



Математическое моделирование

и численные методы

Малинин В. Г., Малинина Н. А., Савич В. Л., Малинин В. В., Аскама Пенья А., Отев К. С. Структурно-аналитическая модель пластической деформации, учитывающая автоволновые процессы генерации дефектов. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 3, с. 43-64.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/347/>

Структурно – аналитическая модель пластической деформации, учитывающая автоволновые процессы генерации дефектов

© В. Г. Малинин¹, Н. А. Малинина¹, В. Л. Савич¹, В. В. Малинин²,
А. Аскама Пенья³, К. С. Отев¹

¹ФГБОУ ВО «Ухтинский государственный технический университет»,
Республика Коми, г. Ухта, 169300, Россия

²ПАО «Туполев», г. Москва, 101000, Россия

³ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет
им. Н.В. Парахина», Орловская область, г. Орел, 302001, Россия

Рассмотрен вариант автоволновой модели генерации структурных несовершенств при инициировании локализованного пластического течения кристаллических тел в условиях сложного напряженного состояния, основанный на методах структурно-аналитической теории прочности и принципах синергетики упругопластического процесса деформирования. Сформулированная модель учитывает развитие процессов на двух взаимосвязанных масштабных и структурных уровнях, позволяет прогнозировать особенности упругопластического деформирования кристаллических материалов при сложных траекториях нагружения в пространстве напряжений и произвольных программах изменения напряжений во времени, учитывает влияния локализации и релаксации энергии структурных концентраторов на процессы автоколебаний зон структурных концентраторов при упругопластическом деформировании.

Ключевые слова: автоволновая модель, структурно-аналитическая теория прочности, пластическая деформация, масштабный уровень, структурный уровень, напряжение

Введение. Поликристаллические материалы содержат в исходном состоянии сложную, иерархически организованную, систему структурных концентраторов, которые в процессе нагружения служат источниками локализованной энергии. Перераспределение энергетических флуктуаций, обусловленных образованием и самоорганизацией структурных несовершенств, обеспечивают процессы неупругой деформации и разрушения на различных масштабных уровнях. Как отмечается в [1,2], общим признаком самоорганизации среды в процессе деформации является образование различных по форме диссипативных структур с формированием неоднородной пространственно-временной структуры.

С целью построения адекватной модели процессов деформации и разрушения при сложном напряженном состоянии необходим подход, в котором физическое содержание задачи органически и естественным образом отражало синергетические аспекты процессов деформации с

учетом масштабной и структурной иерархии межуровневого взаимодействия, вплоть до макроскопического описания физико-механических свойств при произвольных траекториях нагружения.

Такой методологический подход, на наш взгляд, содержится в структурно-аналитической мезомеханике.

1. Принципы построения модели. Следуя подходу структурно – аналитической мезомеханики [3-5], в предложенной модели используются следующие гипотезы:

1) Предполагается, что в любом реальном кристаллическом теле удастся выделить относительно однородный объем V_0 , в котором возможно протекание динамических диссипативных процессов, вызывающих микроструктурную деформацию этого элемента. Обозначим тензор деформации V_0 через β_{ik} .

В качестве β_{ik} могут выступать упругие β_{ik}^y , неупругие деформации β_{ik}^H , вызванные атермической пластичностью β_{ik}^a , или термоактивированным способом β_{ik}^i , деформации теплового расширения β_{ik}^T и др. Элемент V_0 в состоянии испытывать любую комбинацию перечисленных механизмов.

Названные деформации могут возникать под действием полей различной природы, которые распространяются в различных пределах V_0 : механические напряжения τ_{ik} , температуры T , гидростатическое давление ρ и т.д.

Принято, что деформационные законы и процессы автоколебаний в объеме V_0 не зависят от событий, происходящих в любых других объемах V_0 , кроме данного объема. Это принципиальное утверждение позволяет рассматривать развитие деформаций и процессов автоколебаний структурных несовершенств в V_0 как закон фундаментального характера и использовать основополагающие результаты исследований, полученных в физике прочности и пластичности, материаловедении, термодинамике необратимых процессов, синергетики и других смежных дисциплинах.

2) Предполагается, что удовлетворительное приближение достигается, если свойства представительного объема V_0 выражаются через средние значения переменных, принадлежащих объему V_0 . Иными словами, будем исходить из того, что такие величины, как β_{ik} , в пределах V_0 постоянны.

В силу того, что объемы V_0 , относящиеся к различным участкам кристалла с одинаковой ориентацией, не эквивалентны между собой, используются статистические усреднения по соответствующим параметрам V_0 .

Кроме первого уровня усреднения по объему V_0 , используется усреднение по второму масштабному уровню в объеме $V \gg V_0$.

Ориентационное и статистическое усреднение по объемам V_0 являются средствами перехода к описанию свойств кристаллических материалов, т.е. в физически наблюдаемых величинах, характеризующих макроскопические свойства кристаллов. Согласно сказанному, выражения для тензора скорости макроскопических деформаций представляется [3-5] уравнением

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \int_{\{s\}} \int_{\{\Omega\}} \Psi(s) f(\Omega) \alpha_{ip} \alpha_{kq} \dot{\beta}_{pq} d^3\Omega ds, \quad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ik}$ — точка означает производную по времени;

α_{ik} — направляющие косинусы, переводящие локальную систему l, m, n , объема V_0 в лабораторный базис x, y, z ;

$\Psi(s)$ — функция плотности распределения статистических переменных s ;

$f(\Omega)$ — функция плотности распределения по ориентациям Ω , представительных объемов V_0 .

Названные функции должны удовлетворять естественным условиям нормировки

$$\int_{\{s\}} \Psi(s) ds = 1, \quad \Psi(s) \geq 0, \quad \int_{\{\Omega\}} f(\Omega) d^3\Omega = 1, \quad f(\Omega) \geq 0. \quad (2)$$

3) Следующий важный момент заключается в предположении, что объём V допустимо рассматривать, как математическую точку сплошной среды. Средние по нему значения деформаций ε_{ik} , напряжений σ_{ik} , температуры T и т.д. характеризуют уже измеряемые величины, имеющие макроскопический смысл. К названным величинам можно применять основные законы поведения сплошной среды. Именно для такого пространства сформулированы основные законы поведения сплошных сред, например, уравнения равновесия для σ_{ik} , уравнения сплошности для ε_{ik} , уравнения теплопроводности для T и т. д. Таким образом, в рассматриваемой модели физический и механический аспекты как бы разнесены по разным этажам усреднения: физический — по нижнему микроструктурному уровню V_0 , а механический — по верхнему макроуровню V .

