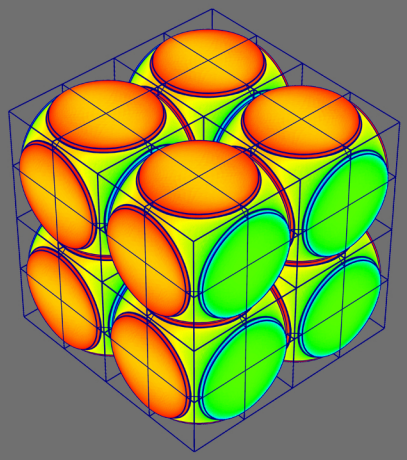
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых упругопластических композитов на основе микроструктурной теории течения. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 4, с. 3–18.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/354/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
12.11.2026 11:17:25

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-4-318

Моделирование деформирования слоистых упругопластических композитов на основе микроструктурной теории течения

© Ю.И. Димитриенко, М.С. Черкасова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена постановка задачи расчета деформирования слоистых упруго-пластических композитов на основе обобщенной теории течения. В качестве определяющих соотношений предложено использовать уравнения так называемой микроструктурной теории пластического течения для трансверсально-изотропных сред. В этой теории константы модели анизотропной теории течения композита определяются с помощью прямого решения локальных задач пластичности на ячейке периодичности, а также вычисляются компоненты тензоров концентрации напряжений, позволяющие вычислять микро-напряжения в компонентах композита. Приведен пример численного решения задачи о расчете напряжений в тонкой упругопластической слоистой композитной трубе под давлением. Слои композита подчиняются изотропной теории пластического течения с кинематическим упрочнением, рассмотрен случай, когда ячейка периодичности состоит из двух упруго-пластических слоев: сталь-алюминий. С помощью предложенной методики решения задачи, показано, что уровень микро-напряжений в композите существенно превышает значения макро-напряжений в композитной конструкции, поэтому их учет необходим для повышения точности расчетов деформирования и прочности композитных конструкций.

Ключевые слова: *слоистые композиты, теория пластического течения, микроструктурная теория, трансверсальная изотропия*

Введение. Некоторые перспективные классы композиционных материалов проявляют существенные упруго-пластические свойства. В частности, металлокомпозиты на основе металлических матриц и армирующих наполнителей различной природы (металлы, керамика) при высоких уровнях нагрузок могут обладать заметными пластическими деформациями [1,2]. Применение металлокомпозитов для разработки конструкций высокого давления [1] является перспективным направлением развития современной науки о композитах.

Расчет напряженно-деформированного состояния упруго-пластических композитов , обладающих существенной структурной анизотропией, представляет собой достаточно сложную, задачу, поскольку ее решения необходимо применять модели анизотропной пластичности, которые помимо традиционных достаточно сложных эффектов, характерных для теорий изотропной пластичности, должны учитывать эффекты анизотропии и наличия микроструктурных напряжений (микро-напряжений) в компонентах композита.

В настоящее время большинство наиболее известных анизотропных теорий пластичности основано на либо только феноменологическом подходе, без учета микроструктурных напряжений [3], либо на приближенном структурно-феноменологическом подходе, в котором микроструктурные напряжений учитываются, но приближенно-аналитическим способом, основанном на приближенном решении одномерных задач, по аналогии с методами Фойгта-Рейсса в простейших смесевых теориях композитов.

В последнее время активно развивается метод асимптотического осреднения (МАО) [4 – 12], хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с периодической структурой. Непосредственное применение МАО конструкциям из упругопластических композитов приводит к необходимости решения связанной задачи микро-макроскопического деформирования. Ранее в работах [13 – 15] был предложен метод решения нелинейных задач многомасштабного моделирования композитных конструкций путем построения микроструктурных моделей определяющих соотношений, в которых расчет констант, входящих в эти модели, осуществляется на основе аппроксимации численных диаграмм деформирования, полученных методом МАО.

В данной статье рассмотрено применение предложенной микроструктурной модели упругопластических композитов [13] для решения задачи о деформировании цилиндрической трубы высокого давления из слоистого композита.

Общая постановка макро-задачи анизотропной теории пластического течения. Рассмотрим постановку макрозадачи анизотропной теории пластического течения в скоростях [13], которая состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, определяющих соотношений и граничных условий на поверхности Σ рассматриваемой области

$$
\begin{gathered}
\nabla_i \dot{\bar{\sigma}}_{ij} = 0, \ \text{ в } V \\
\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right), \ \text{ в } V \cup \Sigma \\
\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\bar{\varepsilon}}^p_{kl}\right), \ \text{ в } V \cup \Sigma \\
\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{kl} = h\bar{Q}_{klij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij}, \ \text{ в } V \cup \Sigma \\
\Sigma_u : \ v_i\big|_{\Sigma_u} = \dot{u}^e_i, \ \ n_i\dot{\sigma}_{ij}\big|_{\Sigma_\sigma} = \dot{s}^e_j.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь ∇_i — компоненты набла-оператора [16] в декартовой системе координат Ox_i; а также обозначены компоненты тензоров в этой системе координат: $\bar{\sigma}_{ij}$ — тензора макро-напряжений; $\bar{\varepsilon}_{ij}$ —

тензора полных деформаций; $\bar{\varepsilon}_{kl}^{p}$ — тензора пластических деформаций; $\bar{C}_{ijkl}$ — эффективного тензора к модулей упругости; $\bar{Q}_{klij}$ — эффективного тензора пластической податливости; v_j — вектора скорости; u_i^e — вектора заданных перемещений на границе; n_i — вектора внешней нормали к поверхности; s_j^e — вектора заданных усилий. Точка сверху $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}$ означает производную по времени, а h — индикатор пластического нагружения, определяющий активное пластическое нагружение ($h=1$), разгрузку и активное упругое нагружение ($h=0$).

