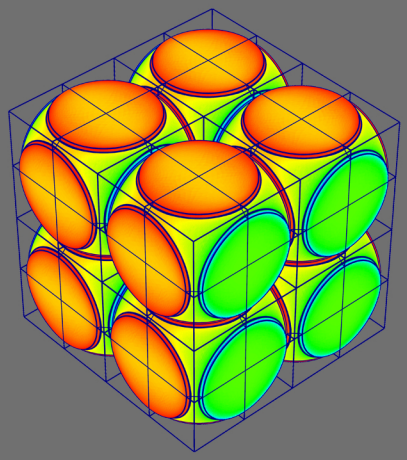
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Иванов М.Ю., Бушуев А.Ю., Щербаков Н.С., Реш Г.Ф. Компьютерное моделирование динамических процессов в гидравлическом стабилизаторе расхода и его оптимизация на основе эволюционного алгоритма. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 3, с. 100-119.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/350/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
08.11.2026 21:28:26

УДК 519.6:621.646.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-3-100119

# Компьютерное моделирование динамических процессов в гидравлическом стабилизаторе расхода и его оптимизация на основе эволюционного алгоритма

© М.Ю. Иванов[1,2], А.Ю. Бушуев[2], Н.С. Щербаков[1,2], Г.Ф. Реш[1]

[1]АО «ВПК «НПО машиностроения»,
Реутов, Московская область, 143960, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В различных технических системах для обеспечения синхронного перемещения исполнительных органов широко применяются гидравлические устройства — нерегулируемые дроссели, делители потока, регуляторы и/или стабилизаторы расхода. Последние характеризуются тем, что их функционирование происходит в диапазоне перепадов давлений жидкости, составляющем несколько сотен атмосфер. Рассмотрены вопросы, связанные с численным моделированием нестационарных физических процессов в стабилизаторе расхода, конструкция которого защищена патентом Российской Федерации на изобретение. Представлены результаты компьютерного моделирования на основе теоретической модели с сосредоточенными параметрами, использования конечно-разностного неявного метода Гира для решения системы жёстких дифференциальных уравнений. Сформулирована и решена задача оптимального усовершенствования конструкции такого стабилизатора расхода в соответствии с выбранным критерием. Этим критерием оптимизации является обеспечение условия минимально возможного положительного статизма расходно-перепадной (статической) характеристики в условиях широкого изменения перепада давления на устройстве и воздействия осевой составляющей гидродинамической силы. Задача оптимального усовершенствования конструкции решалась с применением одного из широко используемых эволюционных алгоритмов оптимизации — генетического алгоритма с вещественным кодированием. Результаты вычислительных экспериментов при моделировании физических процессов задачи анализа соответствуют имеющимся экспериментальным данным, которые ранее получены авторами работы. Показано, что усовершенствование существующей конструкции стабилизатора расхода возможно — угол наклона расходно-перепадной характеристики к горизонтальной оси уменьшился практически в два раза. При этом удалось получить более высокую точность поддержания объёмного расхода жидкости. Эта точность составляет порядка ±7,5 % от номинального (настроечного) значения стабилизатора расхода. Для сравнения, точность поддержания объёмного расхода жидкости до выполнения процедуры оптимизации составляла порядка ±10 %.*

***Ключевые слова:*** *математическое моделирование, оптимизация, жёсткие системы дифференциальных уравнений, метод Гира, генетический алгоритм с вещественным кодированием, стабилизатор расхода, гидродинамическая сила, статическая характеристика*

**Введение.** Стабилизаторы расхода широко применяются в гидравлических системах — гидромашинах и гидроприводах [1–4], системах топливоподачи [5, 6], а также при решении задач синхронизации движения исполнительных органов различного назначения с помощью

гидравлических методов [7], в том числе в аэрокосмической технике [8, 9]. Актуальным является вопрос создания динамических математических и компьютерных моделей таких гидравлических устройств, обладающих высоким уровнем адекватности и позволяющих обеспечить замену физических испытаний виртуальным моделированием [10–12].

Рассматривается стабилизатор расхода, конструкция которого защищена патентом Российской Федерации на изобретение [13]. Как отмечается в патенте, особенностями устройства являются его компактность, несмотря на широкий ( ~ 30 МПа ) диапазон перепадов давлений, реализующихся на нём; наличие золотника, который разгружен от воздействия радиальной составляющей гидродинамической силы; достаточно высокой (±10 %) точностью поддержания объёмного расхода жидкости в указанном диапазоне перепадов давления. Однако, предлагаемая конструкция не является оптимальной с точки зрения обеспечения более высокой точности поддержания расхода.

Цель работы — исследование возможности усовершенствования существующей запатентованной конструкции стабилизатора расхода, что обеспечивало бы более высокую точность поддержания объёмного расхода жидкости (менее ±10 % от номинального значения) в условиях широкого изменения перепада давления ( ~ 30 МПа ) на устройстве и воздействия осевой составляющей гидродинамической силы на его чувствительный элемент (золотник).

Для достижения указанной цели решены следующие задачи:

1. проанализированы особенности функционирования и характер расходно-перепадной (статической) характеристики существующего гидравлического стабилизатора расхода;

2. сформулирована задача оптимального усовершенствования конструкции существующего стабилизатора расхода для минимизации положительного статизма его расходно-перепадной характеристики (далее задача оптимизации стабилизатора расхода);

3. создана динамическая математическая модель с сосредоточенными параметрами для описания физических процессов, происходящих в стабилизаторе расхода, и численного решения задачи анализа;

4. на основе эвристического оптимизационного алгоритма выполнено численное решение задачи оптимизации стабилизатора расхода.

**Анализ конструктивной схемы и статической характеристики стабилизатора расхода.** Объектом математического моделирования является гидравлический стабилизатор расхода, конструктивная схема которого представлена на рис. 1.

На рис. 1 обозначены следующие элементы: 1 — разъёмный корпус (деталь 1), 2 — гильза, 3 — острая кромка золотника, 4 — окна, 5 — пазы, 6 — стержень, 7 — калиброванный дроссель, 8 — разъёмный корпус (деталь 2), 9 — штуцер выхода, 10 — пружина, 11 —

отверстия круглого сечения, 12 — кольцевой канал, 13 — золотник, 14 — штуцер входа.

