



# Математическое моделирование и численные методы

Кишов Е.А., Золотов Д.В., Коваль И.Ю. Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 4, с. 19–30.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/355/>

## Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке

© Е.А. Кишов<sup>1</sup>, Д.В. Золотов<sup>1</sup>, И.Ю. Коваль<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский университет, Самарская область, город Самара, 443086, Россия

<sup>2</sup>АО «Моделирование и цифровые двойники», город Москва, 125167, Россия

*Предложена одномерная математическая модель нестационарного процесса теплопереноса в процессе 3D-печати технологии SLM. Особенность модели – учёт послойного добавления материала в расчётную область с течением времени. Модель реализована в собственном программном обеспечении, использующем метод конечных элементов. Добавление материала учитывается алгоритмом активации/деактивации элементов. Решена тестовая задача по определению температурного поля при выращивании детали, геометрия которой идеализируется стержнем переменного сечения. Для оценки достоверности результатов проведены аналогичные расчёты в сторонних программных продуктах: в Ansys – в полной трёхмерной постановке – и в Matlab – решено одномерное уравнение теплопроводности для стержня изменяющейся во времени длины и переменной площади сечения. Сравнение поля температур показывает, что результаты расчётов в разработанном программном обеспечении соответствуют сторонним решениям при обеспечении высокой вычислительной эффективности.*

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, нестационарный процесс, послойное добавление материала, 3D-печать, метод конечных элементов, Ansys, Matlab

**Введение.** Технологический процесс 3D-печати связан с возникновением в детали значительных температурных деформаций, что сказывается на конечной форме изделий. Для корректного предсказания этих явлений необходимо расчётным путём определять температурное поле в процессе печати. Данное направление активно исследуется в научных работах [1-6]. Также на рынке имеются коммерческие программные продукты по численному моделированию 3D-печати (в частности, Ansys Additive [7] и Simufact Additive [8]).

Полное решение тепловой задачи в трёхмерной постановке сопряжено со значительными вычислительными затратами. В то же время, для изделий, обладающих теми или иными конструктивными особенностями, можно ввести в модель упрощения, позволяющие ускорить расчёт. Одними из таких случаев является печать детали, два габаритных размера которой намного больше третьего. Тогда деталь можно рассматривать как стержень переменного поперечного сечения и моделировать процесс теплопередачи в одномерной постановке. К нюансам этого процесса следует отнести увеличение длины

стержня с течением времени. Заметим, в классических методах математической физики размеры расчётной области, как правило, считаются неизменными. Таким образом, основная задача данной работы – построить одномерную математическую модель нестационарной теплопроводности в процессе 3D-печати с учётом пошагового добавления материала и оценить возможность её применения для ускорения тепловых расчётов в данном контексте.

**Математическая постановка задачи.** Получим нестационарное уравнение теплопроводности для стержня переменного поперечного сечения  $A = A(z)$ , где  $A$  — площадь сечения,  $z$  — координата вдоль оси стержня.

Классическое уравнение энергии (уравнение притока тепла) для твердого тела  $V$  без учета внутренних напряжений и деформаций, в общем виде записывается следующим образом [9]

$$\frac{dU}{dt} = Q_e, \quad (1)$$

где  $Q_e$  — скорость нагрева тела за счет поверхностных источников (массовые источники тепла полагаются отсутствующими), а  $U$  — внутренняя энергия тела

$$Q_e = \int_{\Sigma} q_{\Sigma} d\Sigma, \quad U = \int_V \rho e dV, \quad (2)$$

здесь  $V$  — объем тела,  $\Sigma$  — его внешняя поверхность,  $q_{\Sigma} = -\vec{q} \cdot \vec{n}$  — приток тепла за счет поверхностных источников,  $\vec{q}$  — вектор потока тепла,  $\vec{n}$  — вектор нормали к поверхности,  $\rho$  — плотность материала стержня,  $e$  — плотность внутренней энергии, для которой принимаем классическое выражение

$$e = c_p T, \quad (3)$$

где  $T$  — температура,  $c_p$  — удельная теплоёмкость. Плотность  $\rho$  и теплоемкость  $c_p$  полагаются постоянными.

