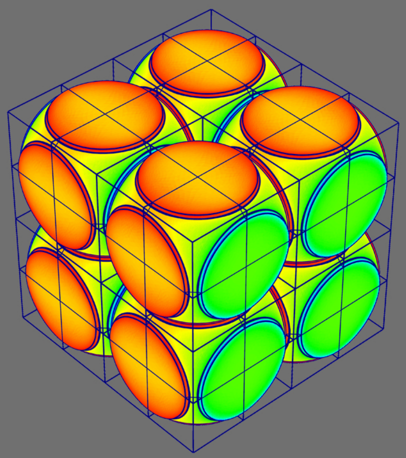
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Сорокин В.Г. Аналитические решения нелинейных уравнений с запаздыванием, используемых при математическом моделировании процессов переноса. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 3, с. 140–167.

УДК 517.929+517.95 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-3-140167

# Аналитические решения нелинейных уравнений с запаздыванием, используемых при математическом моделировании процессов переноса

© В.Г. Сорокин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*Рассматриваются нелинейные уравнения переноса с постоянным запаздыванием. Во введении дается краткий обзор публикаций, в которых исследуются математические модели переноса с запаздыванием и разрабатываются численные методы решения соответствующих задач. В основных разделах статьи описывается более сорока уравнений переноса с постоянным запаздыванием и различными коэффициентами переноса, которые допускают точные аналитические решения. Кинетические функции всех рассматриваемых уравнений содержат свободные параметры или произвольные функции. Получены решения с аддитивным, мультипликативным, обобщенным и функциональным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Многие решения выражаются через элементарные функции. Для некоторых типов уравнений сформулированы теоремы о «размножении» решений. Описанные уравнения и их решения могут быть использованы для оценки точности численных методов интегрирования соответствующих нелинейных задач переноса с запаздыванием.*

***Ключевые слова:*** *нелинейные уравнения переноса с запаздыванием, уравнения в частных производных с запаздыванием, аналитические решения, решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, автомодельные решения*

**Введение.** Уравнения переноса с запаздыванием применяются для описания конвективного переноса некоторой субстанции, когда рассматриваемый процесс, явление или система обладают свойством последействия, то есть зависимости текущего состояния от значений искомых величин в некоторый прошлый момент времени. Простейшее уравнение переноса с постоянным запаздыванием имеет вид

$$u_t + au_x = f(u, w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ — искомая функция, $w = w(x,t)$ — функция с запаздыванием, $f(u,w)$ — кинетическая функция, $a > 0$ — коэффициент переноса, имеющий физический смысл скорости, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание.

*Замечание 1.* В литературе часто можно встретить уравнения переноса с запаздыванием по $x$ (см., например, [1-3]):

$$u_t + au_x = f(u, w), \quad w = u(x-\tau, t). \tag{2}$$

Так как уравнения (1) и (2) симметричны относительно аргументов $x$ и $t$ (с точностью до переобозначения константы $a$ и кинетической функции $f$), в следующих разделах для простоты и определенности рассматриваются только уравнения вида (1) с запаздыванием по $t$.

Помимо уравнений переноса с одним постоянным запаздыванием (1), в литературе также встречаются уравнения с несколькими постоянными запаздываниями, с пропорциональным запаздыванием, одновременно с пропорциональным запаздыванием по одной переменной и пропорциональным запаздыванием по другой переменной, и др. Рассмотрим далее некоторые примеры уравнений переноса с такими запаздываниями, которые применяются в биологии и медицине.

В [4] с помощью линейного уравнения переноса с двумя запаздываниями по $x$ (формально, с запаздыванием и с опережением) описывается процесс возбуждения нейронов. Рассматриваемое уравнение имеет вид:

$$u_t + a(x,t)u_x = b(x,t)(w_1 - u) + c(x,t)(w_2 - u), \qquad (3)$$

где $u = u(x,t)$ — вероятность того, что в момент времени $t$ деполяризация мембраны нейрона меньше $x$; $w_1 = u(x - \tau_1, t)$, $w_2 = u(x + \tau_2, t)$; $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов. Положительные постоянные $\tau_1$ и $\tau_2$ позволяют учесть увеличение или уменьшение вероятности деполяризации нейрона в случае, соответственно, возбуждающего или тормозного импульса. Статья [4] посвящена разработке разностной схемы для решения соответствующей начально-краевой задачи, анализу ее сходимости и устойчивости.

Линейное уравнение с пропорциональным запаздыванием по $x$ рассматривается в [5] для описания роста и деления клеток, структурированных по размеру:

$$u_t + au_x = p^2 bw - bu - \mu u, \quad w = u(px, t),$$

где $u = u(x,t)$ — распределение плотности клеток размером $x$ в момент времени $t$. Данное уравнение моделирует динамику популяции клеток, растущих со скоростью $a > 0$ и делящихся со скоростью $b > 0$ на $p > 1$ дочерних клеток размером $x/p$ (обычно $p = 2$). Предполагается также, что клетки гибнут со скоростью $\mu > 0$. Путем сведения рассматриваемой начально-краевой задачи к последовательности более простых задач Коши в [5] получено аналитическое решение начально-краевой задачи для произвольных начальных данных.