Определяющие соотношения модели микроструктурной трансверсально-изотропной теории течения (МТТТ). Задача (1) рассматривается для слоистого композиционного материала с периодической структурой, каждый слой которого является упругопластическим изотропным материалом, соответствующим модели теории пластического течения с поверхностью пластичности в форме Губера-Мизеса [17]. В работе [13] для композитов этого класса были разработаны эффективные определяющие соотношения трансверсально-изотропной теории течения (третья и четвертая группы соотношений в системе (1)).

Выражения для компонент эффективного тензора модулей упругости $\bar{C}_{ijkl}$ может быть найдено, например, с помощью конечно-элементной реализации метода асимптотического осреднения [8]. Полагаем, что компоненты $\bar{C}_{ijkl}$ являются константами, и не меняются при активном нагружении и разгрузке.

Найдем входящие в соотношения (1) компоненты $\bar{Q}_{klij}$ — тензора пластической податливости для указанной модели МТТТ.

Модель МТТТ является ассоциированной, в ней тензор скорости пластической деформации определяется суммой градиентов нескольких поверхностей пластичности

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{p} = h\sum_{\beta=1}^{k} \dot{\lambda}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}. \qquad (2)$$

Функции $\dot{\lambda}_\beta$ в (3) — это параметры нагружения, а f_β — пластические потенциалы, определяющие части уравнения поверхности пластичности

$$f_\beta = 0,\ \beta = 1\ldots k. \qquad (3)$$

Потенциалы f_β в модели МТТТ выбираются зависящими от $J_{\gamma H}\left(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^{\,p}\right)$, $\gamma = 1\ldots z_1$ — совместных инвариантов тензоров напряжений и пластических деформаций

$$f_\beta = f_\beta\left(J_{\gamma H}\left(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^{\,p}\right)\right),\ \beta = 1\ldots k\,. \tag{4}$$

С учетом (4) уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\,p}_{kl} = h\sum_{\gamma=1}^{z_1}\psi_\gamma J_{(\gamma)kl}, \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}\psi_\gamma = \sum_{\beta=1}^{k}\dot{\lambda}_\beta f_{\beta\gamma},\ \ f_{\beta\gamma} \equiv \partial f_\beta \big/ \partial J_{\gamma H}\,,\\ J_{(\gamma)kl} \equiv \partial J_{\gamma H}\big/\partial\bar{\sigma}_{kl}\,,\ \ J^{\,p}_{(\gamma)kl} \equiv -\partial J_{\gamma H}\big/\partial\bar{\varepsilon}^{\,p}_{kl}\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Продифференцируем уравнение (3) с учетом (4) по времени t

$$\dot{f}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{z_1} f_{\beta\gamma}\left(J_{(\gamma)ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij} - J^{\,p}_{(\gamma)ij}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\,p}_{ij}\right) = 0,\ \beta = 1\ldots k. \tag{7}$$

Вынесем в (7) из-под знака суммирования тензор скоростей напряжений $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}$ и тензор скоростей пластических деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\,p}_{ij}$, тогда получим

$$A_{(\beta)ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij} - A^{p}_{(\beta)ij}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\,p}_{ij} = 0,\ \beta = 1\ldots k, \tag{8}$$

где через $A_{(\beta)ij}$ и $A^{p}_{(\beta)ij}$ обозначены следующие выражения

$$A^{p}_{(\beta)ij} \equiv \sum_{\gamma=1}^{z_1} f_{\beta\gamma}J^{\,p}_{(\gamma)ij},\ \ A_{(\beta)ij} \equiv \sum_{\gamma=1}^{z_1} f_{\beta\gamma}J_{(\gamma)ij},\ \ \beta = 1\ldots k. \tag{9}$$

Подставим выражение (6) в (5) и выделим явно зависимость от скорости параметров нагружения

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\,p}_{kl} = h\sum_{\beta'=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{z_1}\dot{\lambda}_{\beta'}f_{\beta'\gamma}J_{(\gamma)ij}\,, \tag{10}$$

полученное выражение подставим в соотношение (8), тогда

$$A_{(\beta)ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = hA^{p}_{(\beta)ij}\sum_{\beta'=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{z_1}\dot{\lambda}_{\beta'}f_{\beta'\gamma}J_{(\gamma)ij},\ \ \beta = 1\ldots k. \tag{11}$$

Введем матрицу $R_{\beta\beta'}$

$$R_{\beta\beta'} \equiv hA^{p}_{(\beta)ij}\sum_{\gamma=1}^{z_1} f_{\beta'\gamma}J_{(\gamma)ij},\ \ \beta,\beta' = 1\ldots k. \tag{12}$$