Согласно закону Фурье

$$\vec{q} = -k \text{ grad} T, \quad (4)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\text{grad} T$  — дифференциальный оператор градиента температуры.

Уравнение притока тепла (1) с учетом (2) и (3) принимает вид

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_V T dV = \int_{\Sigma} q_{\Sigma} d\Sigma. \quad (5)$$

Сделаем основное допущение, что боковые поверхности стержня теплоизолированы, т.е. на этих поверхностях  $q_{\Sigma} = 0$ , а температура в стержне зависит только от продольной координаты  $z$  и времени:

$$T = T(z, t). \quad (6)$$

Выберем в качестве области  $V(z)$  часть стержня, соответствующую значениям координаты  $z$  в диапазоне  $0 \leq \tilde{z} \leq z$ . Тогда уравнение притока тепла (5) с учетом сделанных допущений для области  $V(z)$  примет вид

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_0^z \int_{A(\tilde{z})} T(\tilde{z}, t) d\Sigma d\tilde{z} = \int_{A(z)} q_{\Sigma} d\Sigma - \int_{A(0)} q_{\Sigma} d\Sigma, \quad (7)$$
$$0 \leq z \leq L(t),$$

где  $L(t)$  — длина стержня, зависящая от времени. В силу сделанных допущений приток тепла  $q_{\Sigma}$  и температура являются постоянным по сечению  $A(z)$ , тогда из (7) получаем

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \int_0^z A(\tilde{z}) T(\tilde{z}, t) d\tilde{z} = A(z) q_{\Sigma}(z, t) - A(0) q_{\Sigma}(0). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по  $z$  и учитывая, что закон Фурье (4) для случая (6) дает следующее выражение:

$$q_{\Sigma}(z, t) = k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (9)$$

из (8) получаем итоговое уравнение притока тепла для стержня переменного сечения

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( kA \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (10)$$

или

$$\frac{\rho c_p A}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (11)$$

Одномерная идеализация при решении тепловой задачи здесь связана с учётом изменения температуры только вдоль оси объекта. Заметим, что 1D-подход при моделировании тепловых процессов в SLM-печати использован также в работе [10].

Граничные условия соответствуют поддержанию заданной температуры на концах стержня:

$$\begin{aligned} T(z, t)|_{z=0} &= T_{\min}, \\ T(z, t)|_{z=L(t_i)} &= T_{\max}. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение теплопроводности (11) решается итерационно в цикле по временным шагам. На каждом шаге по времени  $\Delta t$  происходит увеличение длины стержня на величину  $\Delta L$ . Начальное распределение температур задаётся на основе поля температур на предыдущей итерации:

$$T(z, t)|_{t=t_i} = T(z, t)|_{t=t_{i-1}}. \quad (13)$$

При этом длина стержня  $L$  увеличивается с течением времени, что соответствует пошаговому добавлению материала при печати.

**Численное решение одномерного нестационарного уравнения теплопроводности процесса 3D-печати в Matlab.** Для решения уравнений в частных производных в Matlab используется функция «pdepe». Синтаксис данной функции требует, чтобы уравнение было представлено в виде [11]

$$c\left(z, t, u, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \frac{\partial T}{\partial t} = z^{-m} \frac{\partial}{\partial z} \left( z^m f\left(z, t, T, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \right) + s\left(z, t, T, \frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (14)$$

В нашем случае для величин  $c, m, f, s$  получаем следующие значения

$$\begin{aligned} c\left(z, t, u, \frac{\partial T}{\partial z}\right) &= \frac{\rho c_p A}{k}, \quad f\left(z, t, T, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = A \frac{\partial T}{\partial z}, \\ s &= m = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Зависимость площади сечения от координаты задаётся функцией

$$A(z) = \begin{cases} A_{\text{base}}, & z \leq L_{\text{base}}, \\ A_{\text{part}}, & z > L. \end{cases} \quad (16)$$

**Алгоритм конечно-элементного расчёта температурного поля в одномерной постановке.** Конечно-элементная формулировка нестационарной задачи теплопроводности записывается в виде [12, 13]:

$$\mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \dot{\mathbf{Q}}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица теплоёмкости,  $\mathbf{K}$  — матрица теплопроводности,  $\dot{\mathbf{Q}}$  — вектор тепловой нагрузки (мощности). Для одномерных двухузловых элементов матрицы теплопроводности и теплоёмкости имеют вид:

$$\mathbf{k}_e = \frac{kA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_e = \frac{c\rho A}{l} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $l$  — длина элемента.