В [6] рассматривается модель популяции клеток с одновременным учетом пролиферации и созревания, которая основана на нелинейном уравнении переноса с постоянным запаздыванием по времени и пропорциональным по $x$:

$$u_t + a(x)u_x = cw(1-w) - bu, \quad w = u(px, t-\tau), \tag{4}$$

где $u = u(x,t)$ — плотность пролиферирующих клеток зрелости $x$ в момент времени $t$, $a(x) > 0$ — скорость созревания (обычно $a(x) = rx$, $r > 0$ — некоторая константа), $b > 0$ и $c > 0$ — некоторые константы, $\tau > 0$ — время запаздывания, $p > 0$ — коэффициент пропорциональности. Переменная $x$ называется «переменной созревания» (от англ. "maturation variable") и отвечает за уровень зрелости клетки. В данной модели учитывается, что динамика текущей популяции клеток зависит как от популяции в некоторый момент времени в прошлом, так и от популяции клеток другого уровня зрелости. В [6] изучается существование и локальная устойчивость решений различного рода для различных начальных данных и значений параметров уравнения. Похожие модели рассматриваются также в [7, 8]. Более сложное нелинейное уравнение с произвольным аргументом по $x$ и постоянным запаздыванием по времени:

$$u_t + a(x)u_x = f(t, u, w), \quad w = u(\xi(x), t-\tau),$$

где $0 \le \xi(x) < x$, изучается в [9].

*Замечание 2.* Модели, основанные на одиночных уравнениях переноса без запаздывания, рассматриваются в [10], а на системах таких уравнений — в [11].

*Замечание 3.* Некоторые модели, основанные на реакционно-диффузионных уравнениях с запаздыванием (и других уравнениях математической физики второго порядка с запаздыванием), можно найти в [12].

Большой объем литературы посвящен разработке и исследованиям численных методов решения уравнений переноса с запаздыванием. Численные методы для уравнений переноса с постоянным запаздыванием рассматриваются, например, в [1-3]. Одношаговые разностные методы для уравнений переноса с запаздыванием по обеим переменным разрабатываются в [13]. В [14] рассматриваются разностные схемы для линейного уравнения переноса с постоянными и переменными запаздыванием и опережением по $x$ вида (3). Предложены две разностные схемы, одна из которых условно устойчива, а другая — безусловно устойчива. В [15] разрабатывается численный метод для уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием по $x$ и постоянным запаздыванием по времени вида (4). Монография [16] посвящена разностным численным методам решения уравнений в частных производных с запаздыванием, в том числе уравнениям переноса с запаздыванием. Предложен подход, заключающийся в использовании аналогов методов, известных для уравнений без запаздывания, и интерполяции с заданными свойствами для учета запаздывания.

Точные аналитические решения уравнений в частных производных с запаздыванием используются в формулировках тестовых задач, применяемых для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования таких уравнений. Особенно полезны уравнения, которые содержат произвольные функции и допускают точные решения со свободными параметрами. Такие уравнения и точные решения позволяют легко формулировать большой набор тестовых задач, которые в том числе дают возможность наблюдать и сравнивать работу методов в обычных и особых случаях, например, в устойчивых и неустойчивых областях. Изучение точных решений также способствует лучшему пониманию рассматриваемых процессов и явлений.

Полная групповая классификация уравнений математической физики с запаздыванием реакционно-диффузионного типа и типа Клейна — Гордона проводилась в [17-19]. В результате было получено некоторое количество уравнений, допускающих точные аналитические решения, однако общее число таких уравнений было сравнительно небольшим. Более продуктивным оказался метод функциональных связей, разработанный в [20, 21]. Он позволяет строить точные решения для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, содержащих произвольные функции. С его помощью были получены точные решения для нескольких сотен уравнений в частных производных с запаздыванием (см., например, [22-27]). В [28, 29] предложен метод структурной аналогии решений, который позволяет строить точные решения уравнений в частных производных с запаздыванием на основе точных решений более простых уравнений без запаздывания. Точные решения уравнений математической физики с запаздыванием различного вида (в том числе с пространственно анизотропным временным запаздыванием) получены этим методом в [28-33]. Результаты последних лет по точным решениям уравнений математической физики второго порядка с постоянным, пропорциональным и переменным запаздыванием обобщены и структурированно изложены в монографии [12].

Все указанные выше публикации и монографии содержат точные решения уравнений в частных производных второго и старших порядков с запаздыванием. Практически отсутствуют публикации по точным аналитическим решениям нелинейных уравнений первого порядка с запаздыванием. На данный момент существует только одна работа [34]. В ней проводится полная групповая классификация уравнения переноса с запаздыванием вида

$$u_t + uu_x = F(u, w), \quad w = u(x, t-\tau).$$

Получено четыре уравнения, которые допускают точные решения:

одно уравнение с произвольной функцией, допускающее решение типа бегущей волны, одно линейное уравнение и два уравнения со степенными нелинейностями. Полученные решения содержат произвольные функции и свободные параметры.

В статье далее термин «точное аналитическое решение нелинейного уравнения переноса с запаздыванием», или просто «точное решение», применяется в случаях, когда решение выражается:

1. в элементарных функциях,
2. через неопределенные интегралы,
3. через решения уравнений переноса без запаздывания,
4. через решения ОДУ (или систем ОДУ) с запаздыванием или без запаздывания.

Допустимы также комбинации решений из пп. (1) – (4).

*Замечание 4.* Точным решениям уравнений математической физики первого, второго и более старших порядков без запаздывания посвящена книга [35], которая содержит более четырех с половиной тысяч уравнений, допускающих точные решения.

Далее рассматриваются нелинейные уравнения переноса с запаздыванием:

$$u_t + au_x = F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

где $u = u(x,t)$, $a > 0$ — постоянный (а в некоторых случаях переменный $a = a(x) > 0$, но не зависящий от $u$) коэффициент переноса, $F(u, w)$ — кинетическая функция, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Рассмотрено восемнадцать таких уравнений. Для трех уравнений сформулированы теоремы о размножении решений.

Рассматриваются также нелинейные уравнения переноса с запаздыванием и зависящим от искомой функции коэффициентом переноса:

$$u_t + H(u)u_x = F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

где $H(u)$ — коэффициент переноса степенного, экспоненциального или логарифмического вида. Рассмотрено двадцать семь таких уравнений

Точные аналитические решения всех рассмотренных уравнений содержат свободные параметры; сами уравнения — свободные параметры и/или произвольные функции. Данное обстоятельство делает рассматриваемые уравнения и их точные решения подходящими для составления обширного каталога тестовых задач, который можно затем использовать для всестороннего тестирования соответствующих численных методов. Описанные точные решения могут быть также использованы при изучении качественных особенностей рассматриваемых и родственных уравнений с запаздыванием.