4) Принимается также предположение о том, что между различными объектами нижнего уровня V_0 существуют сильные взаимодействия. Например, если в каком-то объёме V_0 развивается пластическая

деформация, а в другом, соседнем только упругая, это приводит к перераспределению напряжений между первым и вторым объемами. Характер подобного перераспределения зависит от многих факторов: от их взаимной ориентации, от статистики распределения свойств по ним и т. д. Точный расчёт подобных взаимодействий в рамках современной физики и механики пластичности практически невозможен. В тоже время ясно, что в среднем каждый из объёмов испытывает одинаковое воздействие со стороны всех других V_0 . Если такое воздействие характеризовать в терминах напряжений, то целесообразно выделить две составляющие дополнительного поля напряжений — так называемые ориентированные микронапряжения, тензор которых обозначим через Ψ_{ij} , и неориентированные микронапряжения, характеризуемые тензором ν_{ij} . Ориентированные микронапряжения Ψ_{ij} , индуцируются исключительно суммарной макроскопической неупругой деформацией $\dot{\varepsilon}_{ik}$. Неориентированные микронапряжения, характеризующиеся тензором ν_{ij} возникают по разным причинам, прежде всего из-за анизотропии теплового расширения и анизотропии упругой податливости в V_0 . Определяющие уравнения для V_0 не зависят от способа их калибровки. Независимость локальных инвариантов от калибровочных процедур предполагается и в отношении соответствующих локальных законов в V_0 .

5) Для учета взаимовлияния процессов в различных объемах V_0 , следуя [3-5], используется хорошо себя зарекомендовавший в теоретической физике метод эффективного поля. В частности, для характеристики напряженного состояния, действующего в V_0 помимо τ_{ik} вводятся еще две составляющие поля микронапряжений — так называемые ориентированные микронапряжения, тензор которых обозначается Ψ_{ij} , неориентированные микронапряжения, характеризующиеся тензором ν_{ij} . Таким образом, эффективное напряжение τ_{ik}^* , создающее в V_0 деформацию β_{ik} имеет вид

$$\tau_{ik}^* = \tau_{ik} - \Psi_{ik} + \nu_{ik}. \quad (3)$$

В связи со сказанным в развиваемом подходе чрезвычайно важным оказывается не только использование двух структурных уровней, но и учёт взаимодействия между ними. В двухуровневой модели процесс формирования механических свойств происходит по следующей схеме: напряжения σ_{ik} порождают микронапряжения τ_{ik} . Последние вызывают физические акты массопереноса, т.е. пластические деформации β_{ik} . В результате появляется макроскопическая деформация ε_{ik} ,

которая определяется ориентационным и пространственным усреднением. Неупругие деформации ε_{ik} индуцируют напряжения Ψ_{ij} , что немедленно сказывается на характере развития β_{ik} , зависящих от τ_{ik}^* , и, следовательно, на деформацию ε_{ik} . Убеждаемся здесь, что даже в случае простейших законов для β_{ik}^H законы развития макроскопических деформаций могут оказаться сложными.

б) Будем исходить из принципиального тезиса о том, что константы определяющих уравнений для микроуровня V_0 , как, в прочем, и другие константы теории, не зависят от способа их калибровки посредством любых приемлемых процедур макроскопического характера. Независимость локальных инвариантов от калибровочной процедуры будет предполагаться и в отношении соответствующих законов деформации в V_0 . Принцип локальной калибровочной инвариантности в применении к рассматриваемой проблеме означает, что все физические константы теории имеют смысл фундаментальных констант материала и, что работоспособность предлагаемой теории обеспечивается для любых способов воздействия на твёрдое тело при любой его статистической и ориентационной структуре (анизотропии свойств), если только физические условия деформации изменяются в таких пределах, когда постулированные механизмы процесса сохраняют свою силу.

Считаем справедливыми следующие замечания по поводу представительного объёма V_0 . Если не принимать во внимание статистический характер распределения свойств по множеству объёмов V_0 , то единственным отличительным признаком V_0 будет служить ориентация их кристаллофизических базисов относительно лабораторной системы координат. При этом, для каждого V_0 фиксированной ориентации можно и нужно привлекать не один объём V_0 , а любое их требуемое количество совершенно эквивалентных по свойствам и ориентациям. В объектах значительных размеров количество V_0 может быть очень большим, так как верхний уровень масштаба V_0 ограничен в силу соображений, изложенных выше, а суммарный объём V_0 ограничен только размерами области усреднения V , которая может быть большой для масштабных тел.

Из выше названного проистекает два важных следствия: во-первых, что совокупность V_0 , характеризуемая заданной ориентацией кристаллофизического базиса относительно лабораторного, в физическом плане пространственно разнесена по объёму усреднения V , т.е. если и стянута в точку ориентационного пространства, то лишь в математическом, а не в физическом смысле; во-вторых, из этого следует,

что, если в каком-то из подобных V_0 произошло некое событие, например растрескивание, оно не будет накладывать запрета на другие события в других объемах V_0 с той же ориентацией. Если к тому же имеет место статистическое распределение свойств по совокупности V_0 , то оно должно охватывать в равновероятной мере полное множество V_0 , независимо от ориентационного фактора. В результате ориентационное и статистическое усреднения при пересчете свойств в лабораторный базис должны быть совершенно независимы.

7) Следуя [1-4], принимается гипотеза, что возникновение и развитие неупругой деформации на структурном микромасштабном уровне обусловлена процессом иницирования сдвиговых автоволн локализации дефектов в окрестностях структурных концентраторов объема V_0 .

Общий подход в описании генерации автоволн в активных средах обычно строится на учете конкуренции антагонистических факторов – активирующего (автокаталитического) и ингибирующего (демпфирующего) [1,2]. Как отмечается в [1,2], при упругопластической деформации активатором процесса является пластическая деформация сдвиговой природы, на структурном уровне V_0 характеризуется тензором β_{ik}^H , а ингибитором эффективное напряжение τ_{ik}^* (1.3) [3,4]. Процессы пластической деформации на микромасштабном уровне происходят за счет генерации скольжения структурных несовершенств, плотность которых обозначается тензором d_{ik} . С учетом сдвиговой природы пластической деформации тензоры β_{ik}^H и d_{ik} в объеме V_0 можно представить в виде:

$$\beta_{ik}^H = \frac{1}{2} \beta_{31}^H (\delta_{i3} \delta_{k1} + \delta_{i1} \delta_{k3}), \quad (4)$$

$$d_{ik} = \frac{1}{2} d_{31} (\delta_{i3} \delta_{k1} + \delta_{i1} \delta_{k3}), \quad (5)$$

где δ_{ik} — единичный тензор;

β_{ik}^H и d_{31} — соответствующие компоненты тензоров (4) и (5), являющиеся одновременно инвариантами введенных тензоров (4) и (5) структурного уровня V_0 .

В отличие от работ [1,2], где рассмотренные параметры сформулированы для макромасштабного уровня, в данном подходе имеется в виду структурный микромасштабный уровень V_0 , как в [3-4].