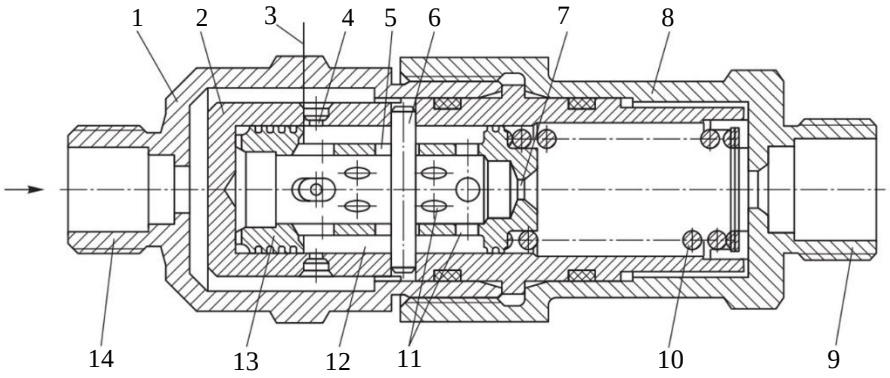



**Рис. 1.** Конструктивная схема стабилизатора расхода

Как отмечается в работе [10], стабилизатор расхода жидкости функционирует следующим образом. Устройство имеет два последовательно расположенных дросселирующих сечения, из которых первое сечение (калиброванное 7) является нерегулируемым. Золотниковая пара, окна 4 гильзы 2 и острая кромка 3 золотника 13, является вторым дросселирующим сечением, регулирующим расход жидкости в зависимости от перепада давления на стабилизаторе расхода. При отсутствии гидродинамической силы и силы трения (идеальный стабилизатор расхода) принцип функционирования определяется соотношением силы, создаваемой перепадом давления на калиброванном дросселе 7, и силы на золотнике 13, создаваемой пружиной 10. Если перепад давления на стабилизаторе расхода повышается, то расход жидкости через него отклоняется от настроечного значения (расход увеличивается), и, следовательно, увеличиваются перепады давлений на калиброванном дросселе 7 и золотнике 13. Вследствие этого золотник 13 перемещается, сжимая пружину 10 и перекрывая острой кромкой 3 окна 4, уменьшая их проходное сечение, при этом расход жидкости снижается до настроечного значения. При снижении перепада давления стабилизатор расхода восстанавливает настроечное значение расхода жидкости в соответствии с принципом действия, приведённым ранее.

В результате выполненных экспериментальных исследований установлено, что устройство обладает выраженным положительным статизмом расходно-перепадной характеристики — функциональной зависимостью объёмного расхода жидкости $Q$ от перепада давления $\Delta p$ на стабилизаторе расхода. Угол наклона графика этой функциональной зависимости к горизонтальной оси составляет ~ 29°. При этом точность поддержания объёмного расхода находится в диапазоне

±10 % от номинального (настроечного) значения 0,8 л/с. Из опыта создания стабилизаторов расхода известно, что статизм их характеристики обусловлен в основном характером функциональной зависимости осевой составляющей гидродинамической силы от линейного перемещения золотника [5, 11]. Такая зависимость для существующего устройства уже определена по результатам натурных испытаний, график зависимости её осевой составляющей от перемещения золотника представлен на рис. 2 [10].

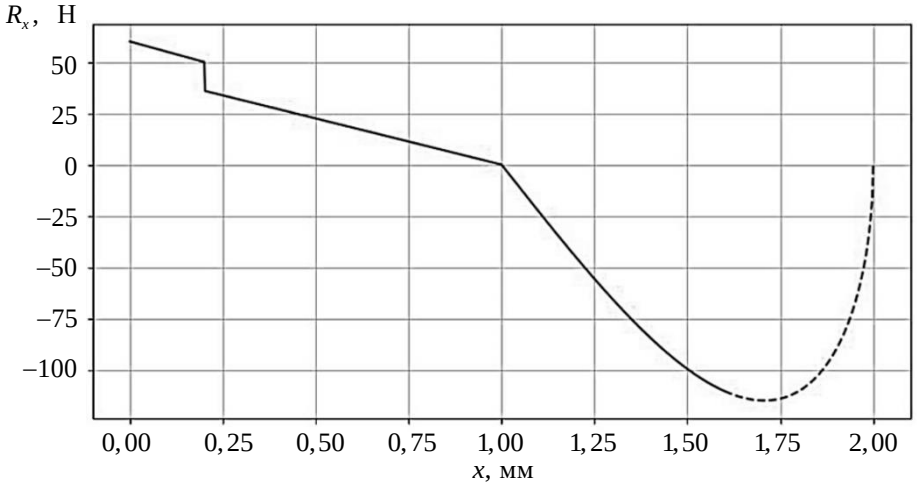



**Рис. 2.** График зависимости осевой составляющей гидродинамической силы от перемещения золотника
(сплошная линия на графике — эмпирические значения,
пунктирная линия — прогнозируемые теоретические значения)

В результате анализа конструктивной схемы стабилизатора расхода получена уточнённая аналитическая зависимость осевой составляющей гидродинамической силы $R_x$ от смещения золотника $x$ относительно его положения равновесия, которая аппроксимируется следующей формулой:

$$R_x(x)=\begin{cases}10(6-5x),\ x\in[0;0{,}1d_1],\\ 339-1445x,\ x\in(0{,}1d_1;0{,}105d_1],\\ 45(1-x),\ x\in(0{,}105d_1;0{,}5d_1],\\ 230(1-x)\sqrt{x(d_1-x)},\ x\in(0{,}5d_1;d_1],\end{cases} \tag{1}$$

где $d_1$ — диаметр регулируемого дросселирующего сечения (диаметр окна 4 на рис. 1). В формуле (1) значения перемещения $x$ и диаметра регулируемого дросселирующего сечения $d_1$ задаются в миллиметрах.

Для новых проектируемых вариантов конструкции стабилизатора расхода подобная зависимость $R_x(x)$ устанавливается с помощью трёхмерного компьютерного моделирования движения жидкости во внутренних полостях устройства [14, 15].

**Анализ существования решения задачи оптимизации.** Для того чтобы сформулировать задачу оптимизации стабилизатора расхода, необходимо проанализировать характер изменения его расходно-перепадной характеристики при различных вариантах варьируемых (управляемых) параметров [16].

Статическая модель устройства представляет собой систему из двух нелинейных алгебраических уравнений относительно объёмного расхода $Q$ и перепада давления $\Delta p$ при значениях перемещения $x \in [0; d_1]$:

$$\begin{aligned} \Delta p(x) &= C_\mu \left(F_0 + k_{пр} x - R_x\right) \big/ S_{эфф}, \\ Q(x) &= \mu_3 f_3 \left[2\left(F_0 + k_{пр} x - R_x\right) \big/ \left(\rho S_{эфф}\right)\right]^{0,5}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$C_\mu = 1 + \left(\mu_3 f_3\right)^2 \left[\left(\mu_1 f_1\right)^{-2} + \left(\mu_2 f_2\right)^{-2} + \left(\mu_4 f_4\right)^{-2}\right],$$

здесь $\mu_i$ — коэффициент расхода $i$-го дросселирующего сечения, $i = \overline{1,4}$, $f_1$ — суммарная площадь золотниковых окон гильзы

$$f_1 = \left(n_{др} d_1^2\right) \big/ 4 \arccos\left((2x)/d_1 - 1\right).$$

Здесь $n_{др}$ — число золотниковых окон в гильзе; $f_2$ — суммарная площадь отверстий перфорированной цилиндрической поверхности золотника; $f_3$, $d_{калиб.др}$ — площадь и диаметр калиброванного дросселя золотника, $f_3 = \pi/4\, d_{калиб.др}^2$; $f_4$, $d_4$ — площадь и диаметр отверстия штуцера выхода стабилизатор расхода, $f_4 = \pi/4\, d_4^2$; $F_0$, $k_{пр}$ — сила начального поджатия и жёсткость пружины; $\rho$ — плотность жидкости; $S_{эфф}$ — эффективная площадь золотника

$$S_{эфф} = \pi/4\left(d_з^2 - d_{калиб.др}^2\right),$$

где $d_3$ — внешний диаметр золотника.