**Точные аналитические решения уравнений переноса с запаздыванием и постоянным коэффициентом переноса.**

**Уравнение 1.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{5}$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u(x,t) = \exp\left[\sum_{n=1}^{N} x^n \psi_n(t)\right],$$

где $N$ — любое натуральное число, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\psi_0' = b\psi_0 - a\psi_1 + c\bar{\psi}_0 + d,$$
$$\psi_i' = b\psi_i - (i+1)a\psi_{i+1} + c\bar{\psi}_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$
$$\psi_N' = b\psi_N + c\bar{\psi}_N.$$

Здесь $\bar{\psi}_i = \psi_i(t-\tau), \quad i = 0, \dots, N.$

**Уравнение 2**. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau). \tag{6}$$

1. Уравнение (6) допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\lambda x}\psi(t), \tag{7}$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' + a\lambda\psi - \psi f(\bar{\psi}/\psi) = 0, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

2. Уравнение (6) имеет также решение, более общее, чем (7):

$$u = \exp(\alpha x + \beta t)\theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \gamma$ — произвольные постоянные , а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$(a\lambda + \gamma)\theta' + (a\alpha + \beta)\theta - \theta f(e^{-\beta\tau}\bar{\theta}/\theta) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z-\sigma), \quad \sigma = \gamma\tau.$$

3. Уравнение (6) допускает точное решение вида

$$u = e^{\lambda t}v(x,t), \quad v(x,t) = v(x, t-\tau),$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а $v(x,t)$ — $\tau-$периодическое решение линейной задачи для уравнения переноса:

$$v_t + av_x = bv, \quad v(x,t) = v(x,t-\tau), \tag{8}$$

где $b = f(e^{-\lambda\tau}) - \lambda.$

Для удобства обозначим общее решение задачи (8) как $v = V_1(x,t;b)$. Оно имеет вид:

$$V_1(x,t;b) = e^{bx/a} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)], \tag{9}$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \gamma = \frac{2\pi n}{a\tau}, \tag{10}$$

где $A_n$, $B_n$ — произвольные постоянные, для которых ряд (9)–(10) и его производные $(V_1)_x$ и $(V_1)_t$ сходятся (сходимость можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = 0$ при $n > N$, где $N$ — произвольное натуральное число).

4. Уравнение (6) допускает также точное решение вида

$$u = e^{\lambda t} v(x,t), \quad v(x,t) = -v(x,t-\tau),$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а $v(x,t)$ — $\tau-$ апериодическое решение линейной задачи для уравнения переноса:

$$v_t + av_x = bv, \quad v(x,t) = -v(x,t-\tau), \tag{11}$$

где $b = f(-e^{-\lambda\tau}) - \lambda$.

Общее решение задачи (11), которое для удобства обозначим $v = V_2(x,t;b)$, имеет вид:

$$V_1(x,t;b) = e^{bx/a} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)], \tag{12}$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}, \quad \gamma = \frac{\pi(2n+1)}{a\tau}, \tag{13}$$

где $A_n$, $B_n$ — произвольные постоянные, для которых ряд (12)–(13) и его производные $(V_2)_x$ и $(V_2)_t$ сходятся (сходимость можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = 0$ при $n > N$, где $N$ — произвольное натуральное число).

**Уравнение 3**. Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x,t-\tau), \tag{14}$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(C_1 e^{bx/a} + \lambda / b)\psi(t),$$

где $C_1$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\psi' = \psi[\lambda + b\ln\psi + f(\bar{\psi}/\psi)], \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

Здесь $\lambda$ — произвольная постоянная.

**Уравнение 4**. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = -bu\ln u + uf(w/u^k), \quad w = u(x,t-\tau), \quad k > 0. \tag{15}$$

1. Уравнение (15) при $b = (\ln k)/\tau$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(Ae^{-bt})\varphi(x),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ

$$a\varphi' + b\varphi\ln\varphi = \varphi f(\varphi^{1-k}).$$

2. Уравнение (15) при $b = (\ln k)/\tau$ допускает другое решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(Axe^{-bt})\psi(t),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$\psi' + \psi[b\ln\psi - f(\bar{\psi}/\psi^k) + Aae^{-bt}] = 0, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 5**. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = f(u-w), \quad w = u(x,t-\tau), \tag{16}$$

где $f(...)$ — произвольная функция.

1. Уравнение (16) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных, линейное по $x$:

$$u = Ax + \psi(t), \tag{17}$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}) - Aa, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau). \tag{18}$$

ОДУ с запаздыванием (18) имеет линейное по $t$ частное решение $\psi(t) = \lambda t + B$, где $B$ — произвольная постоянная, а $\lambda$ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $Aa + \lambda - f(\tau\lambda) = 0$.

2. Уравнение (16) имеет также решение, более общее, чем (17):

$$u = C_1 x + C_2 t + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \tag{19}$$

где $C_1$, $C_2$, $\beta$, $\gamma$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$(a\beta + \gamma)\theta' = f(\theta - \bar{\theta} + C_2\tau) - C_1 a - C_2, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \sigma), \quad \sigma = \gamma\tau.$$

Значениям $C_1 = C_2 = 0$ в (19) соответствует решение типа бегущей волны.

**Уравнение 6**. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u = C_1 e^{bx/a} + \psi(t), \tag{20}$$

которое при $b = 0$ переходит в уравнение (16).

