid Prototyping Journal*, Vol. 26, 2020, No. 9, pp. 1555-1567. https://doi.org/10.1108/RPJ-02-2020-0032.

[4] Luo, Z., Zhao, Y. *Numerical simulation of part-level temperature fields during selective laser melting of stainless steel 316L. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 104, 2019, pp. 1615–1635, https://doi.org/10.1007/s00170-019-03947-0.

[5] *Yang, Y., van Keulen, F., Ayas, C. A computationally efficient thermal model for selective laser melting*. *Additive Manufacturing*, Vol. 31, 2020, https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100955.

[6] Foteinopoulos P., Papacharalampopoulos A., Stavropoulos, P. *On thermal modeling of Additive Manufacturing processes. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol. 20, 2018, pp. 66-83, https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2017.09.007

[7] https://www.ansys.com/products/additive

[8] https://hexagon.com/products/simufact-additive

[9] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[10] Jeronen J., Tuovinen T., Kurki M. *One-Dimensional Thermomechanical Model for Additive Manufacturing Using Laser-Based Powder Bed Fusion.* Vol. 10. Iss. 6. 2022. https://doi.org/10.3390/computation10060083.

[11] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pdepe.html

[12] https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_heat2.html

[13] Zienkiewicz O.C., Parekh C.J. *Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 1970, pp. 61-71. https://doi.org/10.1002/nme.1620020107.

[14] Norri D., de Friz J. *Vvedenie v metod konechnych elementov* [Introduction to finite element method]. Moscow, Mir, 1981, 304 p.

[15] https://gitlab.com/libeigen/eigen.

Kishov E.A., Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Aircraft Structures Department of Samara National Research University. e-mail: evgeniy.kishov@ssau.ru

Zolotov D.V., Postgraduate of the Aircraft Structures Department of Samara National Research University. e-mail: dmitriy.zolotov.98@mail.ru

Koval I.Yu., Postgraduate of the Strength of Materials Department of Samara National Research University, structural analysis engineer of Joint stock company “Simulation and Digital Twins”. e-mail: koval.ilya@list.ru