8) Для описания неупругой деформации на структурном уровне формулируется уравнение сдвиговых автоволн, отражающего синергетический характер массопереноса в виде:

$$\dot{d}_{31} = b_1 \dot{\beta}_{31}^H + k_1(\lambda_{nl}) \Delta_{\omega}^* d_{31}, \quad (6)$$

где d_{31} — компонента тензора, характеризующая плотность дефектов структуры дислокационной природы, возникающих в окрестности зон структурных концентраторов;

$$k_1(\lambda_{nl}) = k_0 e^{\frac{\lambda_{nl}}{\lambda_0}};$$

где $\lambda_{nl} = \frac{T}{T_{nl}}$, k_0 , λ_0 — постоянные материала;

T_{nl} — температура плавления;

Δ_{ω}^* — оператор Лапласа для локальной системы координат $\{l, m, n\}$.

Следуя терминологии [1,2], правая часть уравнения (1.6) включает «гидродинамическую» $b_1 \dot{\beta}_{31}^H$ и «диффузионную» $k_1(\lambda_{nl}) \Delta_{\omega}^* d_{31}$ компоненты.

Первое слагаемое в уравнении (1.6) отражает скорость изменения деформаций в ходе локального релаксационного акта в объеме V_0 , связана с перемещением границ области скольжения при релаксации локальных концентраторов напряжений. Второе слагаемое уравнения (1.6) определяется диффузионно-подобными характеристиками и инициирует зарождение очага пластической деформации на структурном расстоянии λ от существующего фронта за счет релаксации концентраторов в этой области (так называемая «заброска» деформации согласно терминологии [1,2]).

9) Большое количество экспериментальных исследований, обзор которых представлен в [1], убедительно обосновывают существование для многочисленных материалов инвариантного соотношения в виде

$$\frac{\lambda \dot{\beta}_{31}^H}{\chi \dot{\beta}_{31}^V} = c = const, \quad (7)$$

где χ — межплоскостное расстояние плоскостей с максимальной упаковкой атомов;

$\dot{\beta}_{31}^V$ — скорость распространения упругих сдвиговых ультразвуковых колебаний;

λ — длина автоволны;

$\dot{\beta}_{31}^H$ — скорость сдвиговой компоненты пластической деформации.

Уравнение (1.7), сформулированное для структурного уровня, является аналогом упругопластического инварианта, введенного в многочисленных работах, выполненных под руководством Зуева Л. Б.

[1,2] для макромасштабного уровня. Учитывая преемственность подхода, обозначим (1.7) как определяющее соотношение на микроструктурном уровне, отражающее взаимосвязи упругопластических процессов деформации в условиях автоколебаний.

Данное уравнение количественно связывает характеристики упругих сдвиговых волн ($\chi, \dot{\beta}_{31}^V$) с характеристиками автоволн локализации пластического течения ($\lambda, \dot{\beta}_{31}^H$), объединяя упругую и пластическую составляющую сдвиговой деформации на микромасштабном уровне.

Следуя [2], можно дать аналогичную интерпретацию уравнению (1.7), считая, что параметры λ и χ характеризуют пространственные масштабы упругой и пластической деформации на структурном уровне, а скорости $\dot{\beta}_{31}^V$ и $\dot{\beta}_{31}^H \ll \dot{\beta}_{31}^V$, определяют кинетику процессов их перестройки. Учитывая сказанное, уравнение (7) можно представить в виде:

$$\frac{\lambda \dot{\beta}_{31}^H}{\chi \dot{\beta}_{31}^V} = \frac{\lambda}{\chi} \frac{\dot{\beta}_{31}^H}{\dot{\beta}_{31}^V} = \frac{\lambda/\chi}{\dot{\beta}_{31}^V/\dot{\beta}_{31}^H} = c = const. \quad (8)$$

Уравнение (1.8) сводится к отношению масштабного ($\lambda/\chi \gg 1$) и кинетического $\dot{\beta}_{31}^V/\dot{\beta}_{31}^H \gg 1$ факторам, которые, согласно [1,2], можно рассматривать как термодинамические вероятности. Параметр λ/χ характеризует количество возможных мест зарождения автоволны, локализованной пластической деформацией, а $\dot{\beta}_{31}^V/\dot{\beta}_{31}^H \gg 1$ — выбор системы скольжения автоволны из спектра её возможных значений $0 \ll \dot{\beta}_{31}^H \ll \dot{\beta}_{31}^V$.

2. Математическая модель неупругой деформации в условиях инициирования процессов автоколебаний на структурном уровне. В данном разделе работы приведен вариант модели необратимой деформации кристаллических материалов, в основу которой положены данные о физической природе локализованного пластического течения, заимствованные из работ по физике твердого тела, металловедения, синергетики и других смежных дисциплин. Обсуждаются возможности предложенного подхода.

Модель автоколебаний, обусловленных самоорганизацией ориентированных дислокационных зарядов. В процессе пластической деформации, генерируется сложная структура ансамбля дефектов, возникает много разнообразных конфигураций, причем наиболее эффективное сопротивление движению и размножению дефектов оказывают

ориентированные дислокационные комплексы, которые возникают в системе скольжения. Учитывая сказанное, целесообразно величину напряжения течения τ_{NL}^s связывать с плотностью возникающих в системе сдвига ориентированных дислокационных субструктур d_{nl} . Для моделирования названных обстоятельств, следуя концепции скольжения [3], введем плоскости скольжения, представив их в виде касательных плоскостей к полусфере единичного радиуса (рис.1).

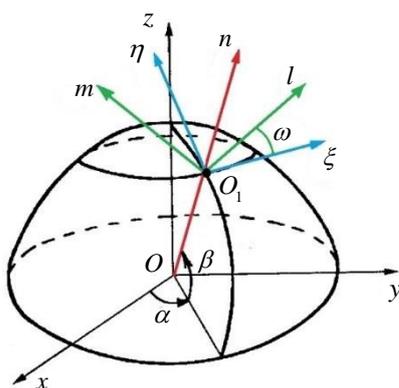


Рис. 1. Координаты плоскостей скольжения

Произвольную плоскость скольжения будем характеризовать нормалью $n = n(\alpha, \beta)$ к ней, задаваемой углами α и β , отсчитываемые от фиксированных осей x , y , z . В точке касания плоскости скольжения с полусферой строится подвижная система координат n , η , ξ , где η — касательная к вертикальному большому кругу; ξ — касательная к сечению полусферы, параллельному плоскости xOy . В плоскости скольжения (η , ξ) направление скольжения l характеризуется углом ω , отсчитываемым от оси ξ (рис.2).