тогда уравнение (11) можно записать в следующем виде

$$\sum_{\beta'=1}^{k} R_{\beta\beta'}\dot{\lambda}_{\beta'} = A_{(\beta)ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij}, \quad \beta = 1...k. \tag{13}$$

Если функции поверхностей пластичности равны нулю (индикатор пластического деформирования равен единице: $h = 1$), то матрица $R_{\beta\beta'}$ является невырожденной. В этом случае находим параметры нагружения из системы линейных алгебраических уравнений (13)

$$\dot{\lambda}_{\beta'} = S_{(\beta')ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij}, \quad \beta' = 1...k. \tag{14}$$

где введены обозначения

$$S_{(\beta')ij} = \sum_{\beta=1}^{k} R^{-1}_{\beta\beta'}A_{(\beta)ij}, \quad \beta' = 1\ldots k, \tag{15}$$

здесь $R^{-1}_{\beta\beta'}$ — обратная матрица к $R_{\beta\beta'}$,

Подставим выражение (14) для пластических потенциалов в формулу (10), тогда получим соотношение

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}_{kl} = h\left(\sum_{\beta'=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{z_1} S_{(\beta')ij}\, f_{(\beta')\gamma} J_{(\gamma)kl}\right)\dot{\bar{\sigma}}_{ij}\,. \tag{16}$$

Сравнивая (16) с третьим соотношением в системе (1), находим явное выражение для эффективного тензора $\bar{Q}_{klij}$ пластических податливостей

$$\bar{Q}_{klij} = \sum_{\beta'=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{z_1} S_{(\beta')ij}\, f_{(\beta')ij} J_{(\gamma)kl}\,. \tag{17}$$

Подставляя третью группу соотношений в системе (1) в четвертую группу соотношений этой же системы, находим соотношение между скоростями тензоров пластических деформации полных деформаций

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}_{mn} = h\bar{Y}_{mnuv}\dot{\bar{\varepsilon}}_{uv}\,. \tag{18}$$

где введен тензор формирования пластических деформаций в композите

$$\bar{Y}_{mnuv} \equiv T^{-1}_{mnkl}\bar{Q}_{klij}\bar{C}_{ijuv}, \tag{19}$$

здесь

$$T_{klrn} = \Delta_{klrn} + h\bar{Q}_{klij}\bar{C}_{ijrn}, \tag{20}$$

а Δ_{klrn} — единичный тензор 4-го ранга [16].

Подставляя (19) в третье соотношение системы (1), получаем искомое соотношение между скоростями тензоров напояжений и полных деформаций

$$\dot{\bar{\sigma}}_{rp} = \dot{\tilde{\bar{C}}}_{rpkl} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}, \tag{21}$$

где $\dot{\tilde{\bar{C}}}_{rpkl}$ — тензор касательных модулей упругости композита, зависящий от пластических деформаций

$$\dot{\tilde{\bar{C}}}_{rpkl} = \bar{C}_{rpij} (\Delta_{ijkl} - h \bar{Y}_{ijkl}) \tag{22}$$

Квадратичная модель МТТТ. В этой модели число пластических потенциалов равно двум: $k = 2$, а для самих функций пластических потенциалов f_β выбираются квадратичные выражения, подобные модели Губера-Мизеса [15, 17]:

$$\begin{aligned} 2 f_1 &= \left(\frac{J_{1H}}{\sigma_{1s}} \right)^2 + \frac{J_{4H}}{\sigma_{4s}^2} - 1, \\ 2 f_2 &= \left(\frac{J_{2H}}{\sigma_{2s}} \right)^2 + \frac{J_{3H}}{\sigma_{3s}^2} - 1, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\sigma_{1s}^{\pm}$ — предел текучести при продольном растяжении, $\sigma_{2s}^{\pm}$ — предел текучести при поперечном растяжении, σ_{4s} — предел текучести при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, σ_{3s} — пределы текучести при межслойном сдвиге слоистого композиционного материала. Направление Ox_3 ориентировано по нормали к плоскости слоев композита.

Совместные инварианты $J_{\gamma H}\left(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p\right)$ в модели МТТТ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} J_{1H} &= \left(\bar{\sigma}_{11} - H_1 \bar{\varepsilon}_{11}^p\right) + \left(\bar{\sigma}_{22} - H_1 \bar{\varepsilon}_{22}^p\right), \; J_{2H} = \bar{\sigma}_{33} - H_2 \bar{\varepsilon}_{33}^p, \\ J_{3H} &= \left(\bar{\sigma}_{13} - H_3 \bar{\varepsilon}_{13}^p\right)^2 + \left(\bar{\sigma}_{23} - H_3 \bar{\varepsilon}_{23}^p\right)^2, \\ J_{4H} &= \left(\bar{\sigma}_{11} - H_4 \bar{\varepsilon}_{11}^p\right)^2 + \left(\bar{\sigma}_{22} - H_4 \bar{\varepsilon}_{23}^p\right)^2 + 2\left(\bar{\sigma}_{12} - H_4 \bar{\varepsilon}_{12}^p\right)^2, \end{aligned} \tag{24}$$

где H_γ — анизотропные параметры упрочнения

$$H_\gamma = \frac{H_\gamma^0}{1 + \alpha_\gamma^0 \left(I_\gamma \left(\bar{\varepsilon}^p \right) \right)^{2n_\gamma}}, \; \gamma = 1, \ldots, 4, \tag{25}$$