Сборка глобальных матриц осуществляется по стандартному алгоритму.

В работе используется неявная схема интегрирования по времени:

$$\mathbf{C} \cdot \left( \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{Q}}, \quad (19)$$

откуда получаем систему линейных уравнений для нахождения вектора температур на следующем шаге:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{r} \quad (20)$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}\Delta t + \mathbf{K}\Delta t^2, \mathbf{r} = \dot{\mathbf{Q}}\Delta t^2 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_t\Delta t.$$

Для учёта пошагового добавления материала используется метод активации/деактивации элементов. Для деактивированных элементов матрицы  $\mathbf{k}_e$  и  $\mathbf{c}_e$  получают множитель  $10^{-6}$ . В начальный момент времени все элементы, кроме первого, деактивированы. На каждом шаге по времени активируется один очередной элемент. Матрицы теплопроводности и теплоёмкости пересобираются на каждой временной итерации с учётом нового набора активных элементов.

Граничные условия в виде заданной температуры на концах задаются по методу Пэйна-Айронса [14]: соответствующие диагональные компоненты матрицы  $\mathbf{M}$  в (21) полагаются равными большому числу (например,  $10^{20}$ ), а компоненты вектора правой части  $\mathbf{r}$  — заданной температуре  $T_{\min}$  или  $T_{\max}$  соответственно.

Данный алгоритм реализован в программе «PrintHeat» на языке C++. Для выполнения векторно-матричных операций и решения системы уравнений используется библиотека Eigen [15].

#### **Решение тестовой задачи. Сравнение и анализ результатов.**

Рассмотрим задачу численного моделирования теплопередачи в процессе SLM-печати образца, изображённого на рис. 1.