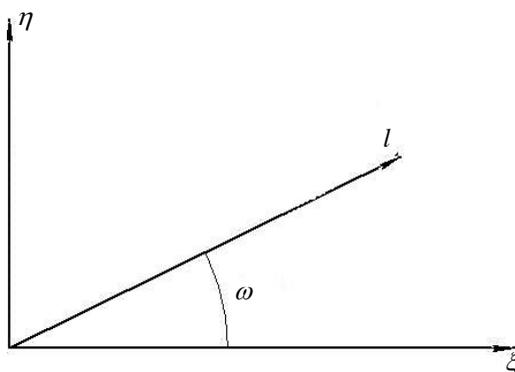


Рис. 2. Направление скольжения

Обозначим через $d_{31} = d_{nl}$ плотность ориентированных дислокационных зарядов в плоскости сдвига с нормалью к плоскости скольжения \vec{n} в направлении, задаваемым вектором \vec{l} .

Плотность ориентированных дефектов d_{nl} является усредненной характеристикой в однородной сплошной модели микромасштабного уровня V_0 и характеризует возникновение ориентированных дислокационных структур в процессе неупругой деформации.

Отметим, что плотность дефектов d_{nl} различна в различных системах скольжения, зависит от истории нагружения, вида напряженного состояния и режима нагружения во времени, т.е. $d_{nl} = d_{nl}(\Omega_0, t)$.

Для описания неупругой деформации на микромасштабном уровне будем использовать уравнение сдвиговых автоволин (6), сформулированное для локальной системы скольжения n, l в виде

$$\dot{d}_{nl} = b_1 \dot{\beta}_{nl}^H + K_1(\lambda_{nl}) \Delta_\omega^* d_{nl}. \quad (9)$$

Анализируя уравнение (9), отметим, что второе слагаемое правой части проявляется во времени. При большой скорости деформации, второе слагаемое намного меньше первого, и уравнение (9) примет вид:

$$\dot{d}_{nl} = b_1 \dot{\beta}_{nl}^H. \quad (10)$$

Равенство (10) показывает, что структурные дефекты образуются в тех локальных системах сдвига l, n , в которых происходит скольжение. Если в некоторых системах скольжения l, n отсутствуют сдвиги, т.е. $\dot{\beta}_{nl}^H = 0$ и $\dot{d}_{nl} = 0$. Данный вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований: если в кристаллических зернах системы скольжения так неблагоприятно ориентированы, что в них не происходит сдвигов, то в них отсутствуют и соответствующие изменения дефектной структуры.

Если после активной деформации, в программе эксперимента прекращается формоизменение, т.е. в (9) $\dot{\beta}_{nl}^H = 0$, что имеет место при частичной разгрузке, то уравнение (9) имеет следующий вид

$$\dot{d}_{nl} = K_1(\lambda_{nl}) \Delta_\omega^* d_{nl}. \quad (11)$$

Уравнение (11) описывает процесс релаксации дефектов, применяются для описания релаксационных процессов.

Полное уравнение (9) свидетельствует, что в случае необратимой деформации образуются дефекты (первое слагаемое правой части (9)) и одновременно происходит их релаксация (второе слагаемое).

Модель напряжения течения на микроструктурном уровне. Один из основных пунктов при формулировке положений рассматриваемой

Структурно – аналитическая модель пластической деформации, учитывающая ...
 модели процессов деформации заключается в следующем: принимаем, что напряжение течения τ_{NL}^S зависит от плотности дислокационных зарядов $d_{nl} = d_{31}$, т.е.

$$\tau_{NL}^S = \tau_{NL}^S(d_{nl}). \quad (12)$$

Отметим, что функция d_{nl} связана с интенсивностью сдвигов β_{nl} зависимостью (9).

Считаем, что сдвиг в некоторой плоскости n и в направлении l изменит τ_{NL}^S во всех плоскостях N и направлениях L . Напряжение течения τ_{NL}^S зададим в виде [3-4]

$$\tau_{NL}^S = \tau_0^S + \eta \int_{\omega_2}^{\omega_1} d_{NL} \cos(\omega_0 - \omega) d\omega;$$

$$\tau_0^S = F(I, \tau_i) = P(\lambda) \left[1 + \frac{|J(t) - T(t)|}{1 + J(t)^{\frac{1}{2}} T(t)^{\frac{3}{2}}} \cdot J^{\frac{1}{3}}(t) \right]; \quad (13)$$

$$T(t) = \frac{3}{4} e_1 \tau_i^2,$$

где τ_0^S — начальное напряжение течения,

P — предел ползучести, зависящий от гомологической температуры λ ;

e_1, η — постоянные материала;

$J(t)$ — параметр неоднородности;

τ_i — интенсивность касательных напряжений

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (14)$$

В области, где в данный момент происходит скольжение, справедливо равенство:

$$\tau_{NL} = \tau_{NL}^S. \quad (15)$$

Вне этой области:

$$\tau_{NL} < \tau_{NL}^S. \quad (16)$$

Уравнение (15) позволяет определить d_{nl} , а неравенство (2.8) области скольжений, что позволяет рассчитать по формуле (1) с учетом (9) компоненты тензора скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ik}$ [3-4]. Отметим, что уравнение (15) для определения параметра d_{nl} сводится

к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с вырожденным ядром, в классе непрерывных функций решения не имеет [3,4]. В классе же разрывных функций его решение можно представить в виде:

$$d_{nl} = d_0 \delta(\omega_0 - c), \quad (17)$$

где $\delta(x)$ — дельта функция Дирака;

d_0 — искомая функция;

c — неизвестный угол.

Подробная методика расчета приведена в [3,4].

Рассмотрим следующий важный раздел модели. Известно, что деформационное упрочнение обусловлено не только наличием дефектов, характеризующихся здесь функцией d_{nl} , но и их неравномерным распределением по объёму кристалла, образуя локальные зоны структурных концентраторов, обладающих значительной величиной и уровнем локализации энергии. При быстрой пластической деформации образуются не только первичные дислокации, но и сложные неподвижные неправильные сетки из них, возникают сильные структурные концентраторы, тормозящие движение новых дислокаций. Напряжения, обуславливающие дополнительные зоны структурных концентраторов, следуя [3,4], назовем локальными пиковыми напряжениями. Они локализованы в малой окрестности дефектов и могут достигать больших значений. Они увеличиваются с ростом скорости нагружения, ответственны за скоростное упрочнение [3,4]. Обозначенное явление локализации энергии формоизменения в зонах структурных концентраторов успешно моделируется наследственными интегралами в виде параметра неоднородности [3-5].

$$J(t) = \int_0^t K(\lambda, t-s) \frac{\partial \tau_i^2}{\partial s} ds;$$

$$K(\lambda, t-s) = \frac{e(1-\lambda)}{(t-s)^\lambda}; \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{T}{T_{na}},$$

где e и λ — константы материала, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Возможно использовать и другие наследственные ядра, в зависимости от структурного состояния материала и масштабного уровня анализа процессов.