зависящие от инвариантов тензора пластических деформаций $I_\gamma\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}\right)$ в группе трансверсальной изотропии [16,17]

$$I_1\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}\right)=\overline{\varepsilon}^{\,p}_{11}+\overline{\varepsilon}^{\,p}_{22},\;\; I_2\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}\right)=\overline{\varepsilon}^{\,p}_{33},$$
$$I_3\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}\right)=\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}_{13}\right)^2+\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}_{23}\right)^2,\;\; I_4\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}\right)=\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}_{11}\right)^2+\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}_{22}\right)^2+2\left(\overline{\varepsilon}^{\,p}_{12}\right)^2. \tag{26}$$

Входящие в данные соотношения (23)-(25) константы композиционного материала

$$H^0_\beta,\, n^0_\beta,\, \alpha^0_\beta,\, \sigma_{\beta s},\;\; \beta=1,\ldots,4, \tag{27}$$

а также эффективные упругие константы композита, с помощью которых определяются компоненты тензора $\overline{C}_{rpkl}$, в модели МТТТ определяются на основе решения специальных локальных задач на ячейке периодичности (ЯП) для базовых траекторий нагружения композита. Методика определения этих констант предложена в [13].

Тензоры концентрации напряжений в модели МТТТ. Соотношения модели МТТТ позволяют вычислить микронапряжений в компонентах композита $\sigma_{ij}(\xi_k, x_l, t)$, где ξ_k — локальные безразмерные координаты в ЯП композита [8]. Эти напряжения вычисляются итерационным методом с помощью следующих соотношений

$$\sigma^{\{m\}}_{ij}(\xi_k, x_l, t)=\int_o^t \dot{\sigma}^{\{m\}}_{ij}(\xi_k, x_l, \tau)\, d\tau\,, \tag{28}$$

$$\dot{\sigma}^{\{m\}}_{ij}=\tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{\{m\}}_{kl}\,, \tag{29}$$

где m — номер итерации, $\tilde{C}_{ijkl}$ — тензор касательных модулей упругости компонентов композита, а $\tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijkl}$ — итерация компонент этого тензора. Полагаем, что компоненты композита соответствуют модели теории течения для изотропных сред со степенным законом кинематического (трансляционного) упрочнения, тогда для компонент тензора $\tilde{C}_{ijkl}$ имеют место следующие выражения [13]:

$$\tilde{C}_{mpkl}=T^{-1}_{mpij}C_{ijkl},\; T_{ijmp}=\Delta_{ijmp}+hC_{ijkl}Q_{klmp},$$
$$Q_{ijkl}=\frac{I_{2p}^{2(1-n)}A_{kl}A_{ij}}{HS_{spmp}A_{sp}A_{mp}},$$
$$A_{ij}=B_{ijkl}\left(\sigma_{ij}-H\varepsilon^{p}_{kl}\right), \tag{30}$$
$$S_{ijmp}=I_{2p}^{2(1-n)}\Delta_{mpij}-\frac{2\alpha nH}{H_0}B_{klmp}\varepsilon^{p}_{kl}\varepsilon^{p}_{ij},$$

$$H = \frac{H_0}{1+\alpha I_{2p}^{2n}}, \quad 0 \le n \le 1, \ \alpha > 0,$$

$$I_{2p}^2 \equiv I_2^2\left(\varepsilon_{ij}^p\right) \equiv B_{ijkl}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{kl}^p,$$

$$B_{ijkl} = \Gamma_{ijmn}\Gamma_{mnkl}, \ \ \Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

где H_0, α, n — константы модели теории течения для компонентов композита — различные для каждого компонента.

Пластические деформации, в ходящие в эти соотношения, вычисляются с помощью следующих соотношений, являющихся аналогом соответствующих соотношений (18) на макроуровне

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}} &= hY_{ijkl}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}, \\ Y_{klij}^{\{m-1\}} &= Q_{klsp}^{\{m-1\}}\tilde{C}_{ksij}^{\{m-1\}} \end{aligned} \qquad (31)$$

Соотношение между микро-деформациями в ЯП и макро-деформациями композита устанавливается с помощью структурных соотношений, которые также записываются итерационным образом

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}} = K_{ijkl}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}, \qquad (32)$$

где $K_{ijkl}^{\{m-1\}}$ — тензор концентрации деформаций в компонентах композита на m-ой итерации.

Значение тензора $K_{ijkl}^{\{m-1\}}$ вычисляем с помощью метода асимптотического осреднения [8], для рассматриваемого в данной работе слоистого композита этот тензор может быть вычислен аналитически

$$K_{ijsp}^{\{m-1\}} = \Delta_{ijsp}^{\{m-1\}} + \delta_{ik}\delta_{j3}(\tilde{C}_{k3q3}^{\{m-1\}})^{-1}\left(\left\langle(\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}})^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle(\tilde{C}_{r3l3}^{\{m-1\}})^{-1}\tilde{C}_{l3sp}^{\{m-1\}}\right\rangle - \tilde{C}_{q3sp}^{\{m-1\}}\right),$$

здесь $\left\langle(\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}})^{-1}\right\rangle$ — осреднение по ЯП, а $(\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}})^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}}$.