В качестве варьируемых параметров выбраны следующие физические величины: $\mu_i$, $i = \overline{1,4}$, $d_1$, $n_{др}$, $f_2$, $d_{калиб.др}$, $d_4$, $F_0$, $k_{пр}$ и $d_3$.

В процессе изменения значений указанных варьируемых параметров в пределах ±15 % от соответствующих номинальных значений предполагалось, что

- особенности конструкции стабилизатора расхода сохраняются;
- вид функциональной зависимости осевой составляющей гидродинамической силы от линейного перемещения золотника описывается формулой (1).

Использовав программный инструментарий графического калькулятора Desmos [17] и уравнения статической модели (2) показано, что при различных сочетаниях варьируемых параметров возможно получить расходно-перепадные характеристики как с положительным, так и с отрицательным статизмом. Тогда, очевидно, должно существовать и промежуточное решение — характеристика с минимальным положительным статизмом, которую требовалось определить. Для решения задачи оптимизации использована динамическая модель функционирования устройства и эволюционный алгоритм оптимизации. Кроме того, выполнен анализ чувствительности каждого из управляемых параметров, варьирование которого приводит к значительным изменениям статизма устройства. Установлено, что наиболее существенными варьируемыми параметрами для задачи оптимизации являются $\mu_i$, $i=1, 3, 4$, $n_{др}$, $d_{калиб.др}$, $d_4$, $F_0$ и $k_{пр}$.

**Формулировка задачи анализа.** Для решения прямой задачи, или задачи анализа, применялась динамическая математическая модель, описывающая физические процессы, происходящие в стабилизаторе расхода. Выбрана нестационарная модель с сосредоточенными параметрами, дифференциальные уравнения которой позволяют прогнозировать характер движения золотника и изменения давления жидкости в различных полостях устройства во времени. Для удобства последующей численной реализации система уравнений математической модели представлялась в векторной форме

$$dy/dt = F(t, y), \tag{3}$$

где $y$ — вектор неизвестных функций, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}^T$, $y_1 = x$, $y_2 = v_x$, $y_3 = p_2$, $y_4 = p_3$, $y_5 = p_4$, $v_x$ — проекция вектора скорости золотника на ось симметрии стабилизатора расхода, $p_2$ — давление жидкости в кольцевом канале, $p_3$ — давление жидкости во внутренней полости золотника, $p_4$ — авление жидкости в пружинной полости, $t$ — время, $F$ — векторная функция правых частей дифференциальных уравнений, для которой

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} F_1(t, y) & F_2(t, y) & F_3(t, y) & F_4(t, y) & F_5(t, y) \end{pmatrix}^T,$$

$$F_1 = v_x,$$

$$F_2 = -2n_{КЗ}v_x - k_{КЧ}^2 x + \left[\left(p_3 - p_4\right)S_{эфф} - F_0 + R_x\right]\Big/M_{экв},$$

$$F_3 = c_{ж}^2\Big/V_2\left[\operatorname{sgn}\left(p_1 - p_2\right)G_1 - \operatorname{sgn}\left(p_2 - p_3\right)G_2\right],$$

$$F_4 = c_{ж}^2\Big/V_3\left[-\rho_3 S_г v_x + \operatorname{sgn}\left(p_2 - p_3\right)G_2 - \operatorname{sgn}\left(p_3 - p_4\right)G_3\right],$$

$$F_5 = c_{ж}^2\Big/V_4\left[\rho_4 S_г v_x + \operatorname{sgn}\left(p_3 - p_4\right)G_3 - \operatorname{sgn}\left(p_4 - p_5\right)G_4\right],$$

где $n_{КЗ}$ — коэффициент затухания,

$$n_{КЗ} = k_{в.тр}^{СР}\Big/\left(2M_{экв}\right),$$

здесь $k_{в.тр}^{СР}$ — коэффициент вязкого трения, $M_{экв}$ — эквивалентная масса золотника, $M_{экв} = M_з + M_{пр}/3$, $M_з$ — масса золотника, $M_{пр}$ — масса пружины, $k_{КЧ}$ — круговая частота собственных колебаний золотника, $k_{КЧ} = \sqrt{k_{пр}/M_{экв}}$, $c_{ж}$ — скорость звука в жидкости, $V_2$ — объём кольцевого канала, $V_3$ — объём внутренней полости золотника, $V_3 = V_3^0 + S_г x$, $V_3^0$ — начальное значение $V_3$, $S_г$ — площадь внутреннего поперечного сечения гильзы, $V_4$ — объём пружинной полости, $V_4 = V_4^0 - S_г x$, $V_4^0$ — начальное значение $V_4$, $p_1$ — давление жидкости на входе стабилизатора расхода, $p_5$ — давление жидкости на выходе стабилизатора расхода, $\rho_i$ — плотность жидкости при давлении $p_i$, $i = \overline{1,4}$,

$$\rho_i = \rho_i^0 + \left(p_i - p_i^0\right)\Big/c_{ж}^2,$$

где $\rho_i^0$ — начальное значение плотности жидкости, $p_i^0$ — начальное значение давления жидкости, $G_i$ — массовый расход жидкости через $i$-е дросселирующее сечение.

Массовый расход жидкости $G_i$ определялся по формуле

$$G_i = \mu_i f_i\sqrt{2\rho_i\left|p_i - p_{i+1}\right|},\ i = \overline{1,4},$$

$$\operatorname{sgn}\left(p_i - p_{i+1}\right) = 1,\ \text{если}\ p_i \geq p_{i+1},$$

$$\operatorname{sgn}\left(p_i - p_{i+1}\right) = -1,\ \text{если}\ p_i < p_{i+1}.$$

Система уравнений (3) дополнялась начальными условиями на неизвестные функции, граничными условиями, которые задавали пределы линейного перемещения золотника, и неравенством, определявшим момент начала движения золотника (условием страгивания).

**Численный метод решения задачи анализа.** Особенностью математических моделей гидравлических устройств с изменяемыми внутренними полостями является их свойство жёсткости [18–20]. В связи с этим численное моделирование выполнено с применением неявного метода Гира, который основан на принципе «предиктор – корректор» [21–23]. Важным свойством метода Гира является его способность контролировать ошибку интегрирования на каждой итерации. В зависимости от величины ошибки вычислительный алгоритм изменяет порядок метода Гира $k$, $k=\overline{1,6}$, и шаг интегрирования $h$. Одним из способов эффективной реализации метода Гира является использование векторного формализма Нордсика (без ограничений общности шаги «предиктор» и «корректор» рассматриваются для одной из компонент вектора неизвестных функций системы (3)):

$$Z_n^{k+1}=\left(\begin{array}{ccccc} y_n & hy_n^{(1)} & \frac{h^2}{2!}y_n^{(2)} & \frac{h^3}{3!}y_n^{(3)} & \dots & \frac{h^k}{k!}y_n^{(k)} \end{array}\right)^T, \qquad (4)$$

где $Z_n^{k+1}$ — вектор Нордсика, состоящий из $k+1$ элементов, $n$ — номер итерации, $h$ — шаг интегрирования. Вектор (4) позволяет хранить информацию о решении задачи (3), которая получена на шаге «предиктор» или «корректор», в виде коэффициентов разложения функции $y$ в ряд Тейлора на $n$-м временном шаге интегрирования.

