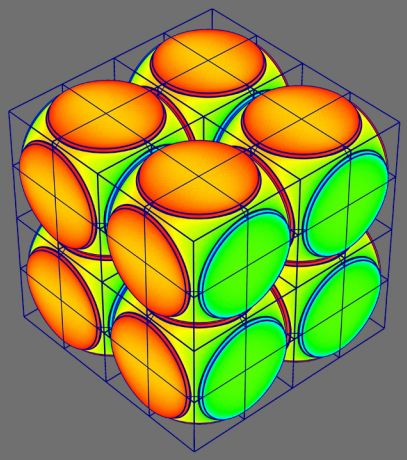
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 3, с. 18–42.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/346/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.112
18.01.2026 00:16:24

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-3-1842

# «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию

© Ю.И. Димитриенко, А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена проблема разработки универсального критерия длительной усталостной прочности изотропных материалов, у которых накопление повреждений существенно отличается при нагружении в области растяжения и сжатия. Обычно для моделирования долговечности таких материалов применяют диаграммы Гудмана, в которых учитывается зависимость долговечности от коэффициента асимметрии нагружения. Однако, эта модель, как правило содержит только одну так называемую S-N кривую, в следствие чего кривые усталостной долговесности при разных коэффициентах асимметрии оказываются самоподобными, что далеко не всегда наблюдается в экспериментальных данных. Кроме того, диаграммы Гудмана применимы только для циклических нагружений. В данной статье предложено дальнейшее развитие «химического» критерия, который был разработах ранее в авторских работах, и который применим для широкого спектра нагрузок, как длительных статических, так и циклических с произвольной формой цикла нагружения. Развитие «химического» критерия усталостной прочности осуществлено за счет раздельного учета накоплений повреждений в области растяжения и сжатия. Для смешанных режимов нагружения в области растяжения-сжатия происходит суммирование особым образом накопления повреждений на участках растяжения и сжатия. Разработана методика определения констант предложенной модели усталостной долговечности. Показано, как строятся диаграммы Гудмана для разработанного варианта критерия усталостной долговечности. Рассмотен пример применения «химического» критерия для моделирования усталостной долговечности стали 34CrNiMo6.*

***Ключевые слова:*** *«химический» критерий, усталость, долговечность, накопление повреждений, разносопротивляемость, растяжение-сжатие, диаграммы Гудмана*

**Введение.** Моделирование долговечности конструкций при переменных, длительно действующих нагрузках, является одной основных задач проектирования практически всех видов ответственных изделий машиностроительной, авиационной, судостроительной, строительной, энергетической отраслей промышленности. Существует большое число различных критериев длительной прочности конструкционных материалов, укажем лишь некоторые из них [1-12]. Большинство этих критериев относятся к узкому классу процессов нагружения, например, только к циклическому, монограмническому нагружению, или длительному статическому нагружению и т.п. [3,4,7,8]. Существенно меньше существует универсальных критериев, применимых для широкого спектра процессов нагружения. К таким универсальным критериям относятся, например, интегральный критерий длительной прочности А.А. Ильюшина [1] и критерий Бейли [2]. Однако и они имеют

ограничение: если осуществлять калибровку этих моделей (процедуру определения материальных констант моделей на основе обработки экспериментальных данных) на одном классе нагружения, например, длительном, то для циклических нагружений ошибка прогнозирования долговечности будет достаточно большой, и наоборот.

В работах [13,14] был предложен так называемый «химический» критерий длительной прочности материалов, относящийся к универсальным критериям. Название «химический» было дано потому, что этот критерий был основан на рассмотрении химического потенциала Боуэна [15] для вязкоупругих сред, как меры предельного состояния материала, достижение которой предельного значения приводит к зарождению макроразрушения. Химический потенциал для газов широко используется для моделирования фазовых превращений и химических реакций в физической химии. В работах [13,14] была отмечена аналогия между предельными состояниями различной природы: нарушением связей между молекулами или атомами при фазовых или химических превращениях и механических нагружениях. На основе этой аналогии был предложен вид параметра повреждаемости в «химическом» критерии длительной прочности, который имеет интегральную (наследственную) форму по отношению к компонентам тензора напряжений. Структура этой интегральной зависимости в данном критерии оказалась удачной, что позволило успешно применять «химический» критерий как для длительных статических, так и для циклических нагружений, в том числе с формой цикла, отличающейся от моногармонической [16-18].