Приведем некоторые разъяснения формулы (18). Пусть $\lambda = 0$, тогда $k = e = const$ и из (18) следует:

$$J = e\tau_i^2, \quad (19)$$

т.е. параметр $J(t)$ не зависит от скорости нагружения и определяется только уровнем достигнутого напряжения. Значение постоянной $\lambda = 0$ относится к материалу, имеющему «идеально-стабильную структуру».

Пусть далее $\lambda = 1$, тогда $K(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, и из формулы (19) получим:

$$J(t) = e \frac{\partial \tau_i^2}{\partial t}. \quad (20)$$

В этом случае параметр $J(t)$ существенно зависит от скорости нагружения и характеризует материал с «идеально неустойчивой структурой».

Остановимся на простейших следствиях формулы (18). Пусть интенсивность касательных напряжений увеличивается с постоянной скоростью v , т.е. $\tau_i = vt$, при этом из (18) получим

$$J(t) = \frac{2v^2 e}{2 - \lambda} t^{2-\lambda} = \frac{2e}{2 - \lambda} \tau_i^{2-\lambda} \cdot v^\lambda, \quad (21)$$

т.е. $J(t)$ — увеличивается как с ростом скорости нагружения v ($\lambda > 0$), так и с повышением уровня напряжений. Этим отражается экспериментальный факт увеличения локальных пиковых напряжений на структурных концентраторах реального твердого тела с ростом уровня напряжений τ_i и увеличения скорости нагружения v .

Пусть далее τ_i увеличивается с постоянной скоростью до некоторого значения момента времени t_1 , а при $t > t_1$ интенсивность τ_i постоянна. В этом случае

$$J(t) = \frac{2e\lambda^2}{2 - \lambda} \left[t^{2-\lambda} - (t - t_1)^{2-\lambda} - (2 - \lambda)t_1(t - t_1)^{1-\lambda} \right]. \quad (22)$$

Из (22) следует, что параметр $J(t)$ убывает со временем ($\lambda > 0$) при постоянном τ_i , отражая этим уменьшение энергии локальных искажений микроструктурного уровня реального тела во времени. Данная ситуация имеет место при явлениях ползучести и релаксации напряжений. Отметим, что введение параметра неоднородности $J(t)$ в рамках структурно — аналитической модели (9) - (18) позволяет решать нетривиальные задачи прочностного анализа при разнообразных режимах скоростного и температурного воздействия в условиях сложного напряжённого состояния и произвольных траекторий нагружения в пространстве напряжений.

3. Пример численного моделирования и исследование влияния скорости нагружения на предел пропорциональности. Рассмотрим чистое с произвольной скоростью нагружения (ν). При этом имеем

$$\sigma_{33} = \nu t, \quad \tau_m = \frac{\sigma_{33}}{2} = \frac{\nu t}{2}, \quad \tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \nu t. \quad (23)$$

Обозначим через t_0 момент достижения напряжения предела пропорциональности σ_m . Используя аналитические соотношения [1,3] для макромасштабного уровня микро-1, можно выписать соответствующие выражения для условия пластичности на микроструктурном уровне микро-1

$$H(\tau_{31} \text{sign} \tau_{31} - \tau^s) = 1; \quad (24)$$

$$\tau^s = \tau_0^s = f[I(t), \tau_i(t)]; \quad U(t) = \frac{3}{4} e_1 \tau_i^2;$$

$$U(t) = \frac{3}{4} e_1 \tau_i^2;$$

$$f[I(t), \tau_i(t)] = P \left[1 + \frac{[I(t) - U(t) \text{sign}[I(t) - U(t)]]}{1 + I(t)^{\frac{1}{2}} U(t)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (25)$$

Для $I(t)$ согласно (23) имеем

$$I(t) = \frac{3}{2} e \frac{\nu^2 t^{2-\lambda}}{2-\lambda}.$$

Используя критериальное условие (24) для чистого растяжения, получим формулу для расчета предела пропорциональности $\sigma_{np}(t_0)$ в виде

$$\sigma_{np}(t_0) = 3P_0(1-\lambda) \left[1 + \frac{[I(t) - U(t) \text{sign}[I(t) - U(t)]]}{1 + I(t)^{\frac{1}{2}} U(t)^{\frac{3}{2}}} \right] I(t_0)^{\frac{1}{3}}. \quad (26)$$

На основании формулы (26) построены графики зависимостей пределов пропорциональности от скорости нагружения и представлены на рисунке 3. Вычисления производились при следующих значениях постоянных: кривой 1 соответствуем значения $P = 100$ МПа, $\lambda = 0,85$; кривой 2 – $P = 280$ МПа, $\lambda = 0,45$; кривой 3 – $P = 860$ МПа; $\lambda = 0,01$.

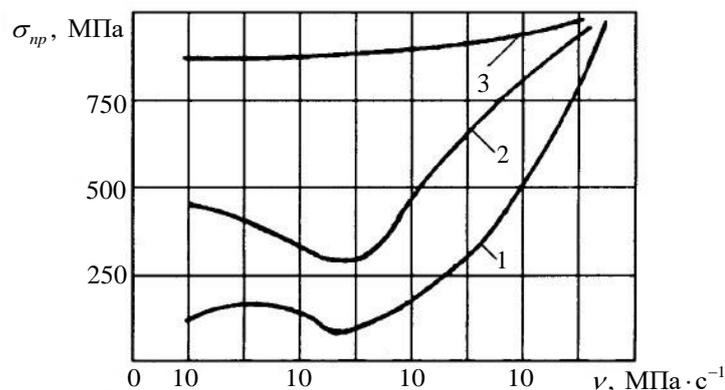


Рис. 3. Теоретическая зависимость предела пропорциональности σ_{np} от скорости нагружения ν для различных модельных материалов:
 1 – $P = 100$ МПа; $\lambda = 0,85$; 2 – $P = 280$ МПа; $\lambda = 0,45$;
 3 – $P = 860$ МПа; $\lambda = 0,01$

Константы e и e_1 во всех случаях были приняты одинаковыми $e = 0,05 \left[(\text{МПа})^{-2} (c)^\lambda \right]$; $e_1 = 0,01 \left[(\text{МПа})^{-2} \right]$.

Анализируя вышеуказанные диаграммы, можно отметить следующее: кривая 1 относится к случаю, когда материал весьма чувствителен к скорости нагружения и напоминает, по характеру, зависимость предела пропорциональности некоторых магниевых и алюминиевых сплавов. На этой кривой ярко выражено наличие двух экстремумов: максимума в зоне весьма малых скоростей и минимума. Кривая 2 относится к случаю, когда материал менее чувствителен к скорости деформирования, что характеризуется исчезновением области действия механизмов диффузионной ползучести. Такая кривая характерна для чистых металлов, в частности, для технически чистого железа. Кривая 3 относится к различного рода высокопрочным сталям, деформируемым при нормальных температурах.