1) Шаг «предиктор»:

$$\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[0]}=P^{k+1}Z_n^{k+1},$$

где $\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[0]}$ — предварительное значение вектора Нордсика на шаге интегрирования $n+1$,

$$\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[0]}=\left(\begin{array}{ccccc} \left(y_{n+1}\right)^{[0]} & h\left(y_{n+1}^{(1)}\right)^{[0]} & \frac{h^2}{2!}\left(y_{n+1}^{(2)}\right)^{[0]} & \dots & \frac{h^k}{k!}\left(y_{n+1}^{(k)}\right)^{[0]} \end{array}\right)^T,$$

$P^{k+1}$ — верхняя треугольная квадратная матрица Паскаля порядка $k+1$,

$$P^{k+1}=\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots & k(k-1)/2! \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & k(k-1)(k-2)/3! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & k(k-1)(k-2)(k-3)/4! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

2) Шаг «корректор»:

$$\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j+1]} = \left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j]} + L_Z\left(\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j]}\right)C_Z,\ \ j = \overline{0, m-1},$$

где $j$ — номер коррекции, $\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j+1]}$, $\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j]}$ — значение вектора Нордсика на шаге интегрирования с номером $n+1$ после $(j+1)$-й и $j$-ой коррекций соответственно, $m$ — количество циклов коррекции на одном шаге интегрирования, $L_z$ — скалярная функция коррекции

$$L_Z\left(\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j]}\right) = \left[E - hb_{-1}J\left(t_{n+1}, \left(y_{n+1}\right)^{[j]}\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times\left[hF\left(t_{n+1}, \left(y_{n+1}\right)^{[j]}\right) - \left(d_{n+1}\right)^{[j]}\right],$$
$$J\left(t_{n+1}, \left(y_{n+1}\right)^{[j]}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(t_{n+1}, \left(y_{n+1}\right)^{[j]}\right),\ \left(d_{n+1}\right)^{[j]} = h\left(y_{n+1}^{(1)}\right)^{[j]},$$

$E$ — единичная матрица порядка 5, $J$ — матрица Якоби [24], вектор $C_Z = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k \end{pmatrix}^T$ и скаляр $b_{-1}$ принимают значения, зависящие от порядка метода Гира.

Итоговый скорректированный вектор Нордсика получается после выполнения $m$ циклов коррекции, поэтому на шаге «корректор» вектор (4) будет иметь следующий вид:

$$\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[m]} = \left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[0]} + \sum_{j=0}^{m-1} L_Z\left(Z_{n+1}^{k+1}\right)^{[j]} C_Z.$$

Для решения системы (3) контроль точности выполняется на каждом шаге интегрирования путём сравнения теоретической погрешности

$$\varepsilon_m = C_k k!\left\|\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\|,$$

в которой

$$\left\|\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i^2},$$
$$\left(\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i = \left(\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i - \left(\left(Z_{n-1}^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i$$

(значение коэффициента $C_k$ определяется порядком метода Гира) с заданной максимально допустимой погрешностью $\varepsilon_{доп}$ на шаге интегрирования. При $\varepsilon_m \le \varepsilon_{доп}$ шаг считается выполненным, иначе

вычисления повторяются с новым шагом $\tilde{h} = \alpha h$, $\alpha < 1$. Для оптимизации порядка метода $k$ и значения $h$ на следующем шаге интегрирования вычисляются три коэффициента $\alpha_i$:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1,2}\left[\frac{\varepsilon_{доп}}{C_k k!\left\|\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\|}\right]^{\frac{1}{k+1}} \quad \text{(порядок метода } k\text{)},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1,3}\left[\frac{\varepsilon_{доп}}{C_{k-1} k!\left\|\nabla^0\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\|}\right]^{\frac{1}{k}},$$

$$\left\|\nabla^0\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i^2} \quad \text{(порядок метода } k-1\text{)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{1,4}\left[\frac{\varepsilon_{доп}}{C_{k+1} k!\left\|\nabla^2\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right\|}\right]^{\frac{1}{k+2}},$$

$$\left(\nabla^2\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i = \left(\nabla^1\left(Z_n^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i - \left(\nabla^1\left(Z_{n-1}^{k+1}\right)_{k+1}\right)_i \quad \text{(порядок метода } k+1\text{)}.$$

Далее вычисляется новый шаг интегрирования по формуле $\hat{h} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} h$ в случае выполнения одного из условий:

1) неравенство $\varepsilon_m \le \varepsilon_{доп}$ нарушается;

2) неравенство $\varepsilon_m \le \varepsilon_{доп}$ выполняется для $k+1$ последовательных шагов после предыдущего изменения порядка метода Гира или величины шага интегрирования.

Преимущества метода Гира состоят в его более высоком быстродействии по сравнению с явными конечно-разностными схемами и устойчивости вычислительного процесса [25]. Быстродействие алгоритма задачи анализа является важным свойством для последующего решения задачи оптимизации, которая многократно запускает алгоритм задачи анализа при различных значениях варьируемых параметров.

**Результаты решения задачи анализа.** С помощью разработанного на языке C++ программного комплекса выполнена верификация метода Гира на тестовом примере, описанном в работе [20]. Сравнение результатов показало, что погрешность не превысила 0,01 %. Кроме того, продемонстрированы результаты валидации математической модели (3) с использованием проливочной характеристики, полученной в работе [10] (рис. 3).

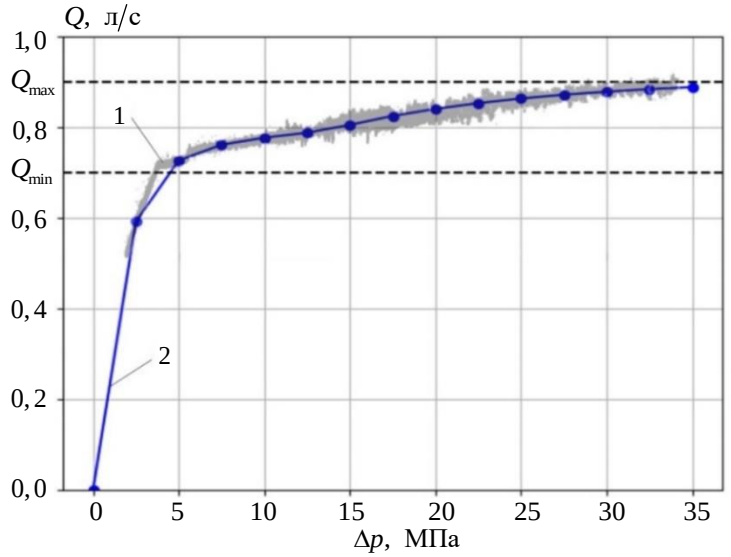



**Рис. 3.** Результаты валидации математической модели задачи анализа: 1 — эмпирические значения, 2 — результаты решения задачи анализа

На рис. 3 показано, что в диапазоне изменения объёмного расхода от $Q_{min}$ до $Q_{max}$ решение задачи анализа качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными. Точки на кривой 2 отображают соответствующие установившиеся значения физических параметров при анализе переходных процессов в стабилизаторе расхода.

Проведена серия вычислительных экспериментов, в результате которых показан характер переходных процессов в стабилизаторе расхода. В качестве примера на рис. 4–6 приводятся графики зависимости некоторых физических параметров от времени: проекции вектора скорости золотника (рис. 4), давления жидкости в различных полостях устройства (рис. 5), объёмного расхода жидкости через дросселирующие сечения (рис. 6).