Однако для материалов, у которых накопление повреждений происходит по-разному в области растяжения и сжатия, «химический» критерий давал не всегда хорошие результаты, поскольку в нем эффект разносопротивляемости материалов накоплению повреждений учитывался только одним поправочным коэффициентом, что не позволяло применять критерий в широком диапазоне видов нагрузок и для разных материалов.

В данной работе предложено дальнейшее развитие химического критерия усталостной прочности (долговечности), в котором накопления повреждений при растяжении и сжатии учитываются как независимые, для каждого вида нагружения вводится самостоятельный набор интегральных ядер, а смешанных режимах нагружения эти ядра суммируются определенным образом.

**«Химический критерий» длительной прочности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию.** Разрушение изотропного материала точке (в узле КЭ, в точке КЭ) конструкции наступает, когда впервые в момент времени $t_*$ выполняется условие

$$z\left(t_*\right)=1, \tag{1}$$

где $z(t)$ — параметр повреждаемости.

Параметр повреждаемости $z(t)$ согласно «химическому критерию» [13] длительной и усталостной прочности, в основе которого лежит концепция разрушения материала при достижении химическим термодинамическим потенциалом [15] предельного значения, состоит из 3-х частей

$$z(t) = z_0 + z_r(t) + z_d(t) \tag{2}$$

где $z_0$ — мгновенная часть повреждений, описывающая условно мгновенную прочность материала, не зависящую от длительности и истории действия напряжений; $z_r(t)$ — обратимая часть повреждений, которая описывает накопление повреждений при длительно действующих нагрузках, в том числе переменных (т.е. явление усталости), но без учета длительного «отдыха» , на этапах отдыха, когда нет нагрузок, эта часть повреждений постепенно залечивается и стремится к нулю; $z_d(t)$ — необратимая часть повреждений, которая описывает накопление повреждений при длительно действующих нагрузках, в том числе переменных (т.е. явление усталости), и не убывает на этапах «отдыха».

**Модель мгновенных повреждений.** Рассмотрим далее только изотропные материалы. Для изотропных материалов параметр $z_0$ — выбирается согласно «трех-поверхностной модели» статической прочности, предложенной в работе [18]

$$z_0 = \frac{\sigma = \sigma_{ii}}{3\sigma_S^2\left(1 + B_C V(\sigma)\right)} + \frac{\sigma_+^2}{\sigma_{T+}^2} \tag{3}$$

здесь обозначены инварианты тензора напряжений: $\sigma$ — первый, $\sigma_u$ — второй, $\sigma_+$ и $\sigma_-$ — знакопостоянные:

$$\sigma = \sigma_{ii}\,,\ \sigma_\pm = \frac{1}{2}\left(|\sigma| \pm \sigma\right),\ \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij}}\,, \tag{4}$$

где $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений в декартовой с.к., а $\tilde{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij}$, компоненты девиатора тензора напряжений. Далее будут использованы также компоненты $s_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{s}_{ij}$.

В выражении (3) введены также обозначения для $\sigma_T$, $\sigma_C$, $\sigma_S$ — пределов мгновенной прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, которые связаны между собой следующими соотношениями: $\sigma_C \geq \sqrt{3}\sigma_S \geq \sigma_T > 0$.