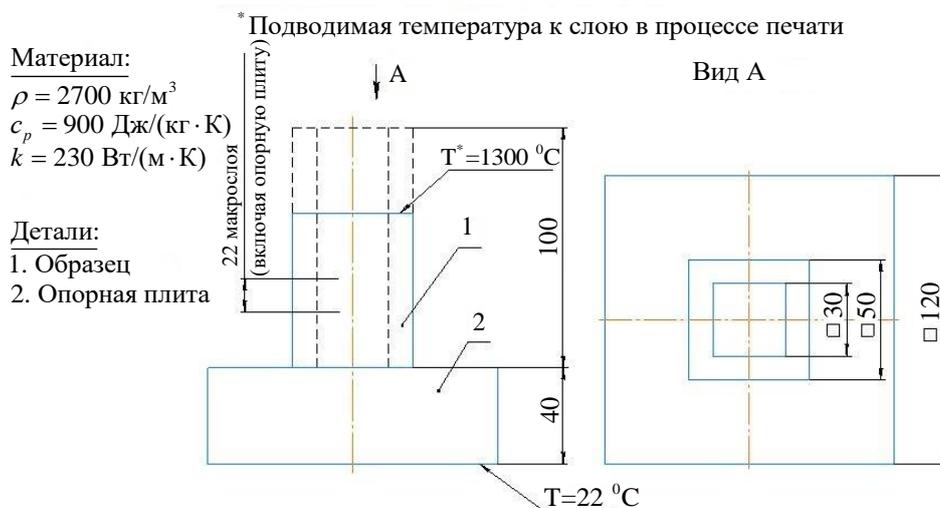


Рис. 1. Геометрия тестовой задачи

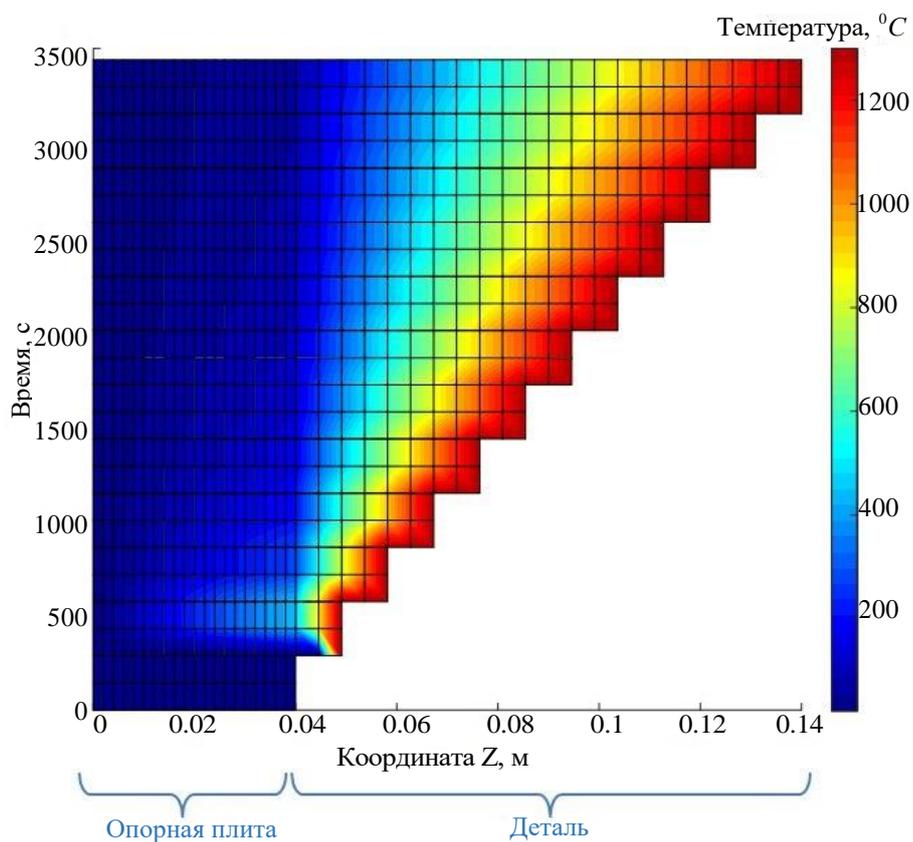
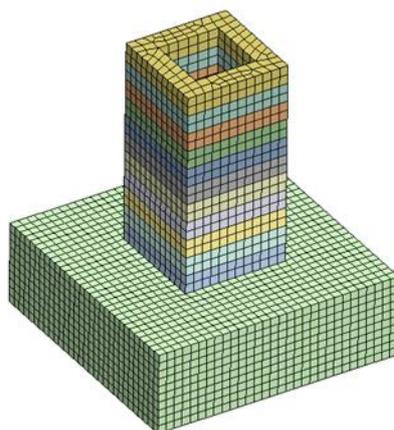


Рис. 2. Распределение температур по оси Z (по направлению выращивания) на основе решения Matlab

Данная задача решена тремя способами: 1) при помощи Matlab-функции «рдере», 2) с использованием разработанного кода

«PrintHeat» и 3) с использованием Ansys. Решение Matlab приведено на рис. 2.

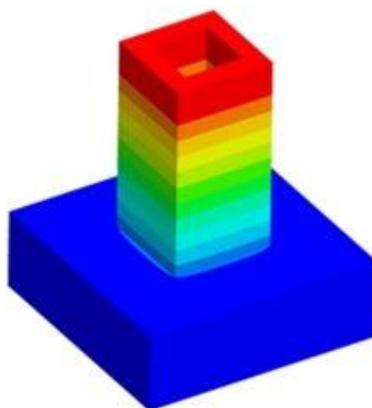
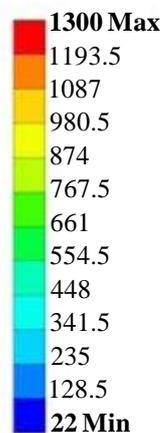
Конечно-элементная сетка и распределение температур в конечный момент времени в Ansys приведено на рис. 3.