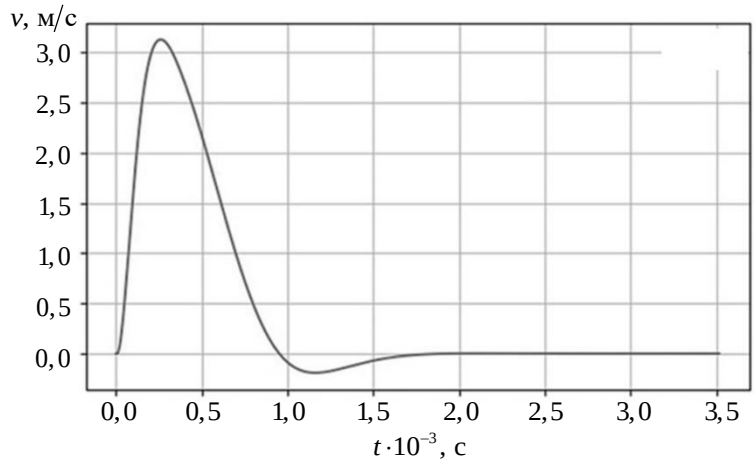



**Рис. 4.** График зависимости проекции вектора скорости золотника от времени

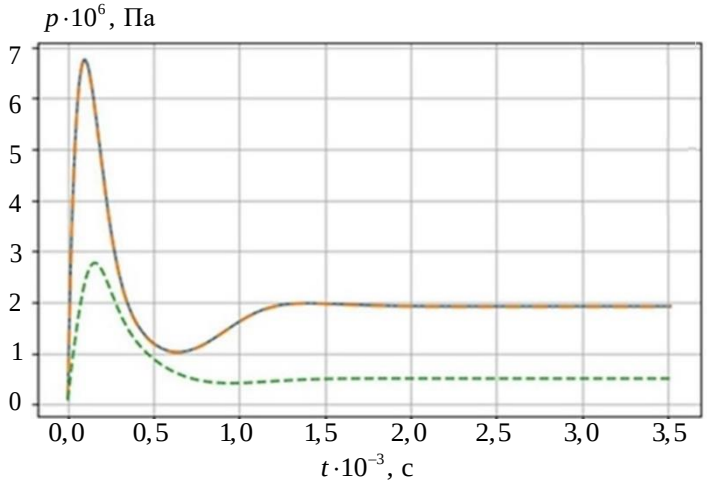



**Рис. 5.** График зависимости давления жидкости в различных полостях стабилизатора расхода от времени:
— $p_2$; — $p_3$; — $p_4$

Ни рис. 6 обозначены: $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ и $Q_4$ — объёмный расход жидкости через четыре золотниковых окна, отверстия перфорированной цилиндрической поверхности золотника, калиброванный дроссель и отверстие штуцера выхода стабилизатора расхода.

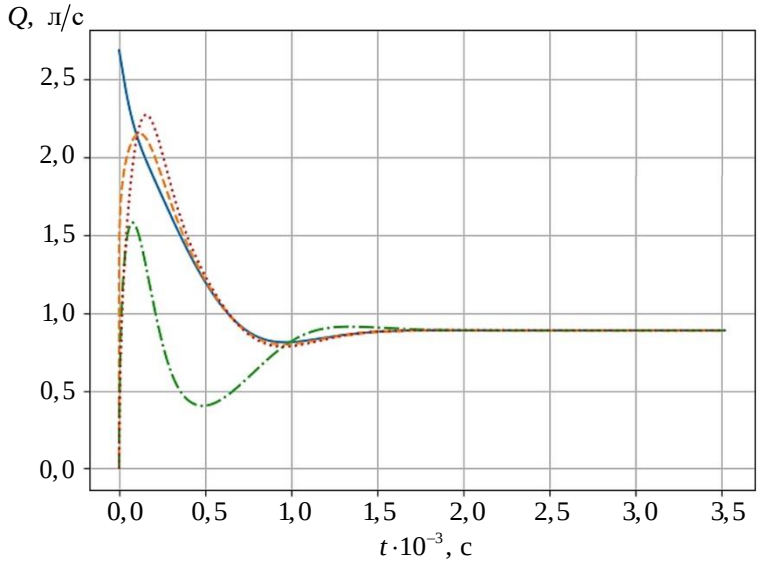



**Рис. 6.** Графики зависимости объёмного расхода жидкости через различные дросселирующие сечения от времени:
— $Q_1$; — $Q_2$; — $Q_3$; — $Q_4$

**Численное решение задачи оптимизации.** Задача многомерной оптимизации стабилизатора расхода записана следующим образом.

Рассматривалась целевая функция восьми переменных

$$\Phi : D^1 \times D^2 \times ... \times D^8 \to \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

для которой

$$\Phi\left(M^1, M^2, ..., M^8\right) = Q_{\max} - Q_{\min} \to \min,$$

заданная на множестве $D^1 \times D^2 \times ... \times D^8 \subset \mathbb{R}^8$ таким образом, что

$$M^\gamma \in D^\gamma \subset \mathbb{R}^1, \ \gamma = \overline{1,8}. \tag{6}$$

где

$$D^1 = \left[\left(\mu_1\right)_{\inf}; \left(\mu_1\right)_{\sup}\right], \ D^2 = \left[\left(\mu_3\right)_{\inf}; \left(\mu_3\right)_{\sup}\right], \ D^3 = \left[\left(\mu_4\right)_{\inf}; \left(\mu_4\right)_{\sup}\right],$$

$$D^4 = \left[\left(n_{др}\right)_{\inf}; \left(n_{др}\right)_{\sup}\right], \ D^5 = \left[\left(d_{калиб.др}\right)_{\inf}; \left(d_{калиб.др}\right)_{\sup}\right],$$

$$D^6 = \left[\left(d_4\right)_{\inf}; \left(d_4\right)_{\sup}\right], \ D^7 = \left[\left(F_0\right)_{\inf}; \left(F_0\right)_{\sup}\right], \ D^8 = \left[\left(k_{пр}\right)_{\inf}; \left(k_{пр}\right)_{\sup}\right],$$

$$\left(\Omega\right)_{\inf}, \ \left(\Omega\right)_{\sup} \in \left\{\mathbb{R} : \left(\Omega\right)_{\inf}, \left(\Omega\right)_{\sup} > 0, \ \left(\Omega\right)_{\inf}, \left(\Omega\right)_{\sup} < +\infty\right\},$$

$$\Omega \in \left\{\mu_1, \ \mu_3, \ \mu_4, \ n_{др}, \ d_{калиб.др}, \ d_4, \ F_0, \ k_{пр}\right\}$$

$\left(\Omega\right)_{\inf}$, $\left(\Omega\right)_{\sup}$ — нижняя и верхняя границы диапазонов изменения варьируемых параметров.

Совокупность функции (5) и ограничений (6) на варьируемые параметры $\mu_i, \ i = 1,3,4, \ n_{др}, \ d_{калиб.др}, \ d_4, \ F_0$ представляет собой задачу оптимизации стабилизатора расхода.