Константы $B_C$ и $\sigma_{T+}$ (предел прочности при всестороннем растяжении) выражаются через пределы статической прочности при растяжении, сжатии и сдвиге

$$B_C = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1\right)\frac{1}{\sigma_C}, \ \sigma_{T+} = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2}\right)^{-1/2}. \tag{5}$$

Функция $V(\sigma)$ в выражении (3) описывает гладкий переход накопления микро-повреждений между областями растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 0 \\ -\sigma, & \text{если} \quad -\sigma_C < \sigma < 0 \\ \sigma_C & \text{если} \quad \sigma < -\sigma_C \end{cases}. \tag{6}$$

Модель (3) с учетом (6) позволяет учитывать эффект различия накопления повреждений в области растяжения и сжатия, который характерен для большинства материалов. По сравнению с работой [18] в выражении (3) константы прочности при растяжении и сдвиге являются независимыми и не связаны соотношением $\sqrt{3}\sigma_S = \sigma_T$. При наличии этого соотношения предел прочности при всестороннем растяжении $\sigma_{T+} \to \infty$ и второе слагаемое в (3) обращается в ноль.

**Модель накопления обратимых повреждений.** Для обратимой части накопления повреждений $z_r(t)$ в «химическом критерии» длительной прочности принимается следующая модель

$$\begin{gathered} z_r(t) = \int_0^t K(t-\tau,\sigma)\sigma_u^2(\tau)d\tau - \\ -\int_0^t\int_0^t \Gamma\ (t-\tau_1,\sigma)\Gamma(t-\tau_2,\sigma)s_{ij}(\tau_1)s_{ij}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\ +\int_0^t K_1(t-\tau,\sigma)\sigma^2(\tau)d\tau - \left(\int_0^t \Gamma_1(t-\tau,\sigma)\sigma(\tau)d\tau\right)^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $K(t-\tau,\sigma)$ и $\Gamma(t-\tau_2,\sigma)$ ядра накопления повреждений, обусловленные предысторией девиаторной части напряжений $s_{ij}(\tau)$, а $K_1(t-\tau,\sigma)$ и $\Gamma_1(t-\tau,\sigma)$ — ядра накопления повреждений, обусловленные предысторией шаровой части напряжений $\sigma(\tau)$.

Наличие двух ядер для каждой части напряжений: девиаторной и шаровой — это специфическая особенность именно «химического» критерия длительной прочности, оно позволяет успешно описывать эффект возрастания повреждений при переменных (циклических) нагружениях по сравнению со статическими напряжениями.

Для материалов, разносопротивляющихся при растяжении и сжатии, ядра $K(t-\tau,\sigma)$, $\Gamma(t-\tau_2,\sigma)$, $K_1(t-\tau,\sigma)$ и $\Gamma_1(t-\tau,\sigma)$ будем полагать зависящими от знака первого инварианта $\sigma$

$$\Omega(t-\tau,\sigma)=\Omega^+(t-\tau)h^+(\sigma)+\Omega^-(t-\tau)h^-(\sigma),\ \Omega=\{K,K_1,\Gamma,\Gamma_1\},\quad (8)$$

где обозначены функции Хевисайда

$$h^+(\sigma)=\begin{cases}1, \text{ если } \sigma\ge 0\\ 0, \text{ если } \sigma<0\end{cases},\ h^-(\sigma)=1-h^+(\sigma).\quad (9)$$

Для всех 8 ядер принимается модель степенных функций

$$\begin{gathered}K^\pm(t)=K_0^\pm t^{-\alpha^\pm},\ \Gamma^\pm(t)=\Gamma_0^\pm t^{-\beta^\pm},\\ K_1^\pm(t)=K_{10}^\pm t^{-\alpha_1^\pm},\ \Gamma_1^\pm(t)=\Gamma_{10}^\pm t^{-\beta_1^\pm},\end{gathered}\quad (10)$$

то есть ядра в (7) полагаются слабосингулярными, где

$$K_0^\pm,\ \Gamma_0^\pm,\ K_{10}^\pm,\ \Gamma_{10}^\pm \text{ и } \alpha^\pm,\ \beta^\pm,\ \alpha_1^\pm,\ \beta_1^\pm,\quad (11)$$

— константы модели.