Подставляя соотношение (32) в формулу (29), и выражая скорости макро-деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}$ через скорости макронапряжений с помощью (21), находим окончательное соотношение между скоростями микронапряжений в компонентах и макронапряжений в композите,

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} = B_{ijkl}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\sigma}}_{kl}^{\{m\}}, \ \ B_{ijkl}^{\{m-1\}} = \tilde{C}_{ijsp}^{\{m-1\}}K_{spuv}^{\{m-1\}}\tilde{\tilde{\Pi}}_{uvkl}^{\{m-1\}}, \qquad (33)$$

где $\tilde{\tilde{\Pi}}_{uvkl}$ — тензор касательных податливостей, являющийся обратным к $\tilde{\tilde{C}}_{ijmn}$.

Линеаризованная постановка макро-задачи. После линеаризации задачи (1), с учетом соотношений (18) и (21), получаем следующую итерационную последовательность линеаризованных макрозадач анизотропной теории пластического течения в скоростях:

$$\begin{cases} \nabla_i \dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}} = 0, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j^{\{m\}} + \nabla_j v_i^{\{m\}}\right), \\ \dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}} = \tilde{\bar{C}}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{p\{m\}} = h \bar{Y}_{klij}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}}, \\ v_i^{\{m\}}\Big|_{\Sigma_u} = \dot{u}_i^{e\{m\}}, \qquad n_i \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}\Big|_{\Sigma_\sigma} = \dot{s}_j^{e\{m\}}. \end{cases} \tag{34}$$

После итерационного решения этой задачи вычисляются поля микронапряжений в компонентах композита с помощью формул (33).

Постановка задачи об упругопластической анизотропной трубе под давлением. Рассмотрим в качестве примера тонкую упругопластическую трубу с круговым сечением, с внутренним радиусом r_1, внешним радиусом r_2 и длиной L. Будем полагать, что труба изготовлена из слоистого композита с периодической структурой, причем слои ортогональны к радиальной координате. Полагаем трубу достаточно тонкой, такой, что в локальном ортонормированном базисе цилиндрической системы координат r, φ, z трубу можно считать локально-трансверсально изотропной и применить к ней рассмотренную выше модель МДТТ, записанную в физических компонентах.

Аналогично в физических компонентах цилиндрической системы координат записываем постановку задачи (34). Граничные условия в данной задаче выберем следующими:

– скользящее закрепление на торцах трубы:

$$z = 0, L : v_z^{\{m\}} = 0,\ \dot{\sigma}_{rz}^{\{m\}} = 0,\ \dot{\sigma}_{\varphi z}^{\{m\}} = 0, \tag{35}$$

– скорость изменения давления на внутренней и внешней поверхностях

$$\begin{aligned} r = r_1 :\ & \dot{\sigma}_{rr}^{\{m\}} = -\dot{p}_{e1}^{\{m\}},\ \dot{\sigma}_{rz}^{\{m\}} = 0,\ \dot{\sigma}_{r\varphi}^{\{m\}} = 0, \\ r = r_2 :\ & \dot{\sigma}_{rr}^{\{m\}} = -\dot{p}_{e2}^{\{m\}},\ \dot{\sigma}_{rz}^{\{m\}} = 0,\ \dot{\sigma}_{r\varphi}^{\{m\}} = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\dot{p}_{e1}^{\{m\}}$, $\dot{p}_{e2}^{\{m\}}$ — заданные скорости изменения давления на внутренней и внешней поверхностях цилиндра, зависящие от времени.

С учетом цилиндрической трансверсальной изотропии упругопластического материала цилиндра решение задачи (34) ищется в осесимметричном виде:

$$v_r^{\{m\}} = v_r^{\{m\}}(r,t),\ v_z^{\{m\}} = 0,\ v_\varphi^{\{m\}} = 0. \qquad (37)$$

Кинематические соотношения системы (34), в данном случае, имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{\{m\}} = \frac{\partial v_r}{\partial r},\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} = \frac{v_r}{r},\ \dot{\varepsilon}_{zz}^{\{m\}} = 0,\ \text{ост. } \dot{\varepsilon}_{rz}^{\{m\}} = \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{\{m\}} = \dot{\varepsilon}_{\varphi z}^{\{m\}} = 0. \qquad (38)$$

а определяющие соотношения задачи (34) (третья и четвертая группы соотношений) явным образом в физических компонентах записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{rr}^{\{m\}} = \tilde{\tilde{C}}_{1111}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{rr}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{1122}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{1133}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{zz}^{\{m\}}, \\ \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} = \tilde{\tilde{C}}_{1122}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{rr}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{2222}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{2233}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{zz}^{\{m\}}, \\ \dot{\sigma}_{zz}^{\{m\}} = \tilde{\tilde{C}}_{1133}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{rr}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{2233}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \tilde{\tilde{C}}_{3333}^{\{m-1\}}\dot{\varepsilon}_{zz}^{\{m\}}, \end{cases} \qquad (39)$$