а)

**C : Transient Thermal**

temp all  
Type: Temperature  
Unit: °C  
Time: 3441.2 s



б)

**Рис. 3.** КЭ-сетка (а) и распределение температуры (б) на основе решения Ansys в конечный момент времени

Сравнение распределения температур в конечный момент времени на основе решений в Matlab, PrintHeat и Ansys приведено на рис. 4.

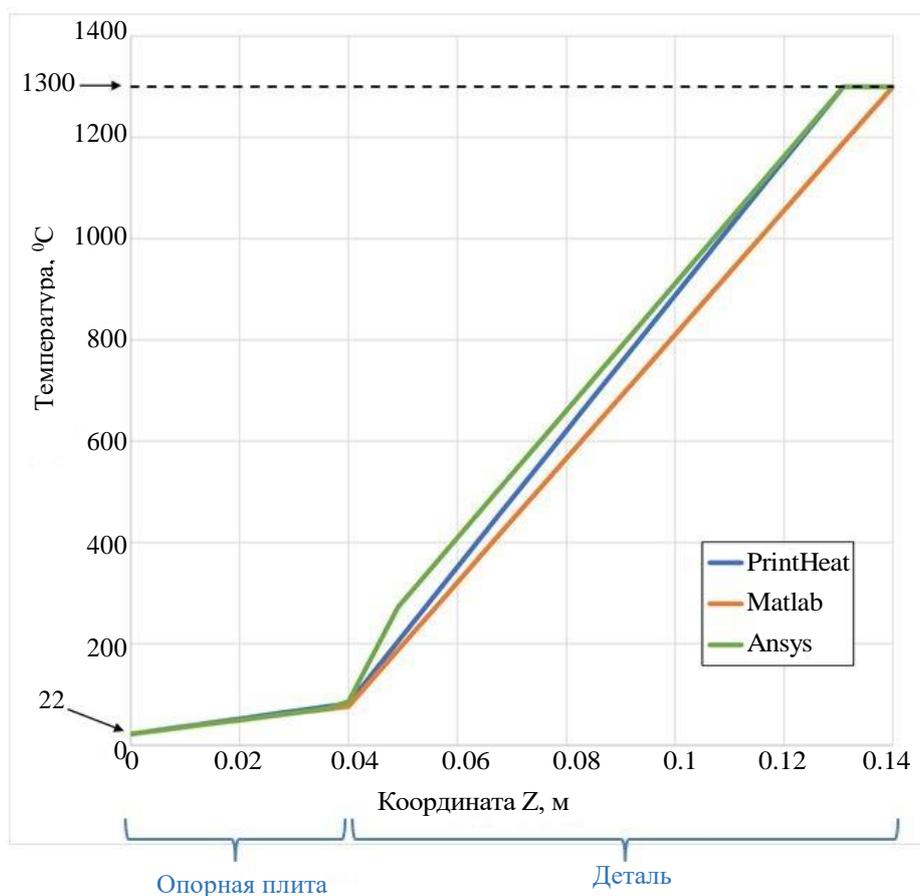


Рис. 4. Сравнение распределения температур в конечный момент времени в Matlab, PrintHeat и Ansys

**Анализ результатов расчётов.** Распределение температур в конечный момент времени (рис. 4), согласно трём проведенным расчётам (PrintHeat, Matlab, Ansys), полностью совпадает на участке опорной плиты. По толщине детали наблюдается некоторое отличие, которое объясняется следующим образом. В алгоритме конечно-элементного расчёта (PrintHeat, Ansys) подвод тепла осуществляется ко всему слою целиком, т.е. к двум узлам элемента. Вследствие этого, на графиках на вершине детали (в окрестности  $z = 0,14$  м) видна «полочка», отражающая постоянство температуры по толщине последнего слоя. Тогда как численное решение уравнения теплопроводности в Matlab подразумевает задание граничных условий строго в конечных точках стержня. Отличие двух конечно-элементных решений связано с тем, что моделирование в Ansys осуществляется в трёхмерной постановке, а в PrintHeat – в одномерной. Температура, нанесённая на график рис. 4 с модели Ansys представляет собой среднюю температуру элементов слоя. При этом в Ansys в зоне пере-

хода от опорной плиты к детали имеет место определённый температурный градиент по осям X и Y.