**Модель накопления необратимых повреждений.** Для необратимой части повреждений $z_d(t)$ в «химическом критерии» длительной прочности принимается следующая модель:

$$\begin{gathered}z_d(t)=K_d^+\left(\int_0^t \sigma_u^{\frac{2}{1-\alpha^+}}(\tau)h^+(\sigma)d\tau\right)^{1-\alpha^+}+K_d^-\left(\int_0^t \sigma_u^{\frac{2}{1-\alpha^-}}(\tau)h^-(\sigma)d\tau\right)^{1-\alpha^-}-\\ -\Gamma_d^+\left(\int_0^t \sigma_u^{\frac{1}{1-\beta^+}}(\tau)h^+(\sigma)d\tau\right)^{2-2\beta^+}-\Gamma_d^-\left(\int_0^t \sigma_u^{\frac{1}{1-\beta^-}}(\tau)h^-(\sigma)d\tau\right)^{2-2\beta^-}+\\ +K_{1d}^+\left(\int_0^t \sigma^{\frac{2}{1-\alpha_1^+}}(\tau)h^+(\sigma)d\tau\right)^{1-\alpha_1^+}-\Gamma_{1d}^+\left(\int_0^t \sigma^{\frac{1}{1-\beta_1^+}}(\tau)h^+(\sigma)d\tau\right)^{2-2\beta_1^+}+\\ +K_{1d}^-\left(\int_0^t \sigma^{\frac{2}{1-\alpha_1^-}}(\tau)h^-(\sigma)d\tau\right)^{1-\alpha_1^-}-\Gamma_{1d}^-\left(\int_0^t \sigma^{\frac{1}{1-\beta_1^-}}(\tau)h^-(\sigma)d\tau\right)^{2-2\beta_1^-}.\end{gathered}\quad (12)$$

Здесь

$$K_d^+,\ K_d^-,\ \Gamma_d^+,\ \Gamma_d^-,\ K_{1d}^+,\ K_{1d}^-,\ \Gamma_{1d}^+,\ \Gamma_{1d}^-\quad (13)$$

— константы модели.

Модель (12) учитывает: различие накоплений необратимых повреждений при растяжении и сжатии (учитывается функциями $h^+(\sigma)$ и $h^-(\sigma)$); различие накоплений повреждений, обусловленных

предысторией девиаторной части напряжений $s_{ij}(\tau)$ (наличие первых 4 интегралов в (12)), и шаровой части напряжений $\sigma(\tau)$ (наличие 5..8-го интегралов в (12)); эффект возрастания необратимых повреждений при снижении напряжений, которое характерно для циклических нагружений (за счет наличия интегралов в (12) со знаком минус).

**Простое нагружение.** Рассмотрим процесс простого (пропорционального) нагружения, когда все напряжения изменяются во времени пропорционально одной функции времени $\zeta(t)$ (функции нагружения):

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 \zeta(t), \tag{14}$$

где $\sigma_{ij}^0 = \text{const}$. При решении задач расчета упругих конструкций с помощью МКЭ, функция $\zeta(t)$ обычно полагается заданной, а напряжения $\sigma_{ij}^0$ вычисляются. Поэтому знак функции $\zeta(t)$ может меняться, если нагружение происходит по заданному циклу растяжение-сжатие, и знак у напряжений $\sigma_{ij}^0$ тоже может меняться при переходе от одной точки конструкции к другой.