Как указывалось ранее, для решения задачи (5)–(6) применялся известный эволюционный метод — генетический алгоритм с вещественным кодированием [26–28]. Выбор метода обусловлен особенностями целевой функции, которая представляется в виде численного алгоритма и программного кода, что затрудняет нахождение её производных, необходимых, например, в градиентных методах. Проведена модернизация программного комплекса, в который добавлен модуль для вычисления оптимального решения. Верификация генетического алгоритма и оценка его производительности выполнена на анализе известной невыпуклой функции Х. Розенброка.

Проведена серия соответствующих вычислительных экспериментов. На рис. 7 показан график изменения целевой функции (5) задачи оптимизации в зависимости от номера итерации процесса поиска оптимального решения.

В качестве примера варьирования управляемых параметров генетическим алгоритмом на рис. 8 изображены графики изменения

коэффициентов расхода $\mu_i$, $i = 1,3,4$ [29], в зависимости от номера итерации s.

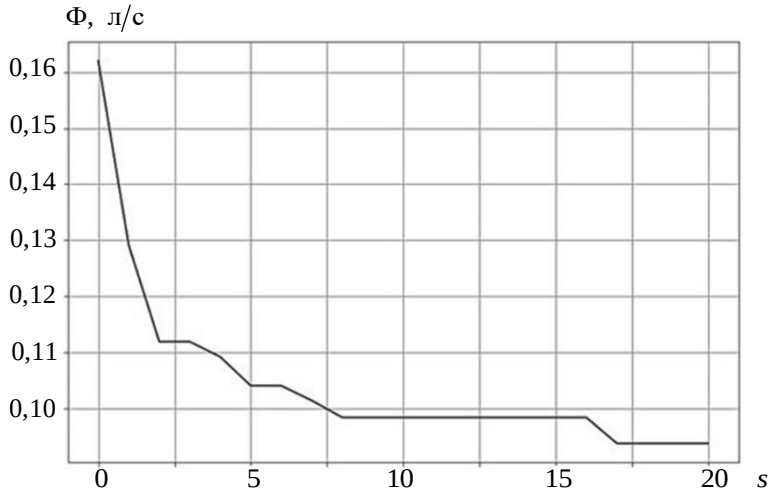



**Рис. 7.** График зависимости целевой функции задачи оптимизации от номера итерации

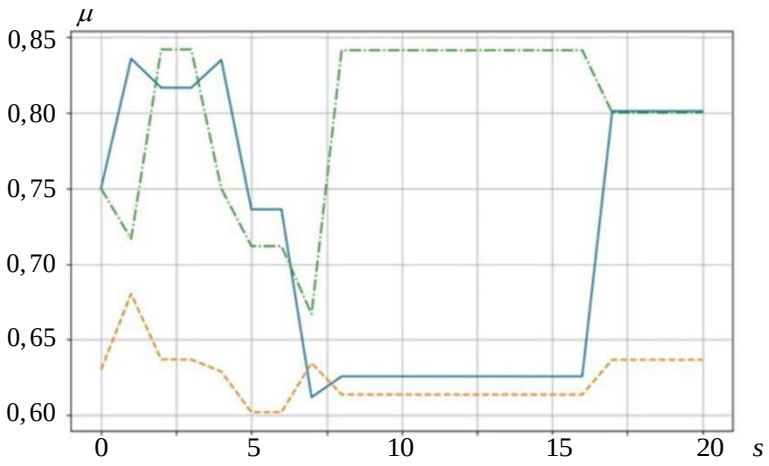



**Рис. 8.** Графики зависимости коэффициентов расхода соответствующих дросселирующих сечений от номера итерации:
— $\mu_1$; — $\mu_3$; — $\mu_4$

Показано, что усовершенствование существующей конструкции стабилизатора расхода возможно — угол наклона графика зависимости $Q$ от $\Delta p$ к горизонтальной оси уменьшился до $\sim 16°$, т.е. практически в два раза (рис. 9). Удалось достичь более высокой точности поддержания объёмного расхода жидкости (порядка ±7,5 % от номинального значения) при сохранении широкого изменения перепада давления ( ~ 30 МПа )на устройстве.

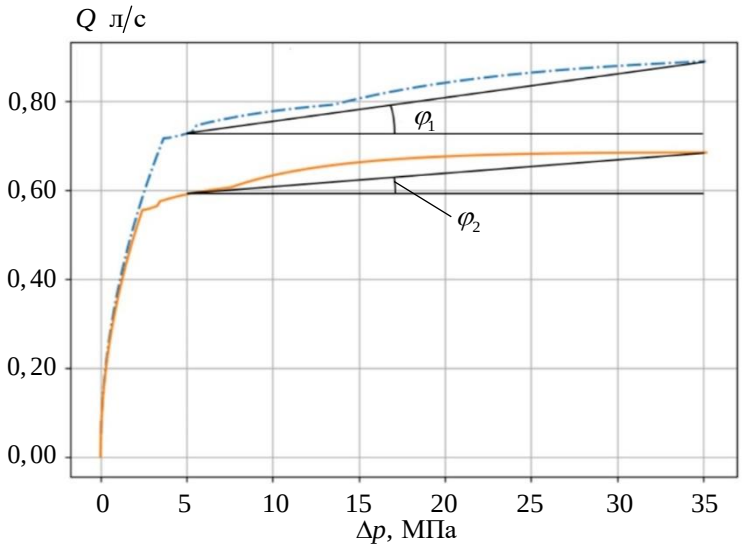



**Рис. 9.** Расходно-перепадная характеристика стабилизатора расхода:
— — после решения задачи анализа, $\varphi_1 \approx 29°$;
— — после выполнения процедуры оптимизации, $\varphi_2 \approx 16°$

Следует отметить, что по результатам поиска оптимального решения установлено, что номинальное значение объёмного расхода жидкости изменяется и становится равным ~0,65 л/с. Это объясняется тем, что в задаче (5)–(6) целевая функция описывает только минимизацию диапазона, в котором должен функционировать стабилизатор расхода. Поэтому для сохранения прежнего значения номинального объёмного расхода (0,8 л/с) необходимо сформулировать соответствующую двухкритериальную задачу оптимизации.

**Выводы и рекомендации.** По результатам исследований сформулированы следующие выводы и рекомендации:

1. проанализированы особенности функционирования и характер расходно-перепадной (статической) характеристики существующего гидравлического стабилизатора расхода, что позволило получить уточнённую аналитическую зависимость осевой составляющей гидродинамической силы от смещения золотника относительно его положения равновесия;

2. сформулирована задача оптимального усовершенствования конструкции существующего стабилизатора расхода для минимизации положительного статизма его расходно-перепадной характеристики, выполнен анализ чувствительности варьируемых (управляемых) параметров, в результате которого количество этих параметров уменьшилось в 1,5 раза;

3. представлена динамическая математическая модель с сосредоточенными параметрами для описания особенностей переходных

процессов, происходящих в стабилизаторе расхода, и численного решения задачи анализа;

4. на основе эвристического алгоритма оптимизации выполнено численное решение задачи оптимального усовершенствования существующей конструкции стабилизатора расхода, что позволило уменьшить статизм его расходно-перепадной характеристики в ~1,8 раза, для реализации которого рекомендовано снижение жёсткости пружины и диаметра калиброванного дросселя на ~8 % и ~2 % соответственно, а также увеличение диаметра дросселя штуцера выхода на ~11 %.

ЛИТЕРАТУРА


[1] Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. *Гидравлика, гидромашины и гидроприводы.* Москва, Издательский дом Альянс, 2009, 423 с.