На рисунке 4 представлена зависимость предела пропорциональности Армко железа (τ_0) от скорости нагружения. Здесь \blacktriangle обозначает экспериментальные значения, а сплошная линия — теоретическая, построенная согласно предложенным выше формулам при значениях констант: $P = 280$ МПа, $\lambda = 0,4$; $e = 0,05 \left[(\text{МПа})^{-2} (c)^\lambda \right]$; $e_1 = 0,01 \left[(\text{МПа})^{-2} \right]$.

Рассмотрим зависимость предела пропорциональности от уровня и скорости предварительного нагружения в макроупругой области.

Пусть в начале образец нагружается с постоянной скоростью ν до некоторого напряжения $\sigma_k < \sigma_{np}(\nu)$, затем разгружается со скоростью ν и вновь сразу нагружается с первоначальной скоростью ν (рисунок 5, а) до предела пропорциональности σ_{np} .

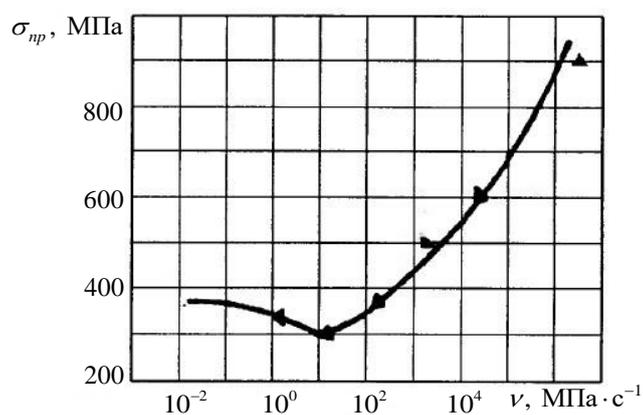
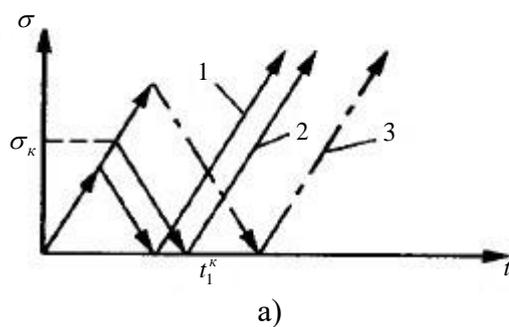
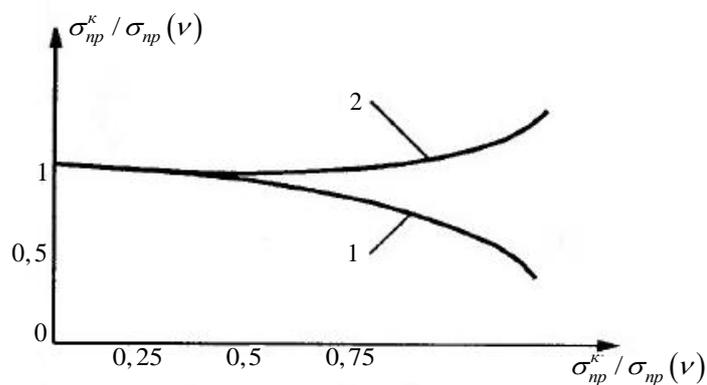


Рис. 4. Теоретическая зависимость предела пропорциональности σ_{np} от скорости нагружения ν (сплошная линия $P = 280$ МПа; $\lambda = 0,4$); точки \blacktriangle — экспериментальные данные для железа Армко



а)



б)

Рис. 5. Результаты теоретического расчета зависимости $\sigma_{np}^k / \sigma_{np}$ от уровня предварительного нагружения для $\nu = 2 \cdot 10^7$ МПа·с⁻¹ при $P = 400$ МПа, $\lambda = 0,3$ (1) и $P = 100$ МПа, $\lambda = 0,3$ (2)

Определим зависимость σ_{np} от уровня нагружения σ_k . Рассмотрим три значения σ_k (рисунок 5, а), индекс k обозначает соответствующий номер. Согласно заданной программы нагружения имеем:

$$\sigma_{33}(t) = \begin{cases} \nu t, t \leq t_1^k \\ \nu(2t_1^k - t), t_1^k \leq t \leq t_2^k \\ \nu(2t_1^k - 2t_2^k + t), t > t_2^k \end{cases} \quad (27)$$

Обозначив через t_0^k момент достижения напряжения $\sigma_{33}(t)$ предела пропорциональности σ_{np}^k при указанном режиме нагружения, получим условие пластичности

$$\sigma_{np}(t_0^k) = f \left[I(t_0^k), \tau_i(t_0^k) \right]. \quad (28)$$

Примем оператор f в виде (25)

$$f \left[I(t), \tau_i(t) \right] = P \left[1 + \frac{\left[I - U(t) \operatorname{sign} [I(t) - U(t)] \right]}{1 + I(t)^{\frac{1}{2}} U(t)^{\frac{3}{2}}} I(t)^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (29)$$

В рассматриваемом случае для $I(t)$ имеем

$$I(t) = \frac{2e}{2-\lambda} \nu^2 \begin{cases} t^{2-\lambda}, 0 < t < t_1; \\ t^{2-\lambda} - 2(2-\lambda)t_1(t-t_1)^{1-\lambda}, t_1 \leq t \leq t_2; \\ t^{2-\lambda} - 2(2-\lambda)t_1(t-t_1)^{1-\lambda} - (t-t_2)^{1-\lambda}, t \geq t_2. \end{cases} \quad (30)$$

Подставляя (29) и (28) в (28), получим формулу для определения предела пропорциональности в зависимости от величины напряжения σ_k , до которого образец был предварительно нагружен:

$$\sigma_{np}^k = 2P_0 \left[1 + \frac{\left[I(t_0^k) - T(t_0^k) \right]}{1 + I(t_0^k)^{\frac{1}{2}} T(t_0^k)^{\frac{3}{2}}} I(t_0^k)^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (31)$$

По формуле (31) построены зависимости σ_{np} от величины σ_k для двух различных значений постоянных материала (рисунок 5). При расчетах были приняты следующие константы: для кривой 1 – $P = 400$ МПа, $\lambda = 0,3$; для кривой 2 – $P = 100$ МПа, $\lambda = 0,5$. В обоих случаях

деформирование осуществлялось с одной и той же скоростью нагружения $v = 200 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$.

Их приведенных графиков видно, что при одном и том же режиме нагружения σ_{np} для различных материалов изменяется совершенно по-разному. Для материалов, соответствующих кривой 1, принятый режим нагружения упрочняет его (σ_{np} увеличивается, рисунок 5, б), а для материалов, соответствующих кривой 2, разупрочняет.