В силу (14) величины $s_{ij}$, $\sigma_u$ и $\sigma_-$ также пропорциональны функции $\zeta$

$$\begin{gathered} s_{ij}(t) = s_{ij}^0 \zeta(t),\ \sigma_u(t) = \sigma_u^0 \left|\zeta(t)\right|,\ \sigma(t) = \sigma^0 \zeta(t), \\ \sigma_\pm(t) = \sigma_\pm^0 \zeta(t),\ s_{ij}^0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sigma_{ij}^0 - \frac{1}{3}\sigma^0 \delta_{ij}\right), \\ \sigma^0 = \sigma_{kk}^0,\ \ \sigma_u^0 = (s_{ij}^0 s_{ij}^0)^{1/2},\quad \sigma_\pm^0 = \frac{1}{2}(|\sigma_{kk}^0| \pm \sigma_{kk}^0). \end{gathered} \tag{15}$$

Поскольку знак первого инварианта (+ или -) $\sigma(\tau) = \sigma^0 \zeta(\tau)$ определяется сочетанием знаков функций $\sigma^0$ и $\zeta(\tau)$, то функции Хевисайда (9) могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{gathered} h^+\left(\sigma(\tau)\right) = h^+\left(\sigma^0\right) h^+\left(\zeta(\tau)\right) + h^-\left(\sigma^0\right) h^-\left(\zeta(\tau)\right), \\ h^-\left(\sigma(\tau)\right) = h^+\left(\sigma^0\right) h^-\left(\zeta(\tau)\right) + h^-\left(\sigma^0\right) h^+\left(\zeta(\tau)\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Подставляя выражения (15) и (16) в (7), получаем, что для простого нагружения обратимую часть накопления повреждений $z_r(t)$ можно записать в виде

$$z_r(t) = \sigma_u^{02} \Phi\left(t, \sigma^0\right) + \sigma^{02} \Phi_1\left(t, \sigma^0\right), \tag{17}$$

где обозначены функции

$$\begin{aligned}\Phi\left(t,\sigma^0\right)&=h^+\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{K}^+\left(t\right)-\tilde{\Gamma}^+\left(t\right)\right)+h^-\left(\sigma^0\right)(\tilde{K}^-\left(t\right)-\tilde{\Gamma}^-\left(t\right)),\\ \Phi_1\left(t,\sigma^0\right)&=h^+\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{K}_1^+\left(t\right)-\tilde{\Gamma}_1^+\left(t\right)\right)+h^-\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{K}_1^-\left(t\right)-\tilde{\Gamma}_1^-\left(t\right)\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь введены обозначения для функций, не зависящих от напряжений $\sigma_{ij}^0$

$$\begin{aligned}\tilde{K}^+(t)&=\int_0^t\left(K^+\left(t-\tau\right)h^+(\zeta)+K^-\left(t-\tau\right)h^-(\zeta)\right)\zeta^2d\tau,\\ \tilde{K}^-(t)&=\int_0^t\left(K^+\left(t-\tau\right)h^-(\zeta)+K^-\left(t-\tau\right)h^+(\zeta)\right)\zeta^2d\tau,\\ \tilde{\Gamma}^+(t)&=\left(\int_0^t\Gamma^+\left(t-\tau\right)h^+(\zeta)\zeta(\tau)d\tau\right)^2+\left(\int_0^t\Gamma^-\left(t-\tau\right)h^-(\zeta)\zeta(\tau)d\tau\right)^2,\\ \tilde{\Gamma}^-(t)&=\left(\int_0^t\Gamma^+\left(t-\tau\right)h^-(\zeta)\zeta\ (\tau)d\tau\right)^2+\left(\int_0^t\Gamma^-\left(t-\tau\right)h^+(\zeta)\zeta(\tau)d\tau\right)^2.\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогичный вид имеют функции, описывающие объемное накопление повреждений $\tilde{K}_1^+(t)$, $\tilde{\Gamma}_1^+(t)$, $\tilde{K}_1^-(t)$, $\tilde{\Gamma}_1^-(t)$.