[2] Свешников В.К. *Станочные гидроприводы.* Москва, Машиностроение, 2008, 640 с.

[3] Гавриленко Б.А., Минин В.А., Рождественский С.Н. *Гидравлический привод.* Москва, Машиностроение, 1968, 502 с.

[4] Башта Т.М. *Машиностроительная гидравлика.* Москва, Машиностроение, 1971, 672 с.

[5] Гликман Б.Ф. *Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей.* Москва, Машиностроение, 1974, 396 с.

[6] Чванова В.К. *Математическое моделирование рабочего процесса жидкостных ракетных двигателей*. Москва, Изд-во МАИ, 1999, 228 с.

[7] Casey B., Tumarkin M. *How to Synchronize Hydraulic Cylinders* [Электронный ресурс], 2006. URL: https://www.hydraulicsupermarket.com/synchroniza-tion.html (дата обращения: 30.04.2024).

[8] Гамынин Н.С., Карев В.И., Потапов А.М., Селиванов А.М. *Гидравлические приводы летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов*. Москва, Машиностроение, 1992, 366 с.

[9] Бушуев А.Ю., Иванов М.Ю., Коротаев Д.В., Реш Г.Ф. *Математическое моделирование дроссельных гидросистем синхронизации исполнительных органов летательных аппаратов.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022, 135 с.

[10] Иванов М.Ю., Новиков А.Е., Реш Г.Ф. Особенности проектирования и численного моделирования стабилизаторов расхода в системах синхронизации движения исполнительных органов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2017, № 2, с. 54–65.

[11] Коротеев А.С. *Компьютерные модели жидкостных ракетных двигателей*. Москва, Машиностроение, 2009, 374 с.

[12] Жук Д.М., Маничев В.Б., Родионов С.В. Моделирование динамических систем с помощью программы PA10. *Инженерный вестник*, 2014, № 12, с. 531–540.

[13] Пат. 2548613 Российская Федерация, МПК G05D 7/01. *Регулятор расхода* / А.А. Дергачев, М.Ю. Иванов, Г.А. Копков, А.П. Кучин, А.Е. Новиков, Г.Ф. Реш, В.Г. Синявин. – № 2014102669/28; заявл. 29.01.2014; опубл. 20.04.2015, Бюл. № 11. – 7 с. : ил. 2.

[14] Мельникова В.Г., Коцур О.С., Щеглов Г.А. Особенности построения расчётной схемы для моделирования динамики стабилизатора расхода в пакете OpenFOAM. *Труды Института системного программирования РАН,* 2017, т. 29, вып. 1, с. 53–70.

[15] Мельникова В.Г. Исследование условий работы золотникового стабилизатора расхода с помощью математического моделирования. *Техника XXI века глазами молодых ученых и специалистов*, 2022, № 20, с. 226–233.

[16] Беляев Е.Н., Коломенцев А.И., Насименто Л.Б., Назаров В.П. Влияние конструктивных параметров регулятора расхода на его статические и динамические характеристики. *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева*, 2014, № 1 (53), с. 109–113.

[17] Чекурова М.С. Использование графического калькулятора Desmos. *Молодой учёный*, 2023, № 46 (493), с. 437–440.

[18] Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.* Москва, Мир, 1999, 685 с.

[19] Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. *Численные методы решения жестких систем.* Москва, Наука, 1979, 208 с.

[20] Жук Д.М., Маничев В.Б., Сахаров М.К. Сравнение современных решателей жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений с решателями Си библиотеки SADEL. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, № 8, с. 283–300.

[21] Gear C.W. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc, 1971, 253 p.

[22] Шиманская Т.М., Зродников А.В. *Эффективный алгоритм интегрирования уравнений кинетики реактора на основе численных методов Гира.* Обнинск, ФЭИ, 1983, 18 с.

[23] Арушанян О.Б., Зелеткин С.Ф. *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране*. Москва, Изд-во МГУ, 1990, 336 с.

[24] Вержбицкий В.М. *Основы численных методов.* Москва, Высшая школа, 2002, 840 с.

[25] Семенов М.Е., Колупаева С.Н. Анализ областей абсолютной устойчивости неявных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Известия Томского политехнического университета*, 2010, т. 317, № 2, с. 16–22.

[26] Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 446 с.

[27] Панченко Т.В. *Генетические алгоритмы*. Астрахань, Издательский дом «Астраханский университет», 2007, 87 с.

[28] Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В. Применение генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием для приближенного синтеза субоптимального управления детерминированными системами. *Автоматика и телемеханика*, 2011, вып. 11, с. 117–129.

[29] Идельчик И.Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям.* Москва, Машиностроение, 1992, 672 с.

Статья поступила в редакцию 16.05.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Иванов М.Ю., Бушуев А.Ю., Щербаков Н.С., Реш Г.Ф. Компьютерное моделирование динамических процессов в гидравлическом стабилизаторе расхода и его оптимизация на основе эволюционного алгоритма. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 100-119.

**Иванов Михаил Юрьевич** — кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, АО «ВПК «НПО машиностроения», доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vpk@vpk.npomash.ru

**Бушуев Александр Юрьевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: alex_bush@bmstu.ru; a.ju.bushuv@yandex.ru

**Щербаков Никита Сергеевич** — техник, АО «ВПК «НПО машиностроения», студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vpk@vpk.npomash.ru

**Реш Георгий Фридрихович** — канд. техн. наук, первый заместитель начальника отделения, АО «ВПК «НПО машиностроения». e-mail: g.f.resh@vpk.npomash.ru

# Computer simulation of dynamic processes in the hydraulic flow stabilizer and its optimization based on evolutionary algorithm

© M.Yu. Ivanov[1,2], A.Yu. Bushuev[2], N.S. Shcherbakov[1,2], G.F. Resh[1]

[1]JSC Military Industrial Corporation NPO Mashinostroyenia,
Reutov, Moscow region, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*In various technical systems hydraulic devices are widely used to ensure the synchro-nous movement of executive bodies — unregulated chokes, flow dividers, regulators and/or flow stabilizers. The latter are characterized by the fact that their functioning occurs in the range of pressure drops of liquid amounting to several hundred atmospheres. The issues related to the numerical simulation of non-stationary physical processes in the flow stabilizer the design of which is protected by a patent of the Russian Federation for the invention are considered. The results of computer modeling based on a theoretical model with concentrated parameters, the use of the finite-difference implicit Geer method for solving a system of rigid differential equations are presented. The problem of optimal improvement of the design of such flow stabilizer in accordance with the selected criterion is formulated and solved. This optimization criterion is to en-sure the condition of the minimum possible positive statism of the flow-drop (static) characteristic in conditions of wide change in the pressure drop on the device and the effect of the axial component of the hydrodynamic force. The problem of optimal design improvement was solved using one of the widely used evolutionary optimization algorithms — genetic algorithm with real coding. The results of computational experiments in modeling physical processes of the analysis problem correspond to the available ex-perimental data that were previously obtained by the authors of the work. It is shown that improvement of the existing design of the flow stabilizer is possible — the angle of inclination of the flow-drop characteristic to the horizontal axis has decreased almost twofold. At the same time, it was possible to obtain higher accuracy of maintaining volumetric flow rate of the liquid. This accuracy is on the order of ±7,5 % of the nominal (tuning) value of the flow stabilizer. For comparison, the accuracy of maintaining the volume flow rate of the liquid before performing the optimization procedure was about ±10 %.*

***Keywords**: mathematical modeling, optimization, rigid systems of differential equations, Geer's method, genetic algorithm with real coding, flow stabilizer, hydrodynamic force, static characteristic*

REFERENCES


[1] Bashta T.M., Rudnev S.S., Nekrasov B.B., etc. *Gidravlika, gidromashiny i gidroprivody* [Hydraulics, hydraulic machines and hydraulic drives]. Moscow, Alliance Publ., 2009, 423 p.