и

$$\begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}_{rr}^{p\{m\}} = h\left(\bar{\bar{Y}}_{1111}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{rr}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{1122}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{1133}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{zz}^{\{m\}}\right), \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi}^{p\{m\}} = h\left(\bar{\bar{Y}}_{1122}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{rr}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{2222}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{2233}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{zz}^{\{m\}}\right), \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{zz}^{p\{m\}} = h\left(\bar{\bar{Y}}_{1133}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{rr}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{2233}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi}^{\{m\}} + \bar{\bar{Y}}_{3333}^{\{m-1\}}\dot{\bar{\varepsilon}}_{zz}^{\{m\}}\right). \end{cases} \qquad (40)$$

Уравнения равновесия системы (34) в физических компонентах сводятся к одному тождественно ненулевому уравнению

$$\frac{\partial \dot{\bar{\sigma}}_{rr}^{\{m\}}}{\partial r} + \frac{\dot{\bar{\sigma}}_{rr}^{\{m\}} - \dot{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}^{\{m\}}}{r} = 0\,. \qquad (41)$$

Подставляя (37)–(40) в (41) , получаем уравнение относительно скорости $v_r^{\{m\}}(r,t)$. Полученное дифференциальное уравнение решаем численно с использованием метода прогонки на каждой $\{m\}$-й итерации.

Результаты численного моделирования. В качестве примера численного расчета по разработанному алгоритму был рассмотрен цилиндр из слоистого металлического композиционного материала, ЯП которого состояла из 2-х слоев: стали и алюминия. Геометрические размеры цилиндрической трубы: $r_1 = 0.5$ м, $r_2 = 0.59$ м. На внутренней поверхности цилиндра было задано давление в виде линейной функции времени t, которое изменялось со временем от 0 ГПа до 5,6 МПа.

В результате численного решения дифференциального уравнения второго порядка (41) получены распределения перемещений, макро-

напряжений и деформаций по радиусу упругопластического цилиндрического тела, а также изменения этих функций во времени.

На рисунке 1 приведен график распределения радиального перемещения $u_r(r,t)$ по толщине цилиндра в разные моменты времени.

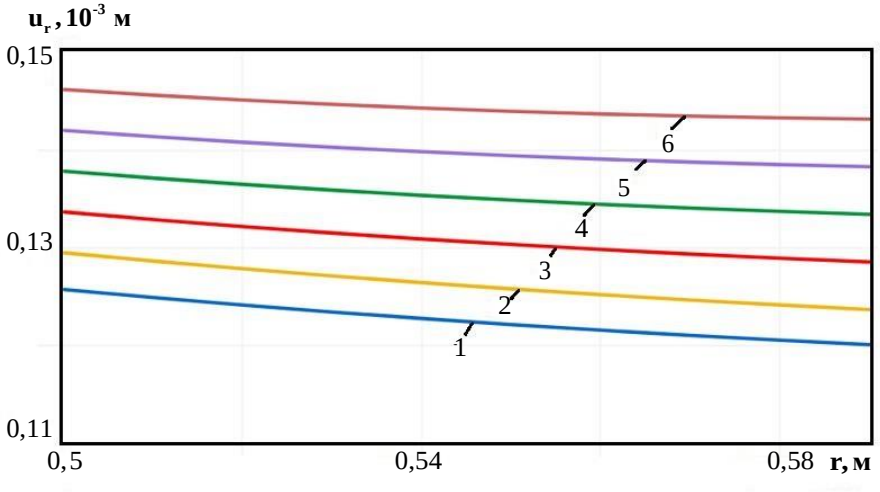


Рис. 1. Распределение радиального перемещения по толщине цилиндра в разные моменты времени t нагружения

На рисунках 2 и 3 представлены графики распределения компонент тензора $\bar{\sigma}_{rr}(r,t)$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$ макронапряжений по радиусу цилиндра в разные моменты времени. Распределение напряжений по радиусу близко к линейному, максимум его по абсолютному значению, возрастает с увеличением нагрузки.

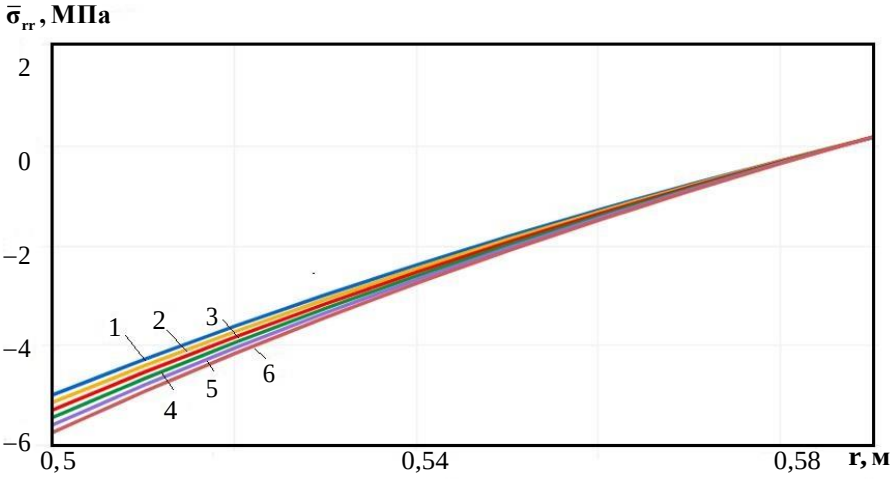


Рис. 2. Распределение радиальной компоненты тензора макронапряжений по толщине цилиндра в разные моменты времени