Подставляя выражения (15) и (16) в (12) , получаем, что для простого нагружения необратимую часть накопления повреждений $z_d(t)$ можно записать в виде

$$z_d(t)=\sigma_u^{02}\Phi_d\left(t,\sigma^0\right)+\sigma^{02}\Phi_{1d}\left(t,\sigma^0\right). \tag{20}$$

где обозначены функции

$$\begin{aligned}\Phi_d\left(t,\sigma^0\right)&=h^+\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{N}^+(t)-\tilde{Q}^+(t)\right)+h^-\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{N}^-(t)-\tilde{Q}^-(t)\right),\\ \Phi_{1d}\left(t,\sigma^0\right)&=h^+\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{N}_1^+(t)-\tilde{Q}_1^+(t)\right)+h^-\left(\sigma^0\right)\left(\tilde{N}_1^-(t)-\tilde{Q}_1^-(t)\right).\end{aligned} \tag{21}$$

где введены функции

$$\begin{aligned}\tilde{N}^+(t)&=K_d^+N^+(t)+K_d^-N^-(t),\ \tilde{Q}^+(t)=\Gamma_d^+Q^+(t)+\Gamma_d^-Q^-(t),\\ \tilde{N}^-(t)&=K_d^+N^\pm(t)+K_d^-N^\mp(t),\ \tilde{Q}^-(t)=\Gamma_d^+Q^\pm(t)+\Gamma_d^-Q^\mp(t),\end{aligned} \tag{22}$$

а также обозначены

$$\begin{aligned}N^+(t)&=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^+}}h^+(\zeta)d\tau\right)^{1-\alpha^+},\ N^\pm(t)=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^+}}h^-(\zeta)d\tau\right)^{1-\alpha^+},\\ N^\mp(t)&=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^-}}h^+(\zeta)d\tau\right)^{1-\alpha^-},\ N^-(t)=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^-}}h^-(\zeta)d\tau\right)^{1-\alpha^-},\\ Q^+(t)&=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^+}}h^+(\zeta)d\tau\right)^{2-2\beta^+},\ Q^\pm(t)=\left(\int_0^t\left|\zeta^{\frac{1}{1-\beta^+}}h^-(\zeta)d\tau\right)^{2-2\beta^+},\end{aligned} \tag{23}$$

$$Q^{\mp}(t)=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^-}}h^+(\zeta)d\tau\right)^{2-2\beta^-},\ Q^-(t)=\left(\int_0^t\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^-}}h^-(\zeta)d\tau\right)^{2-2\beta^-}.$$

Аналогичный вид имеют функции, описывающие объемное накопление повреждений $\tilde{N}_1^+(t)$, $\tilde{Q}_1^+(t)$, $\tilde{N}_1^-(t)$, $\tilde{Q}_1^-(t)$.

Мгновенные повреждения (3) для простого нагружения (14) вычисляются как значения параметра $z_0$, достигнутые при максимальных значениях инвариантов $\sigma_u$ и $\sigma_+$, которые стоят в числителях в (3). т.е.

$$z_0=\frac{\left(\max\sigma_u\right)^2}{3\sigma_S^2\left(1+B_CV\left(\sigma_m\right)\right)}+\frac{\left(\max\sigma_+\right)^2}{\sigma_{T+}^2},\tag{24}$$

где

$$\max\sigma_u=\sigma_u^0\max\left|\zeta(t)\right|,\ \max\sigma_+=\left|\sigma^0\right|\tilde{g}\left(\sigma^0,\zeta\right),$$

$$\tilde{g}\left(\sigma^0,\zeta\right)\equiv h^+\left(\sigma^0\right)\max\left(\zeta h^+\left(\zeta\right)\right)+h^-\left(\sigma^0\right)\left|\min\left(\zeta h^-\left(\zeta\right)\right)\right|,\tag{25}$$

$$\sigma_m=\frac{1}{2}\left(\max\sigma+\min\sigma\right)=\frac{1}{2}\sigma^0\left(\max\zeta(t)+\min\zeta(t)\right).$$

**Циклическое нагружение.** Рассмотрим случай циклического изменения напряжений по моногармоническому закону, когда функция нагружения $\zeta(t)$ имеет вид

$$\zeta(t)=\frac{1}{1+\left|k\right|}\left(k+\sin\left(2\pi\nu t\right)\right),\tag{26}$$

где $\nu$ — круговая частота нагружения; $k$ — параметр асимметрии цикла, его значение изменяется в диапазоне: $-\infty<k<+\infty$.