1. Уравнение (20) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_1 e^{bx/a} + \psi(t), \tag{21}$$

где $C_1$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

2. Уравнение (20) допускает также решение, более общее, чем (21):

$$u = C_1 e^{bx/a} + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t,$$

где $C_1$ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$a\varphi' = b\varphi + f(C_1 \tau e^{bx/a}) - C_1 e^{bx/a}.$$

*Теорема 1* (о нелинейной суперпозиции решений). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (20), а функция $v = V_1(x,t;b)$ является любым $\tau -$ периодическим решением линейного уравнения переноса (8). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + V_1(x,t;b)$$

также является решением уравнения (20). Общий вид функции $V_1(x,t;b)$ задается формулами (9)–(10).

**Уравнение 7**. Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = bu + f(u - kw), \quad w = u(x, t - \tau), \quad k > 0, \tag{22}$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = C_1 \exp[ct + (b-c)x/a] + \psi(x), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

где $C_1$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ

$$a\psi' = b\psi + f(\eta), \quad \eta = (1-k)\psi.$$

*Теорема 2* (обобщает теорему 1). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (22), а функция $v = V_1(x,t;b)$ является любым $\tau-$ периодическим решением линейного уравнения переноса (8). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}V_1(x,t;b-c), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

также является решением уравнения (22). Общий вид функции $V_1(x,t;b)$ задается формулами (9)–(10).

**Уравнение 8**. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = bu + f(u + kw), \quad w = u(x,t-\tau), \quad k > 0, \tag{23}$$

которое отличается от уравнения (22) знаком перед параметром $k$ в аргументе кинетической функции. Справедлива следующая теорема.

*Теорема 3*. Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения с запаздыванием (23), а функция $v = V_2(x,t;b)$ — любое $\tau-$ апериодическое решение линейного уравнения переноса (11). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}V_2(x,t;b-c), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

также является решением уравнения (23). Общий вид функции $V_2(x,t;b)$ задается формулами (12)–(13).

**Уравнение 9.** Рассмотрим более сложное нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = uf(u-w) + wg(u-w) + h(u-w), \quad w = u(x,t-\tau), \tag{24}$$

где $f(...)$, $g(...)$, $h(...)$ — произвольные функции (одну из двух функций $f$ или $g$ можно без ограничения общности положить равной нулю).

1. Уравнение (24) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \tag{25}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ удовлетворяют системе ОДУ:

$$a\varphi' = \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)],$$
$$a\psi' = \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - \varphi[1 + \tau g(\tau\varphi)] + h(\tau\varphi).$$

2. Уравнение (24) допускает более сложное, чем (25), решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + t\theta(x) + \xi(x), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

где $N$ — любое натуральное число, а функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$, $\psi_n = \psi_n(x)$, $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(x)$ определяются из системы ОДУ:

$$a\varphi_n' = \varphi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] - \beta_n\psi_n,$$
$$a\psi_n' = \psi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] + \beta_n\varphi_n,$$
$$a\theta' = \theta[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)],$$
$$a\xi' = \xi[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] - \theta[1 + \tau g(\tau\theta)] + h(\tau\theta).$$

Отметим, что третье нелинейное ОДУ допускает тривиальное решение $\theta = 0$: в этом случае остальные уравнения становятся линейными ОДУ с постоянными коэффициентами.

**Уравнение 10.** Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием, которое обобщает уравнение (22):

$$\begin{gathered} u_t + au_x = uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \\ w = u(x, t - \tau), \quad k > 0. \end{gathered} \tag{26}$$

1. Уравнение (26) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct}\varphi(x) + \psi(x), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k, \tag{27}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ удовлетворяют системе ОДУ:

$$a\varphi' = \varphi[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c], \quad \eta = (1 - k)\psi,$$
$$a\psi' = \psi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta).$$

2. Уравнение (26) допускает более сложное, чем (27), решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct}\left\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)]\right\} + \xi(x),$$

$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

где $N$ — любое натуральное число, а функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$, $\psi_n = \psi_n(x)$, $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(x)$ определяются из системы ОДУ:

$$a\varphi_n' = \varphi_n[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c] - \beta_n\psi_n, \quad \eta = (1-k)\xi,$$

$$a\psi_n' = \psi_n[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c] + \beta_n\varphi_n,$$

$$a\theta' = \theta[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c],$$

$$a\xi' = \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta).$$

**Уравнение 11.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = uf(u+kw) + wg(u+kw) + h(u+kw), \quad w = u(x, t-\tau), \quad k > 0, \tag{28}$$

которое обобщает уравнение (23), допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + \xi(x),$$

$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau},$$

где $N$ — любое натуральное число, а функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$, $\psi_n = \psi_n(x)$ и $\xi = \xi(x)$ определяются из системы ОДУ:

$$a\varphi_n' = \varphi_n[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c] - \beta_n\psi_n, \quad \eta = (1+k)\xi,$$

$$a\psi_n' = \psi_n[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c] + \beta_n\varphi_n,$$

$$a\xi' = \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta).$$

**Уравнение 12.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{29}$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t),$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$, $\psi_n = \psi_n(x)$ определяются из системы ОДУ:

$$a\varphi_n' = \varphi_n f(\eta) - (-1)^n \psi_n g(\eta) - \beta_n \psi_n, \quad \eta = \varphi_n^2 + \psi_n^2,$$
$$a\psi_n' = \psi_n f(\eta) + (-1)^n \varphi_n g(\eta) + \beta_n \varphi_n.$$

**Уравнение 13.** Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au_x = uf(u - kw, w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \quad k \ge 0, \tag{30}$$

где $f(y_1, y_2)$ — произвольная функция двух аргументов.

$$u = U(z), \quad z = \beta x + \lambda t,$$

Уравнение (30) допускает точное решение типа бегущей волны

$$(a\beta + \lambda)U' = Uf(U - kW, W/U), \quad W = U(z - \sigma), \quad \sigma = \lambda\tau. \tag{31}$$