Заметим, что время расчёта задачи в одномерной постановке в программе PrintHeat на порядки меньше полного 3D-моделирования в Ansys.

**Вывод.** Разработанная тепловая математическая модель корректно описывает температурное поле в процессе печати для детали, геометрия которой допускает одномерную идеализацию в виде стержня переменного сечения. При этом обеспечивается значительное сокращение вычислительных затрат по сравнению с трёхмерной постановкой.

Направлением дальнейшей работы в части расширения возможностей разработанного конечно-элементного теплового решателя для аддитивного процесса является расширение списка доступных граничных условий для более гибкого учёта теплоотвода и переход к трёхмерной постановке.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), номер проекта 23-79-01213.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ökten K., Biyikoğlu A. *Development of thermal model for the determination of SLM process parameters. Optics & Laser Technology*, Vol. 137, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106825>.
- [2] Papazoglou, E.L., Karkalos, N.E., Markopoulos, A.P. *A comprehensive study on thermal modeling of SLM process under conduction mode using FEM. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 111, 2020, pp. 2939–2955, <https://doi.org/10.1007/s00170-020-06294-7>.
- [3] Trejos, J.D., Reyes, L.A., Garza, C., Zambrano, P. and Lopez-Botello, O. *Numerical modeling of thermal anisotropy on a selective laser melting process. Rapid Prototyping Journal*, Vol. 26, 2020, No. 9, pp. 1555–1567. <https://doi.org/10.1108/RPJ-02-2020-0032>.
- [4] Luo, Z., Zhao, Y. *Numerical simulation of part-level temperature fields during selective laser melting of stainless steel 316L. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 104, 2019, pp. 1615–1635, <https://doi.org/10.1007/s00170-019-03947-0>.
- [5] Yang, Y., van Keulen, F., Ayas, C. *A computationally efficient thermal model for selective laser melting. Additive Manufacturing*, Vol. 31, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100955>.
- [6] Foteinopoulos P., Papacharalampopoulos A., Stavropoulos, P. *On thermal modeling of Additive Manufacturing processes. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol. 20, 2018, pp. 66–83, <https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2017.09.007>
- [7] <https://www.ansys.com/products/additive>
- [8] <https://hexagon.com/products/simufact-additive>
- [9] Димитриенко, Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

- [10] Jeronen J., Tuovinen T., Kurki M. *One-Dimensional Thermomechanical Model for Additive Manufacturing Using Laser-Based Powder Bed Fusion*. Vol. 10. Iss. 6. 2022. <https://doi.org/10.3390/computation10060083>.
- [11] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pdepe.html>
- [12] [https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans\\_help\\_v182/ans\\_thry/thy\\_heat2.html](https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_heat2.html)
- [13] Zienkiewicz O.C., Parekh C.J. *Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements*. *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 1970, pp. 61-71. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020107>.
- [14] Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. Москва, Мир, 1981, 304 с.
- [15] <https://gitlab.com/libeigen/eigen>.

Статья поступила в редакцию 06.04.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кишов Е.А., Золотов Д.В., Коваль И.Ю. Численное моделирование нестационарного теплопереноса в процессе 3D-печати по технологии SLM в одномерной постановке. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 4, с. 19–30.

**Кишов Евгений Алексеевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструкции и проектирования летательных аппаратов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва. e-mail: [evgeniy.kishov@ssau.ru](mailto:evgeniy.kishov@ssau.ru)

**Золотов Дмитрий Викторович** — аспирант кафедры «Конструкции и проектирования летательных аппаратов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва. e-mail: [dmitriy.zolotov.98@mail.ru](mailto:dmitriy.zolotov.98@mail.ru)

**Коваль Илья Юрьевич** — аспирант кафедры «Сопротивление материалов» Самарского университета им. академика С.П. Королёва, инженер по направлению прочности АО «Моделирование и цифровые двойники». e-mail: [koval.ilya@list.ru](mailto:koval.ilya@list.ru)