Максимальное и минимальное значение функции нагружения $\zeta(t)$ за цикл колебаний вычисляются следующим образом:

$$\max\zeta(t)=\frac{k+1}{1+\left|k\right|},\ \min\zeta(t)=\frac{k-1}{1+\left|k\right|},\ \max\left|\zeta(t)\right|=1.\tag{27}$$

а амплитуда $\zeta_a$ и среднее (медианное) значение $\zeta_m$ за цикл колебаний вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\zeta_a&=\frac{1}{2}\left(\max\zeta(t)-\min\zeta(t)\right)=\frac{1}{1+\left|k\right|},\\ \zeta_m&=\frac{1}{2}\left(\max\zeta(t)+\min\zeta(t)\right)=\frac{k}{1+\left|k\right|}.\end{aligned}\tag{28}$$

Так как $\max\left|\zeta(t)\right|=1$, то значения $\left|\sigma_{ij}^{0}\right|$ являются максимальными значениями компонент напряжений в цикле колебаний.

Параметр асимметрии $k$ можно выразить через часто используемый коэффициент асимметрии цикла $r$, который определяется как

$$r=\frac{\min\zeta(t)}{\max\zeta(t)}=\frac{k-1}{k+1},\ k=\frac{1+r}{1-r}\ . \tag{29}$$

Обычно этот параметр $r$ вводится для случая нагружения, когда все напряжения известны и для определенности полагают, что $\sigma_{ij}^{0}\geq 0$. Для произвольного случая нагружения, когда напряжения $\sigma_{ij}^{0}$ определяются в процессе решения задачи методом МКЭ и могут иметь разные знаки при переходе от одной точки конструкции к другой, понятие минимума/ максимума функции $\zeta(t)$ и напряжений $\sigma_{ij}$ могут отличаться с точностью до наоборот. Поэтому для определенности, здесь понятия минимума/ максимума вводятся именно для функции $\zeta(t)$.

Различные значения параметра $k$ позволяют описать не только циклическое, но и длительное статическое нагружение:

$$\begin{aligned}
&k=+\infty\ \left(r=1\right)\ \text{— длительное статическое растяжение;}\\
&k=-\infty\ \left(r=1\right)\ \text{— длительное статическое сжатие;}\\
&1\leq k<+\infty\ \left(0\leq r<1\right)\ \text{— циклическое растяжение;}\\
&-\infty<k<-1\ \left(1\leq r<+\infty\right)\ \text{— циклическое сжатие;}\\
&-1<k<1\ \left(-\infty<r<0\right)\ \text{— циклическое растяжение-сжатие;}
\end{aligned} \tag{30}$$

Из выражений (30) видно, что параметр асимметрии $k$ более информативен, чем широко используемый в приложениях коэффициент аисмметрии $r$, т.к. $r$ имеет одинаковые значения для длительного статического растяжения и сжатия.

Будем рассматривать многоцикловое нагружение (26), в котором число циклов $n=\left[\nu t\right]$ велико: $n\geq 1\cdot 10^{2}$ ($\left[\nu t\right]$ — целая часть цикла). Пусть период колебаний в (26) $T=1/\nu$ много меньше характерного времени процессов накопления повреждений $t_{*}^{0}$. Тогда можно ввести малый параметр $\varkappa$:

$$\varkappa=\frac{T}{t_{*}^{0}}=\frac{1}{\nu t_{*}^{0}}<<1. \tag{31}$$

Существование двух масштабов характерного времени позволяет ввести «быстрое» время $y$ и «медленное» безразмерное время $\bar{t}$:

$$y=\frac{\bar{t}}{\varkappa}=\nu t\ ,\ \bar{t}=\frac{t}{t_{*}^{0}}\ . \tag{32}$$