Уравнение (31) при $\beta = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{\gamma} f\left(0, \dfrac{1}{k}\right) - \lambda\right]$ имеет частное решение

$$U(z) = C_1 e^{\gamma z}, \quad \gamma = \frac{1}{\sigma}\ln k.$$

**Точные аналитические решения уравнений переноса с запаздыванием и переменным по *x* коэффициентом переноса.**

**Уравнение 14.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)u_x = b(x) f(u - w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{32}$$

коэффициенты которого зависят от $x$, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных в замкнутом виде:

$$u = t + \int \left( \frac{1}{a(x)} \left[ f(\tau) b(x) - 1 \right] \right) dx.$$

**Уравнение 15.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)u_x = b(x)uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{33}$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ

$$a(x)\varphi' + [\lambda - b(x) f(e^{-\lambda\tau})]\varphi = 0.$$

**Уравнение 16.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)u_x = b(x)u + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{34}$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ и нелинейным ОДУ с запаздыванием:

$$\begin{gathered} a(x)\varphi'(x) + [\lambda - b(x)]\varphi(x) = 0, \\ \psi' = \psi[\lambda + f(\bar{\psi}/\psi)], \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau), \end{gathered} \tag{35}$$

$\lambda$ — произвольная постоянная.

Нелинейное ОДУ с запаздыванием (35) допускает частные решения вида $\psi = Ae^{\beta t}$, где $A$ — произвольная постоянная, $\beta$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta = \lambda + f\left(e^{-\beta\tau}\right)$.

**Уравнение 17.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием, которое имеет достаточно общий вид:

$$u_t + a(x)u_x = b(x)f(u, w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{36}$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \int\left(\frac{b(x)-1}{a(x)}\right)dx,$$

где функция $U = U(z)$ определяется из нелинейного ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$U' = f(U, W), \quad W = U(z-\tau).$$

**Уравнение 18.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)u_x = uf(x, u-w) + g(x, u-w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{37}$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \varphi(x)t + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ первого порядка

$$\begin{gathered} a(x)\varphi'(x) = \varphi(x)f\left(x, \tau\varphi(x)\right), \\ a(x)\psi'(x) = \psi(x)f\left(x, \tau\varphi(x)\right) + g\left(x, \tau\varphi(x)\right) - \varphi(x). \end{gathered}$$

**Точные аналитические решения уравнений переноса с запаздыванием и зависящим от искомой функции *u* коэффициентом переноса.**

**Уравнение 19.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + (a_1 u + a_0) u_x = b_1 u + b_2 w, \quad w = u(x, t - \tau), \tag{38}$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t) x,$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\psi_1' = -a_1 \psi_1 \psi_2 - a_0 \psi_2 + b_1 \psi_1 + b_2 \bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau),$$
$$\psi_2' = -a_1 \psi_2^2 + b_1 \psi_2 + b_2 \bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau).$$

**Уравнение 20.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + (a_1 u + a_0) u_x = k u^2 + b_1 u + b_2 w, \quad w = u(x, t - \tau), \tag{39}$$

допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t) \exp(kx / a_1),$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\psi_1' = b_1 \psi_1 + k \psi_1^2 + b_2 \bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t - \tau),$$
$$\psi_2' = \left( b_1 - \frac{a_0 k}{a_1} \right) \psi_2 + k \psi_1 \psi_2 + b_2 \bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t - \tau).$$

**Уравнение 21.** Нелинейное уравнение переноса со степенными нелинейностями и запаздыванием

$$u_t + a u^n u_x = b u^{n+1} + c u + k u^{1-n} + m u^{1-n} w^n, \quad w = u(x, t - \tau), \tag{40}$$

которое зависит от шести параметров, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \left[ \varphi(t) \exp(bnx / a) + \psi(t) \right]^{1/n},$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = kn + cn\psi + bn\psi^2 + mn\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau),$$
$$\varphi' = cn\varphi + bn\varphi\psi + mn\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(t - \tau).$$

**Уравнение 22.** Нелинейное уравнение переноса с экспоненциальными нелинейностями и запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = be^{\lambda u} + c + ke^{-\lambda u} + me^{\lambda(w-u)}, \quad w = u(x, t-\tau), \qquad (41)$$

которое зависит от шести параметров, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln[A\exp(\beta t + b\lambda x / a) - \gamma], \quad \gamma = \frac{1}{2b}(c + m \pm \sqrt{(c+m)^2 - 4bk}),$$

где $A$ — произвольная постоянная, $\beta$ — корень трансцендентного уравнения $\beta - m\lambda e^{-\beta\tau} = (c - b\gamma)\lambda$.

**Уравнение 23.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^{-1/2}u_x = bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}), \quad w = u(x, t-\tau), \qquad (42)$$

которое зависит от произвольной функции $f(...)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2,$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} 2a\varphi' &= b\varphi - 2\varphi^2, \\ 2a\psi' &= b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi). \end{aligned} \qquad (43)$$

Уравнение (43) является уравнением Бернулли и имеет решение

$$\varphi = b(Ae^{-\frac{b}{2a}x} + 2)^{-1},$$

где $A$ — произвольная постоянная.

**Уравнение 24.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \qquad (44)$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = k(bx/a + A)^{1/k}\psi(t),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).$$

**Уравнение 25.** Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau). \qquad (45)$$

1. Уравнение (45) допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = \lambda\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau),$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет ОДУ Бернулли

$$a\varphi' = b\varphi - \lambda\varphi^{k+1}. \tag{46}$$

Здесь $\lambda$ — произвольная постоянная.

ОДУ Бернулли (46) имеет общее решение

$$\varphi = b^{-\frac{1}{k}}[\lambda + A\exp(bkx/a)]^{\frac{1}{k}},$$

где $A$ — произвольная постоянная.