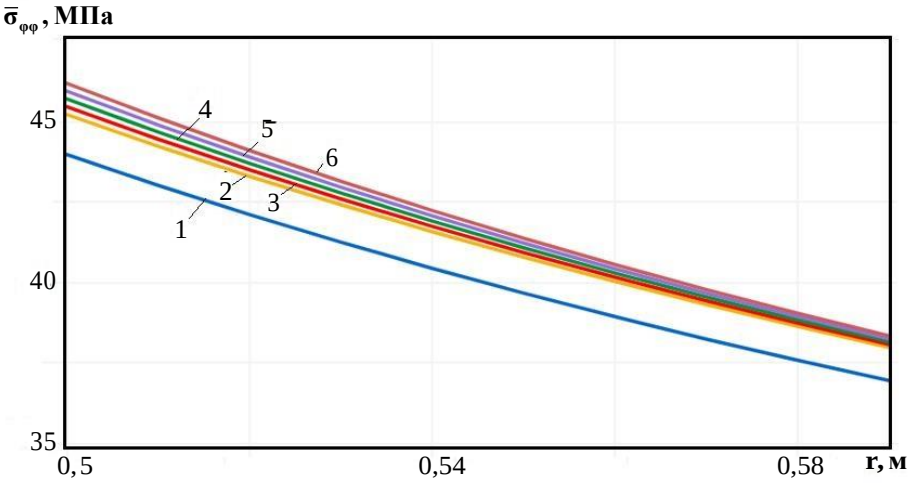


Рис. 3. Распределение кольцевой компоненты тензора макронапряжений по толщине цилиндра в разные моменты времени

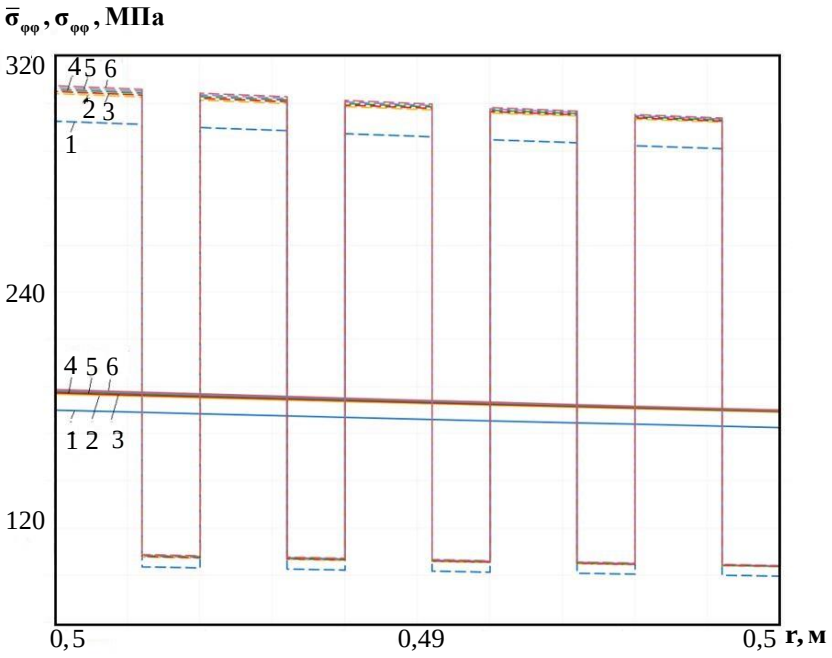


Рис. 4. Распределение кольцевых макронапряжений $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ (сплошные линии) и микронапряжений $\sigma^{(0)}_{\varphi\varphi}$ (прерывистые линии) по толщине цилиндра (цифры на графиках соответствуют разным моментам времени)

На рисунке 4 показаны совместные распределения кольцевых макронапряжений $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$ и микронапряжений $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$ по толщине

цилиндра для различных моментов времени. Функции $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$,в отличие от $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$, являются разрывными (кусочно-гладкими): при переходе от слоя к слою в каждой ЯП происходит скачок кольцевых напряжений. Скачки напряжений на каждой ЯП обусловлены различными свойствами используемых в слоях композита материалов.

Среднее значение микро-напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$ по ЯП совпадает со значением макро-напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$, однако значения напряжений в слоях существенно отличаются от среднего напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$ (например, на рисунке 4 максимальное значение $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$ составляет 305 МПа, а максимальное значение $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r,t)$ – 174 МПа). Для задач прочности композитных конструкций этот результат является весьма существенным: расчет прочности только с точки зрения макро-анализа является слишком приближенным и может приводить значительным ошибкам.

Выводы. В работе предложена постановка задачи для моделирования напряженно-деформированного состояния упругопластических трансверсально-изотропных композитных конструкций на основе обобщенной анизотропной теории течения. Особенности данной постановки задачи заключаются в использовании в ней микроструктурной теории течения, которая с одной стороны, позволяет «развязать» макро- и микро-задачи нелинейного расчета НДС в композитных упругопластических конструкциях, а с другой стороны, позволяет вычислять поля микронапряжений в компонентах композита после решения макро-задачи. Приведен пример численного решения задачи расчета НДС тонкостенной анизотропной цилиндрической композитной трубы давлением. Показано, что предложенная постановка задачи и методика ее решения позволяет рассчитывать как макронапряжения, так и микронапряжения в упруго-пластической конструкции. Показано, что микронапряжения могут значительно превышать значения макронапряжений, что имеет большое значение для расчета прочности из композитов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pyka D., Bocian M., Jamroziak K., Kosobudzki M., Kulisiewicz M. Concept of a gun barrel based on the layer composite reinforced with continuous filament computational technologies in engineering (TKI’2018). *AIP Conf. Proc.,* vol. 2078, iss. 1, art. 020043-1–020043-10.