Рассмотрим влияние кратковременных выдержек материала под нагрузкой в макроупругой области на его механические свойства. Релаксация пиковых микронапряжений протекает во много раз интенсивнее, если образец в процессе деформирования выдерживается при постоянном уровне приложенного напряжения. В работе [3] было выдвинуто предположение, что выдержка материала под постоянным значением нагрузки является фактором, стимулирующим развитие различных физических процессов (обусловленных релаксацией пиковых напряжений), изменяющих механические характеристики материала. Поэтому представляет интерес исследовать влияние уровня напряжения и длительности его действия на упрочнения материала.

Пусть вначале растягивающее напряжение $\sigma(t)$ увеличивается с постоянной скоростью v до заданного уровня $\sigma(t_1) < \sigma_{np}(v)$, и до некоторого времени $t = t_2$ держится постоянным, а при $t > t_2$ вновь нагружается с первоначальной скоростью. Рассматриваемая программа показана на рисунке (6, а). В этом случае имеем

$$\sigma(t) \begin{cases} vt, & 0 < t < t_1; \\ vt_1, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ v(t_1 - t_2 + t), & t \geq t_2. \end{cases} \quad (32)$$

Параметр неоднородности $I(t)$ в этом случае будет иметь вид

$$I(t) = \frac{2e}{2-\lambda} v^2 \begin{cases} t^{2-\lambda}, & 0 < t < t_1; \\ t^{2-\lambda} - (t-t_1)^{2-\lambda} - (2-\lambda)t_1(t-t_1)^{1-\lambda}, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ t^{2-\lambda} - (t-t_1)^{2-\lambda} + (t-t_2)^{2-\lambda} - (2-\lambda)t_1[(t-t_1)^{1-\lambda} - (t-t_2)^{1-\lambda}], & t \geq t_2. \end{cases} \quad (33)$$

Подставляя (32) и (31) в (31), получим зависимость σ_{np} от уровня предварительного нагружения, времени выдержки $(t_2 - t_1)$ и скорости v .

На рисунке (6, б) приведены зависимости, полученные по формулам (31), (32) и (33), приращения предела пропорциональности $\Delta\sigma_{np}$ от v для разных уровней напряжений, при которых производили предварительную выдержку материала. Кривая 1 – для σ_1 ; кривая 2 – для $\sigma_2 > \sigma_1$ (рисунок 6,б). Расчеты проводились при значениях

$\nu_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ МПа·с⁻¹; $\nu_2 = 2$ МПа·с⁻¹; $\nu_3 = 2 \cdot 10^5$ МПа·с⁻¹; $\sigma_2 = 400$ МПа; $\sigma_1 = 2200$ МПа и при значениях постоянных материала $P = 100$ МПа; $\lambda = 0,5$. Из рисунка видно, что с ростом величины прилагаемого усилия $|\Delta\sigma_{np}|$ увеличивается, что полностью согласуется с наблюдаемым фактом стимулирующего влияния уровня приложенного напряжения на механические свойства материала.

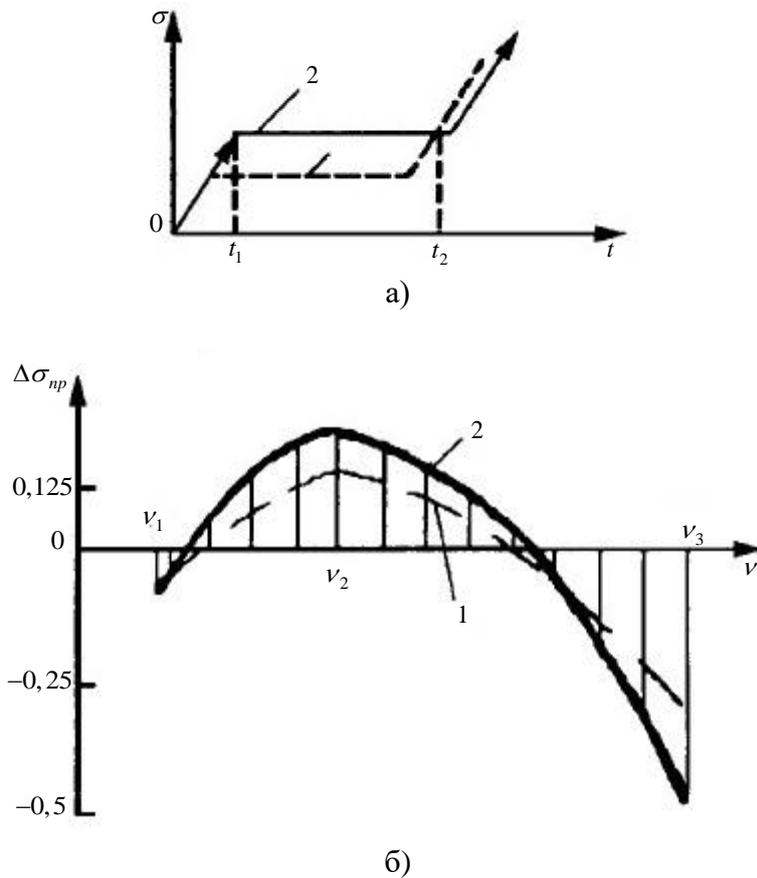


Рис. 6. Результаты теоретического расчета зависимости $\sigma_{np}^k / \sigma_{np}$ от уровня предварительного нагружения для $\nu = 2 \cdot 10^7$ МПа·с⁻¹ при $P = 400$ МПа, $\lambda = 0,3$ (1) и $P = 100$ МПа, $\lambda = 0,3$ (2)

Заключение. На основе методов структурно-аналитической мезомеханики [1-5] и развиваемых представлений автоволновых процессов упругопластической деформации [1,2,6-9], на микроструктурном масштабном уровне, разработана двухуровневая структурно-аналитическая модель локализованной пластичности. В рамках предложенной модели появляется возможность анализировать развитие пластиче-

ского течения, обусловленного результатом совместного действия релаксационных сдвигов и испускания-поглощения импульсов акустической эмиссии, управляющих этими сдвиговыми процессами при произвольном напряженном состоянии в условиях сложных траекторий нагружения в пространстве напряжений. Разработанная модель неупругой деформации в условиях инициирования процессов автоколебаний дефектов структуры позволяет прогнозировать механическое поведение материалов в нетривиальных температурно-скоростных режимах нагружения, включая активную деформацию, ползучесть, релаксацию напряжений и их произвольные комбинации