2. Уравнение (45) допускает другое точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(bx/a)\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau). \tag{47}$$

3. Уравнение (45) допускает еще одно точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp(b(k+1)x/a)^{\frac{1}{k+1}}\psi(t),$$

где $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием (47).

**Уравнение 26.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{k-n+1} + u^{1-n} f(u^n - w^n), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{48}$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \left[A + \frac{bn}{a}x + \psi(t)\right]^{\frac{1}{n}},$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = nf(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 27.** Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = f(u-w), \quad w = u(x,t-\tau). \tag{49}$$

1. Уравнение (49) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax+B) + \psi(t),$$

где $A$ и $B$ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}) - \frac{aA}{\lambda}e^{\lambda\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

2. Уравнение (49) допускает также точное решение вида

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax+B) + \theta(z), \quad z = C + t + \frac{1}{A}\ln(Ax+B),$$

где $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с запаздыванием

$$(1+ae^{\lambda\theta})\theta' = f(\theta - \bar{\theta}) - \frac{aA}{\lambda}e^{\lambda\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta(z-\tau).$$

**Уравнение 28.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = be^{\lambda u} + f(u-w) \quad w = u(x,t-\tau), \tag{50}$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{b}{a}x + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 29.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = be^{(\lambda-\gamma)u} + e^{-\gamma u}f(e^{\gamma u} - e^{\gamma w}) \quad w = u(x,t-\tau), \tag{51}$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\gamma}\ln\left[\frac{b\gamma}{a}x + \psi(t)\right],$$

где функция $\psi=\psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$\psi'=\gamma f(\psi-\bar{\psi}),\quad \bar{\psi}=\psi(t-\tau).$$

**Уравнение 30.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t+(a\ln u+b)u_x=cu\ln u+uf(w/u),\quad w=u(x,t-\tau),\qquad (52)$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u=e^{cx/a}\psi(t),$$

где $\psi=\psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с запаздыванием

$$\psi'=\psi[f(\bar{\psi}/\psi)-bc/a],\quad \bar{\psi}=\psi(t-\tau).$$

**Уравнение 31.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t+f'(u)u_x=a_1f(u)+a_2f(w)+a_3+b\frac{\left[f(u)-f(w)\right]}{f'(u)},\qquad (53)$$
$$w=u(x,t-\tau),$$

где $f(...)$ — произвольная функция, допускает точное решение в неявном виде

$$f(u)=Ae^{\beta x+\lambda t}-\frac{a_3}{a_1+a_2},\quad \beta=a_1+a_2e^{-\lambda\tau},$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ определяется из трансцендентного уравнения $\lambda-b+be^{-\lambda\tau}=0.$

**Уравнение 32.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t+f'(u)u_x=a[f(u)-f(w)]+\frac{\left[b_1f(u)+b_2f(w)+b_3\right]}{f'(u)},\qquad (54)$$
$$w=u(x,t-\tau),$$

допускает точное решение в неявном виде

$$f(u)=Ae^{\beta x+\lambda t}-\frac{b_3}{b_1+b_2},\quad \beta=a(1-e^{-\lambda\tau}),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ определяется из трансцендентного уравнения $\lambda-b_1-b_2e^{-\lambda\tau}=0.$

**Уравнение 33.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t+au^{-1/2}u_x=f(u^{1/2}-w^{1/2})+u^{1/2}g(u^{1/2}-w^{1/2}),\quad w=u(x,t-\tau),\qquad (55)$$

где $f(...)$ и $g(...)$ — произвольные функции, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ определяются из системы ОДУ

$$2a\varphi' = \varphi g[\tau\varphi] - 2\varphi^2,$$
$$2a\psi' = f[\tau\varphi] + \psi g[\tau\varphi] - 2\varphi\psi.$$

**Уравнение 34.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{56}$$

допускает точное решение вида

$$u = Ae^{\beta x + \lambda t}, \quad \beta = g(e^{-\lambda\tau})/a,$$

где константа $\lambda$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = f(e^{-\lambda\tau})$.

**Уравнение 35.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k}g(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{57}$$

допускает точное решение вида

$$u = (A + \beta x + \lambda t)^{\frac{1}{k+1}}, \quad \beta = \frac{k+1}{a} f(\lambda\tau),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = (1+k)g(\lambda\tau)$.

**Уравнение 36.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = f(u - w) + e^{\lambda u}g(u - w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{58}$$

допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = \theta(z), \quad z = \beta x + \lambda t,$$

где функция $\theta(z)$ определяется из ОДУ с запаздыванием

$$(\lambda + a\beta e^{\lambda\theta})\theta' = f(\theta - \bar{\theta}) + e^{\lambda\theta}g(\theta - \bar{\theta}), \quad \bar{\theta} = \theta(z - \sigma), \quad \sigma = \lambda\tau.$$

**Уравнение 37.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u}u_x = f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u}g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{59}$$

допускает точное решение вида

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(A + \gamma x + \beta t), \quad \gamma = \frac{\lambda}{a} f(\beta\tau),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а $\beta$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta = \lambda g(\beta\tau)$.

**Уравнение 38.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + [ag(u)+b]u_x = \frac{c_1 g(u) + c_2 g(w) + f[g(u) - g(w)]}{g'(u)}, \quad w = u(x, t-\tau), \tag{60}$$

где $f(...)$ и $g(...)$ — произвольные функции, допускает точное решение в неявном виде

$$g(u) = \frac{c_1 + c_2}{a} x + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = c_2(\bar{\psi} - \psi) - \frac{b(c_1 + c_2)}{a} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 39.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)u^k u_x = b(x)u^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{61}$$

имеет точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \exp\left( \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 40.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)e^{\lambda u} u_x = b(x)e^{\lambda u} + f(u-w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{62}$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 41.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + af'(u)u_x = g[f(u) - f(w)] + \frac{h[f(u) - f(w)]}{f'(u)}, \quad w = u(x, t-\tau), \tag{63}$$

где $f(...)$, $g(...)$ и $h(...)$ — произвольные функции, допускает точное решение в неявном виде

$$f(u) = A + \frac{g(\lambda\tau)}{a}x + \lambda t,$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ удовлетворяет алгебраическому (трансцендентному) уравнению $\lambda = h(\lambda\tau)$.