## Numerical simulation of unsteady one-dimensional heat transfer during 3D-printing using SLM

© Е.А. Kishov<sup>1</sup>, D.V. Zolotov<sup>1</sup>, I.Yu. Koval<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Samara, 443086, Russia

<sup>2</sup>Joint stock company «Simulation and Digital Twin»

*A one-dimensional mathematical model of unsteady heat transfer process in the process of 3D printing of SLM technology is proposed. The feature of the model is taking into account the layer-by-layer addition of material to the calculation domain over time. The model is implemented within in-house software using the finite element method. Addition of material is taken into account by the algorithm of activation/deactivation of elements. A test problem for determining the temperature field during the growth of a part whose geometry is idealized by a rod of variable cross-section has been solved. To assess the reliability of the results, similar calculations are performed in third-party software products: in Ansys – in full three-dimensional formulation and in Matlab – the one-dimensional heat conduction equation for a rod of time-varying length and variable*

cross-sectional area is solved. Comparison of the temperature field shows that the results of calculations in the developed software correspond to third-party solutions while ensuring high computational efficiency.

**Keywords:** heat conduction equation, unsteady process, layer-by-layer addition of material, 3D printing, finite element method, Ansys, Matlab

## REFERENCES

- [1] Ökten K., Biyikoğlu A. *Development of thermal model for the determination of SLM process parameters. Optics & Laser Technology*, Vol. 137, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106825>.
- [2] Papazoglou, E.L., Karkalos, N.E., Markopoulos, A.P. *A comprehensive study on thermal modeling of SLM process under conduction mode using FEM. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 111, 2020, pp. 2939–2955, <https://doi.org/10.1007/s00170-020-06294-7>.
- [3] Trejos, J.D., Reyes, L.A., Garza, C., Zambrano, P. and Lopez-Botello, O. *Numerical modeling of thermal anisotropy on a selective laser melting process. Rapid Prototyping Journal*, Vol. 26, 2020, No. 9, pp. 1555–1567. <https://doi.org/10.1108/RPJ-02-2020-0032>.
- [4] Luo, Z., Zhao, Y. *Numerical simulation of part-level temperature fields during selective laser melting of stainless steel 316L. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 104, 2019, pp. 1615–1635, <https://doi.org/10.1007/s00170-019-03947-0>.
- [5] Yang, Y., van Keulen, F., Ayas, C. *A computationally efficient thermal model for selective laser melting. Additive Manufacturing*, Vol. 31, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100955>.
- [6] Foteinopoulos P., Papacharalampopoulos A., Stavropoulos, P. *On thermal modeling of Additive Manufacturing processes. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol. 20, 2018, pp. 66–83, <https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2017.09.007>
- [7] <https://www.ansys.com/products/additive>
- [8] <https://hexagon.com/products/simufact-additive>
- [9] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika splshnoj sredy. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki splshnoj sredy* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [10] Jeronen J., Tuovinen T., Kurki M. *One-Dimensional Thermomechanical Model for Additive Manufacturing Using Laser-Based Powder Bed Fusion*. Vol. 10. Iss. 6. 2022. <https://doi.org/10.3390/computation10060083>.
- [11] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pdepe.html>
- [12] [https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans\\_help\\_v182/ans\\_thry/thy\\_heat2.html](https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_heat2.html)
- [13] Zienkiewicz O.C., Parekh C.J. *Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 1970, pp. 61–71. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020107>.
- [14] Norri D., de Friz J. *Vvedenie v metod konechnych elementov* [Introduction to finite element method]. Moscow, Mir, 1981, 304 p.
- [15] <https://gitlab.com/libeigen/eigen>.

**Kishov E.A.**, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Aircraft Structures Department of Samara National Research University. e-mail: evgeniy.kishov@ssau.ru

**Zolotov D.V.**, Postgraduate of the Aircraft Structures Department of Samara National Research University. e-mail: dmitriy.zolotov.98@mail.ru

**Koval I.Yu.**, Postgraduate of the Strength of Materials Department of Samara National Research University, structural analysis engineer of Joint stock company “Simulation and Digital Twins”. e-mail: koval.ilya@list.ru