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зуев Л.Б. *Автоволновая пластичность. Локализация и коллективные моды*. Москва, Физматлит, 2018, 201 с.
- [2] Зуев Л.Б., Баранникова С.А. Автоволновая пластичность. Принципы и возможности. *Журнал технической физики*, 2020, Т. 90, вып. 5, с. 773-781.
- [3] Голенков В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. *Структурно-аналитическая мезомеханика и её приложения*. Москва, Машиностроение, 2009, 635 с.
- [4] Зуев Л. Б., Баранникова С.А., Лунёв А.Г. *От макро к микро. Масштабы пластической деформации*. Новосибирск, Наука, 2018, с. 131.
- [5] Мышляев, М. М. Структурно-кинетический принцип сверхпластичности и ползучести металлов и сплавов. *Деформация и разрушение материалов*, 2005, № 6, с. 19-24.
- [6] Billingsley J.P. The possible influence of the de Broglie momentum-wavelength relation on plastic strain «autowave» phenomena in «active materials». *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, no. 12, pp. 4221-4234.
- [7] Баранникова С.А., Надежкин М.В., Зуев Л.Б. О взаимосвязи векторов Бюргерса дислокаций и картин локализации пластической деформации при сжатии щелочно-галлоидных кристаллов. *Письма в журнал технической физики*, 2011, Т. 37, № 16, с. 15-21. DOI: 10.1134/S1063785011080177
- [8] Малинин В. Г., Савич В.Л., Отев К.С. Применение энергетического метода к прочностной оценке ресурса трубопровода при наличии макродефекта. *Строительная механика и конструкции*, 2023, № 1(36), с. 42-54. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.005
- [9] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Книга 1. Процессы сложного деформирования*. Тверь, ТГТУ, 2003, 172 с. ISBN: 5-7995-0236-1.
- [10] Greiter H. Nanostructured materials: basis concept and microstructure. *Acta mater*, 2000, vol. 48, pp. 1-29.

Статья поступила в редакцию 26.01.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Малинин В. Г., Малинина Н. А., Савич В. Л., Малинин В. В., Аскама Пенья А., Отев К. С. Структурно – аналитическая модель пластической деформации, учитывающая автоволновые процессы генерации дефектов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 43–64.

Малинин Владислав Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Технологический факультет, ФГБОУ ВО «УГТУ». e-mail: malinin.mvg@yandex.ru

Малинина Надежда Аркадьевна — д-р техн. наук, профессор, Технологический факультет, ФГБОУ ВО «УГТУ». e-mail: malinina2006@yandex.ru

Савич Василий Леонидович — канд. техн. наук, заведующий кафедрой механики, ФГБОУ ВО «УГТУ». e-mail: vsavich@ugtu.net

Малинин Владимир Владиславович — канд. техн. наук, ведущий инженер конструкторского бюро ПАО «Туполев».

Аскама Пеня Алексис — аспирант кафедры техносферной безопасности, ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина».

Отев Кирилл Сергеевич — аспирант кафедры механики, Технологический факультет, ФГБОУ ВО «УГТУ». e-mail: kotev@ugtu.net

A structural and analytical model of plastic deformation taking into account autowave processes of defect generation

© V. G. Malinin, N. A. Malinin, V. L. Savich, V. V. Malinin,
A. A. Askama Penya, K. S. Otev

¹FSBEI HE «USTU», Komi Republic, Ukhta, 169300, Russia

²Tupolev, Moscow, 101000, Russia

³FSBEI HE Orel SAU, Oryol region,
Orel, 302001, Russia

A variant of the autowave model for generating structural imperfections when initiating localized plastic flow of crystalline bodies in a complex stress state is considered, based on the methods of the structural and analytical theory of strength and the principles of synergetics of the elastoplastic deformation process. The formulated model takes into account the development of processes at two interrelated scale and structural levels, allows us to predict the features of elastoplastic deformation of crystalline materials with complex loading trajectories in stress space and arbitrary stress change programs over time, takes into account the effects of localization and relaxation of energy in structural concentrators on the processes of self-oscillation of zones of structural concentrators during elastoplastic deformation.

Keywords: *autowave model, structural and analytical theory of strength, plastic deformation, scale level, structural level, stress*

REFERENCES

- [1] Zuev L.B. *Avtovolnovaya plastichnost'. Lokalizaciya i kollektivnye mody* [Autowave plasticity. Localization and collective modes]. Moscow, Fizmatlit, 2018, 201 p.
- [2] Zuev L.B., Barannikova S.A. Autowave plasticity. Principles and possibilities. *Technical Physics*, 2020, vol. 90, no.5, pp. 773-781.

- [3] Golenkov V.A., Malinin V. G., Malinina N. A. *Strukturno-analiticheskaya mezomekhanika i eyo prilozheniya* [Structural and analytical mesomechanics and its applications]. Moscow, Mashinostroenie [Mechanical engineering], 2009, 635 p.
- [4] Zuev L. B., Barannikova S. A., Lunev A. G. *Ot makro k mikro. Masshtaby plasticheskoy deformatsii* [From macro to micro. The scale of plastic deformation]. Novosibirsk, Nauka publ., 2018, p.131.
- [5] Myshlyaev M. M. The structural and kinetic principle of superplasticity and creep of metals and alloys. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2005, no. 6, pp. 19-24.
- [6] Billingsley J.P. The possible influence of the de Broglie momentum-wavelength relation on plastic strain «autowave» phenomena in «active materials». *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, no. 12, pp. 4221-4234.
- [7] Barannikova S.A., Reliable M. V., Zuev L. B. O vzaimosvyazi vektorov Byurgersa dislokatsij i kartin lokalizatsii plasticheskoy deformatsii pri szhatii shchelochno-galoidnyh kristallov [On the relationship between Burgers vectors of dislocations and localization patterns of plastic deformation during compression of alkali halide crystals]. *Technical Physics Letters*. 2011, vol. 37, iss. 16. pp. 15-21. DOI: 10.1134/S1063785011080177
- [8] Malinin V. G., Savich V. L., Otev K. S. Application of the energy method to the strength assessment of the pipeline resource in the presence of a macro defect. *Structural mechanics and structures*, 2023, no. 1(36), pp. 42-54. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.005.
- [9] Zubchaninov V. G., Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. *Eksperimental'naya plastichnost'. Kniga 1. Processy slozhnogo deformirovaniya* [Experimental plasticity. Book 1. Processes of complex deformation]. Tver: Tver State Technical University, 2003, 172 p. ISBN: 5-7995-0236-1.
- [10] Greiter H. Nanostructured materials: basis concept and microstructure. *Acta mater*, 2000, vol. 48, pp. 1-29.

Malinin V. G., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Faculty of Technology, FSBEI HE «USTU». e-mail: malinin.mvg@yandex.ru

Malinina N. A., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Faculty of Technology, FSBEI HE «USTU». e-mail: malinina2006@yandex.ru

Savich V. L., Cand. Sci. (Eng.), Head of the Department of Mechanics, FSBEI HE «USTU». e-mail: vsavich@ugtu.net

Malinin V.V., candidate of Technical Sciences, Leading engineer of the Design Bureau of PJSC Tupolev.

Askama Penya A., Graduate Student of the Department of Technosphere Safety, FSBEI HE Orel SAU.

Otev K.S., Graduate student of the Department of Mechanics, Faculty of Technology, FSBEI HE «USTU». e-mail: kotev@ugtu.net