[2] Tan Xin, Liu Kai, Wang Zhixuan, Yan Xiaobo, Yang Wenshu, Wu Gaohui. Mechanical behavior of deformable particles reinforced Al matrix composites. *Materials Science and Engineering: A,* 2021, vol. 806, art. 140815.

[3] Gyu-Sei Yi. Anisotropic constitutive model for predictive analysis of composite

laminates. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8(S1), pp.189–193.

[4] Dvorak G. J. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings Royal Society of London*, 1992, vol. A437, pp. 311-327.

[5] Fish J., Shek K., Pandheeradi M., Shephard M. S. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 148, iss. 1-2, pp. 53-73.

[6] Alber H.-D. Justification of homogenized models for viscoplastic bodies with microstructure. *Deformation and Failure in Metallic Materials*, 2003, vol. 10, pp. 295–322.

[7] Mbiakop A., Constantinescu A., Danas K. On void shape effects of periodic elasto-plastic materials subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, 2015, vol. 49, pp.481-499

[8] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[9] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 356 с.

[10] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[11] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[12] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.

[13] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 47–70.

[14] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

[15] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго-пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

[16] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[17] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 12.09.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых упругопластических композитов на основе микроструктурной теории течения. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 4, с. 3–18.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, дирек-

тор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit@bmstu.ru

Черкасова Мария Сергеевна — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: cerkasovam220@gmail.com

Modeling of deformation of layered elastic-plastic composites based on microstructural flow theory

© Yu.I. Dimitrienko, M.S. Cherkasova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem statement of calculation of deformation of layered elastic-plastic composites based on generalized flow theory is proposed. As constitutive relations it is proposed to use equations of so-called microstructural theory of plastic flow for transversely isotropic media. In this theory constants of model of anisotropic theory of composite flow are determined by means of direct solution of local problems of plasticity on periodicity cell, and also components of stress concentration tensors are calculated, allowing calculation of microstress in components of composite. An example of numerical solution of problem on calculation of stresses in thin elastic-plastic layered composite pipe under pressure is given. Composite layers obey isotropic theory of plastic flow with kinematic hardening, the case is considered when periodicity cell consists of two elastic-plastic layers: steel-aluminum. Using the proposed method for solving the problem, it is shown that the level of micro-stresses in the composite significantly exceeds the values of macro-stresses in the composite structure, so their consideration is necessary to improve the accuracy of calculations of deformation and strength of composite structures.

***Keywords**: layered composites, plastic flow theory, micro-structural theory, transverse isotropy*

REFERENCES

[1] Pyka D., Bocian M., Jamroziak K., Kosobudzki M., Kulisiewicz M. Concept of a gun barrel based on the layer composite reinforced with continuous filament computational technologies in engineering (TKI'2018). *AIP Conf. Proc.*, vol. 2078, iss. 1, art. 020043-1–020043-10.

[2] Tan Xin, Liu Kai, Wang Zhixuan, Yan Xiaobo, Yang Wenshu, Wu Gaohui. Mechanical behavior of deformable particles reinforced Al matrix composites. *Materials Science and Engineering: A*, 2021, vol. 806, art. 140815.

[3] Gyu-Sei Yi. Anisotropic constitutive model for predictive analysis of composite laminates. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8(S1), pp.189–193.

[4] Dvorak G. J. Transformation field analysis of inelastic composite materials. Proceedings Royal Society of London, 1992, vol. A437, pp. 311-327.

[5] Fish J., Shek K., Pandheeradi M., Shephard M. S. Computational plasticity for

composite structures based on mathematical homogenization: theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 148, iss. 1-2, pp. 53-73.

[6] Alber H.-D. Justification of homogenized models for viscoplastic bodies with microstructure. *Deformation and Failure in Metallic Materials*, 2003, vol. 10, pp. 295–322.

[7] Mbiakop A., Constantinescu A., Danas K. On void shape effects of periodic elasto-plastic materials subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, 2015, vol. 49, pp.481-499

[8] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element design of effective elastic and plastic characteristics of composites on the basis of method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[9] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov [*Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics*]*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.

[10] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. New York, Springer Publ., 1980.

[11] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[12] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 336 p.

[13] Dimitrienko Yu.I., Cherkasova M.S., Dimitrienko A. Yu. Microstructural model anisotropic flow theory for elastic-plastic layered composites. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 3, pp. 47–70.

[14] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Dimitrienko A. Yu., Yurin Yu.V. Modeling microstructural model of the plasticity deformation theory for quasi-isotropic composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 17–44.

[15] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Yurin Yu.V. Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 4, pp. 3–26.

[16] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[17] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit@bmstu.ru

Cherkasova M.S., Postgraduate of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: cerkasovam220@gmail.com