[2] Sveshnikov V.K. *Stanochnye gidroprivody* [Machine hydraulic drives]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2008, 640 p.

[3] Gavrilenko B.A., Minin V.A., Rozhdestvensky S.N. *Gidravlicheskij privod* [Hydraulic drive]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 502 p.

[4] Bashta T.M. *Mashinostroitel'naya gidravlika* [Mechanical engineering hydraulics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971, 672 p.

[5] Glickman B.F. *Avtomaticheskoe regulirovanie zhidkostnyh raketnyh dvigatelej* [Automatic control of liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974, 396 p.

[6] Chvanova V.K. *Matematicheskoe modelirovanie rabochego processa zhid-kostnyh raketnyh dvigatelej* [Mathematical modeling of the working process of liquid rocket engines]. Moscow, MAI Publ., 1999, 228 p.

[7] Casey B., Tumarkin M. *How to Synchronize Hydraulic Cylinders* [Electronic resource], 2006. URL: https://www.hydraulicsupermarket.com/synchronization.html (accessed: 30.04.2024).

[8] Gamynin N.S., Karev V.I., Potapov A.M., Selivanov A.M. *Gidravlicheskie privody letatel'nyh apparatov: ucheb. dlya aviac. spec. vuzov* [Hydraulic drives of aircraft: textbook. for aviac. spec. universities]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 366 p.

[9] Bushuev A.Yu., Ivanov M.Yu., Korotaev D.V., Resh G.F. *Matematicheskoe modelirovanie drossel'nyh gidrosistem sinhronizacii ispolnitel'nyh organov letatel'nyh apparatov* [Mathematical modeling of throttle hydraulic synchronization systems of executive organs of aircraft]. Moscow, BMSTU Publ., 2022, 135 p.

[10] Ivanov M.Yu., Novikov A.E. Resh G.F. Features of designing and numerical simulation of flow stabilizers in actuator line synchronization systems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2017, no. 2, pp. 54–65.

[11] Koroteev A.S. *Komp'yuternye modeli zhidkostnyh raketnyh dvigatelej* [Computer models of liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009, 374 p.

[12] Zhuk D.M., Manichev V.B., Rodionov S.V. Modelirovanie dinamicheskih sistem s pomoshch'yu programmy PA10 [Modeling of dynamic systems using the PA10 program]. *Inzhenernyj vestnik* [Engineering Bulletin], 2014, no. 12, pp. 531–540.

[13] Pat. 2548613 Russian Federation, Int. Cl. G05D 7/01. *Flow rate governor* / A.A. Dergachev, M.Yu. Ivanov, G.A. Kopkov, A.P. Kuchin, A.E. Novikov, G.F. Resch, V.G. Sinyavin. – no. 2014102669/28; appl. 29.01.2014; publ. 20.04.2015, Bull. № 11. – 7 p. : ill. 2.

[14] Melnikova V.G., Kotsur O.S., Shcheglov G.A. Numerical simulation of the flow rate regulator valve using OpenFOAM. *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 29, iss. 1, pp. 53–70.

[15] Melnikova V.G. Investigation of the operation conditions of the flow valve using numerical simulation. *Tekhnika XXI veka glazami molodyh uchenyh i specialistov* [Technology of the XXI century through the eyes of young scientists and specialists], 2022, no. 20, pp. 226–233.

[16] Belyaev E.N., Kolomentsev A.I., Nascimento L.B., Nazarov V.P. Influence of design parameters of a flow regulator on its static and dynamic characteristics. *Vestnik of SibGAU*, 2014, no. 1 (53), pp. 109–113.

[17] Chekurova M.S. Ispol'zovanie graficheskogo kal'kulyatora Desmos [Using the Desmos graphical calculator]. *Molodoj uchyonyj* [Young Scientist], 2023, no. 46 (493), pp. 437–440.

[18] Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Heidelberg, Springer Berlin, 1996, 614 p.
[19] Rakitskiy Yu.V., Ustinov S.M., Chernorutsky I.G. *Chislennye metody resheniya zhestkih sistem* [Numerical methods for solving rigid systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 208 p.
[20] Zhuk D.M., Manichev V.B., Zakharov M.K. Sravnenie sovremennyh reshatelej zhestkih sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s reshatelyami Si biblioteki SADEL [Comparison of modern solvers of rigid systems of ordinary differential equations with Si solutions of the SADEL library]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific publication of BMSTU], 2012, no. 8, pp. 283–300.
[21] Gear C.W. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc, 1971, 253 p.
[22] Shimanskaya T.M., Zrodnikov A.V. *Effektivnyj algoritm integrirovaniya uravnenij kinetiki reaktora na osnove chislennyh metodov Gira* [An effective algorithm for integrating reactor kinetics equations based on Geer numerical methods]. Obninsk, FEI Publ., 1983, 18 p.
[23] Arushanyan O.B., Zaletkin S.F. *Chislennoe reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na Fortrane* [Numerical solution of ordinary differential equations on Fortran]. Moscow, MSU Publ., 1990, 336 p.
[24] Verzhbitsky V.M. *Osnovy chislennyh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2002, 840 p.
[25] Semenov M.E., Kolupaeva S.N. Analiz oblastej absolyutnoj ustojchivosti neyavnyh metodov resheniya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Analysis of the areas of absolute stability of implicit methods for solving systems of ordinary differential equations]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 16–22.
[26] Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoj optimizacii. Algoritmy, vdohnovlennye prirodoj: uchebnoe posobie* [Modern search engine optimization algorithms. Algorithms inspired by nature: a textbook]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 446 p.
[27] Panchenko T.V. *Geneticheskie algoritmy* [Genetic algorithms]. Astrakhan, Astrakhan University Publ., 2007, 87 p.
[28] Panteleev A.V., Metlitskaya D.V. An application of genetic algorithms with binary and real coding for approximate synthesis of suboptimal control in deterministic systems. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 11, pp. 2328–2338.
[29] Idelchik I.E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Handbook of hydraulic resistance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 672 p.

**Ivanov M.Yu.,** Cand. Sc. (Phys. — Math.), Leading Researcher, JSC Military Industrial Corporation NPO Mashinostroyenia, Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vpk@vpk.npomash.ru

**Bushuev A.Yu.,** Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: a.ju.bushuv@yandex.ru; alex_bush@bmstu.ru

**Shcherbakov N.S.,** Technician, JSC Military Industrial Corporation NPO Mashinostroyenia, Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vpk@vpk.npomash.ru

**Resh G.F.,** Cand. Sc. (Eng.), Deputy Head of the Department, JSC Military Industrial Corporation NPO Mashinostroyenia. e-mail: g.f.resh@vpk.npomash.ru