**Уравнение 42.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + af'(u)u_x = f(u)g\left(\frac{f(w)}{f(u)}\right) + \frac{f(u)}{f'(u)}h\left(\frac{f(w)}{f(u)}\right), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{64}$$

допускает точное решение в неявном виде

$$f(u) = A\exp\left(\frac{g(e^{-\lambda\tau})}{a}x + \lambda t\right),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а $\lambda$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = h(e^{-\lambda\tau})$.

**Уравнение 43.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + g(u)u_x = \frac{1}{f'(u)}\big(bg(u) + h[f(u) - f(w)]\big), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{65}$$

допускает точное решение в неявном виде

$$f(u) = bx + \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi' = h(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

**Уравнение 44.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x)f'(u)u_x = b(x)g[f(u) - f(w)] + \frac{h[f(u) - f(w)]}{f'(u)}, \quad w = u(x, t-\tau), \tag{66}$$

допускает точное решение в неявном виде

$$f(u) = A + g(\lambda\tau)\int \frac{b(x)}{a(x)}dx + \lambda t,$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = h(\lambda\tau)$.

**Уравнение 45.** Нелинейное уравнение переноса с запаздыванием

$$u_t + a(x) f'(u) u_x = b(x) f(u) g\left(\frac{f(w)}{f(u)}\right) + \frac{f(u)}{f'(u)} h\left(\frac{f(w)}{f(u)}\right), \qquad (67)$$
$$w = u(x, t-\tau),$$

допускает точное решение в неявном виде

$$f(u) = A\exp\left(g(e^{-\lambda\tau})\int\frac{b(x)}{a(x)}dx + \lambda t\right),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а константа $\lambda$ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = h(e^{-\lambda\tau})$.

**Выводы.** Рассмотрено сорок пять нелинейных уравнений переноса с запаздыванием, в том числе восемнадцать уравнений с постоянным коэффициентом переноса и двадцать семь уравнений с коэффициентом переноса, зависящим от искомой функции. Все уравнения содержат свободные параметры и/или произвольные функции. Получены новые точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Для трех уравнений с постоянным коэффициентом переноса сформулированы теоремы о размножении решений. Все решения выражаются в элементарных функциях, либо через неопределенные интегралы, либо через решения обыкновенных уравнений с запаздыванием или без него, либо через решения уравнений в частных производных без запаздывания. Результаты работы могут быть полезны для анализа рассматриваемых и родственных нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, а также для тестирования численных и приближенных аналитических методов интегрирования таких уравнений.

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к статье и полезные замечания.

*Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Singh P., Sharma K.K. Numerical solution of first-order hyperbolic partial differential-difference equation with shift. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2010, vol. 26, pp. 107–116.

[2] Singh P., Sharma K.K. *Finite difference approximations for the first-order hyperbolic partial differential equation with point-wise delay*. arXiv.org, 2022. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1012.0974

[3] Karthick S., Mahendran R., Subburayan V. Method of lines and Runge–Kutta method for solving delayed one dimensional transport equation. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 2023, vol. 28, pp. 270–280.

[4] Sharma K.K., Singh P. Hyperbolic partial differential-difference equation in the mathematical modeling of neuronal firing and its numerical solution. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 201, pp. 229–238.

[5] Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2015, vol. 471, art. no. 20140947. DOI: http://doi.org/10.1098/rspa.2014.0947

[6] Rey A.D., Mackey M.C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation. *Chaos*, 1992, vol. 2, p. 231–244.

[7] Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication. *Journal of Mathematical Biology*, 1994, vol. 33, pp. 89–109.

[8] Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, vol. 32, pp. 2011–2026.

[9] Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes. *Journal of Mathematical Biology*, 1999, vol. 38, pp. 195–219.

[10] Rhee H.-K., Aris R., Amundson N.R. *First-order partial differential equations, Vol. 1. Theory and application of single equations*. Mineola, New York, Dover Publications, 1986, 543 p.

[11] Rhee H.-K., Aris R., Amundson N. R. *First-order partial differential equations, Vol. 2. Theory and application of hyperbolic systems of quasilinear equations*. Mineola, New York, Dover Publications, 1989, 544 p.

[12] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И. *Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели*. Москва, ИПМех РАН, 2022, 463 с.

[13] Kamont Z., Przadka K. Difference methods for first order partial differen-tial-functional equations with initial-boundary conditions. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991, vol. 31, pp. 1476–1488.

[14] Sampath K., Veerasamy S., Agarwal R.P. Stable difference schemes with interpolation for delayed one-dimensional transport equation. *Symmetry*, 2022, 14 (5), art. no. 1046. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14051046

[15] Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 289, pp. 322–330.

[16] Пименов В.Г. *Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью*. Екатеринбург, Изд-во Уральского университета, 2014, 134 с.

[17] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 338, pp. 448–466. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.04.016

[18] Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein—Gordon equation with a delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270. DOI: 10.1002/mma.3769

[19] Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 378, art. no. 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193

[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 417–430. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.07.017

[21] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 6, pp. 267–277. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.09.008

[22] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 4, с. 53–73.

[23] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа. *Вестник НИЯУ «МИФИ»,* 2020, т. 9, № 4, с. 315–328.

[24] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416. DOI: 10.1016/j.cnsns.2013.07.019

[25] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein—Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689. DOI: 10.1016/j.cnsns.2013.12.021

[26] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Applied Mathematics Letters,* 2014, vol. 37, pp. 43–48. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.05.010

[27] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16–22. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.008

[28] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания. *Вестник НИЯУ «МИФИ»,* 2020, т. 9, № 2, с. 115–128.

[29] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021, vol. 9, art. no. 511. DOI: https://doi.org/10.3390/math9050511

[30] Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, vol. 494, art. no. 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619

[31] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 95, art. no. 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634

[32] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays. *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. no. 516. DOI: https://doi.org/10.3390/math11030516

[33] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. no. 3111. DOI: https://doi.org/10.3390/math11143111

[34] Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, pp. 4978–4987. DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.05.031

[35] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed*. Boca Raton, CRC Press, 2012, 1912 p.

Статья поступила в редакцию 15.04.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Сорокин В.Г. Аналитические решения нелинейных уравнений с запаздыванием, используемых при математическом моделировании процессов переноса. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 140–167.

**Сорокин Всеволод Григорьевич —** канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. e-mail: vsesor@gmail.com

# Analytical solutions of nonlinear transport equations with delay

© V.G. Sorokin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

*Nonlinear transport equations with constant delay are considered. The introduction provides a brief overview of publications that study transport mathematical models with delay and develop numerical methods for solving the corresponding problems. The main sections of the article describe more than forty transport equations with constant delay and various transfer coefficients, which allow exact analytical solutions. The kinetic functions of all considered equations contain free parameters or arbitrary functions. Additive, multiplicative, generalized, and functional separable solutions, as well as traveling-wave and self-similar solutions are obtained. Many solutions are expressed in terms of elementary functions. For some types of equations, theorems on the "multiplication" of solutions are formulated. The described equations and their solutions can be used to evaluate the accuracy of numerical methods for integrating the corresponding nonlinear transport problems with delay.*

***Keywords:*** *nonlinear transport equations with delay, delay partial differential equations, analytical solutions, generalized and functional separable solutions, self-similar solutions*

REFERENCES

[1] Singh P., Sharma K.K. Numerical solution of first-order hyperbolic partial differential-difference equation with shift. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2010, vol. 26, pp. 107–116.
[2] Singh P., Sharma K.K. *Finite difference approximations for the first-order hyperbolic partial differential equation with point-wise delay*. arXiv.org, 2022. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1012.0974
[3] Karthick S., Mahendran R., Subburayan V. Method of lines and Runge–Kutta method for solving delayed one dimensional transport equation. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 2023, vol. 28, pp. 270–280.
[4] Sharma K.K., Singh P. Hyperbolic partial differential-difference equation in the mathematical modeling of neuronal firing and its numerical solution. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 201, pp. 229–238.
[5] Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2015, vol. 471, art. no. 20140947. DOI: http://doi.org/10.1098/rspa.2014.0947

[6] Rey A.D., Mackey M.C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation. *Chaos*, 1992, vol. 2, p. 231–244.
[7] Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication. *Journal of Mathematical Biology*, 1994, vol. 33, pp. 89–109.
[8] Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, vol. 32, pp. 2011–2026.
[9] Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes. *Journal of Mathematical Biology*, 1999, vol. 38, pp. 195–219.
[10] Rhee H.-K., Aris R., Amundson N.R. *First-order partial differential equations, Vol. 1. Theory and application of single equations*. Mineola, New York, Dover Publications, 1986, 543 p.
[11] Rhee H.-K., Aris R., Amundson N. R. *First-order partial differential equations, Vol. 2. Theory and application of hyperbolic systems of quasilinear equations*. Mineola, New York, Dover Publications, 1989, 544 p.
[12] Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Differencial'nye uravnenija s zapazdyvaniem: Svojstva, metody, reshenija i modeli* [Delay differential equations: properties, methods, solutions and models]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2022, 463 p.
[13] Kamont Z., Przadka K. Difference methods for first order partial differen-tial-functional equations with initial-boundary conditions. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991, vol. 31, pp. 1476–1488.
[14] Sampath K., Veerasamy S., Agarwal R.P. Stable difference schemes with interpolation for delayed one-dimensional transport equation. *Symmetry*, 2022, 14 (5), art. no. 1046. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14051046
[15] Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 289, pp. 322–330.
[16] Pimenov V.G. *Raznostnye metody reshenija uravnenij v chastnyh proizvodnyh s nasledstvennost'ju* [Difference methods for solving partial differential equations with heredity]. Ekaterinburg, Ural University Publ., 2014, 134 p.
[17] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 338, pp. 448–466. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.04.016
[18] Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein—Gordon equation with a delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270. DOI: 10.1002/mma.3769
[19] Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 378, art. no. 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193
[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 417–430. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.07.017
[21] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 6, pp. 267–277. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.09.008
[22] Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type: exact solutions and global instability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 53–73.

[23] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of nonlinear partial differential equations with pantograph type variable delay. *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 315–328.

[24] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416. DOI: 10.1016/j.cnsns.2013.07.019

[25] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein—Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689. DOI: 10.1016/j.cnsns.2013.12.021

[26] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Applied Mathematics Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.05.010

[27] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16–22. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.008

[28] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay. *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 115–128.

[29] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021, vol. 9, art. no. 511. DOI: https://doi.org/10.3390/math9050511

[30] Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, vol. 494, art. no. 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619

[31] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 95, art. no. 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634

[32] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays. *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. no. 516. DOI: https://doi.org/10.3390/math11030516

[33] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. no. 3111. DOI: https://doi.org/10.3390/math11143111

[34] Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, pp. 4978–4987. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.05.031

[35] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed*. Boca Raton, CRC Press, 2012, 1912 p.

**Sorokin V.G.,** Cand. Sc. (Phys. — Math.), researcher at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. e-mail: vsesor@gmail.com