Гармоническую функцию $\zeta(t)$ (26) можно считать функцией быстрого времени $\bar{\zeta}(y)$:

$$\zeta(t)=\frac{1}{1+|k|}\left(k+\sin\left(2\pi\nu t\right)\right)=\frac{1}{1+|k|}\left(k+\sin 2\pi y\right)\equiv\bar{\zeta}(y). \qquad (33)$$

Ядра повреждаемости $K\left(\bar{t}\right)$, $\Gamma\left(\bar{t}\right)$ в (10) и (19) являются функциями ‘медленного’ времени.

Имеет место следующая теорема [19]: интеграл от функций вида $K\left(t-\tau\right)f\left(\zeta(\tau)\right)$ в формулах (19) может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int_0^t K\left(t-\tau\right)f\left(\zeta(\tau)\right)d\tau&=\int_0^t K(t-\tau)f\left(\bar{\zeta}(y)\right)d\tau=\\&=\int_0^{\bar{t}} K\left(\bar{t}-\tau\right)d\tau\int_0^1 f\left(\bar{\zeta}(y)\right)dy+O(\varkappa),\end{aligned} \qquad (34)$$

т.е. ‘медленное’ и ‘быстрое’ времена считаются независимыми, а $O\left(\varkappa\right)$ означает члены, имеющие величину малого порядка $\varkappa$ по сравнению с первым членом в (34).

Вводя осреднение по быстрому времени

$$<f>=\int_0^1 f(y)dy \qquad (35)$$

формулу (34) можно записать в виде

$$\int_0^t K(t-\tau)f\left(\zeta(\tau)\right)d\tau=<f\left(\bar{\zeta}\right)>\int_0^{\bar{t}} K(\tau)d\tau. \qquad (36)$$

Черту сверху далее над медленным временим опускаем.

С учетом основной формулы (36) интегралы в формулах (19) при циклическом нагружении (26) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{K}^+(t)&=<\zeta^2h^+(\zeta)>\int_0^t K^+(\tau)d\tau+<\zeta^2h^-(\zeta)>\int_0^t K^-(\tau)d\tau,\\\tilde{K}^-(t)&=<\zeta^2h^-(\zeta)>\int_0^t K^+(\tau)d\tau+<\zeta^2h^+(\zeta)>\int_0^t K^-(\tau)d\tau,\\\tilde{\Gamma}^+(t)&\left(<\zeta h^+(\zeta)>\int_0^t\Gamma^+(\tau)d\tau\right)^2+\left(<\zeta h^-(\zeta)>\int_0^t\Gamma^-(\tau)d\tau\right)^2,\\\tilde{\Gamma}^-(t)&=\left(<\zeta h^-(\zeta)>\int_0^t\Gamma^+(\tau)d\tau\right)^2+\left(<\zeta h^+(\zeta)>\int_0^t\Gamma^-(\tau)d\tau\right)^2.\end{aligned} \qquad (37)$$

Аналогичный вид принимают функции $\tilde{K}_1^+(t)$, $\tilde{\Gamma}_1^+(t)$, $\tilde{K}_1^-(t)$, $\tilde{\Gamma}_1^-(t)$, описывающие объемное накопление повреждений при циклическом нагружении.

Введем обозначение для функций, осредненных по периоду колебаний, которые зависят только от коэффициента асимметрии нагружения $k$

$$f_1^+(k) = <\zeta^2 h^+(\zeta)>,\ f_1^-(k) = <\zeta^2 h^-(\zeta)>,$$
$$f_2^+(k) = <\zeta h^+(\zeta)>^2,\ f_2^-(k) = <\zeta h^-(\zeta)>^2. \tag{38}$$

Графики функций (38) показаны на рисунке 1.

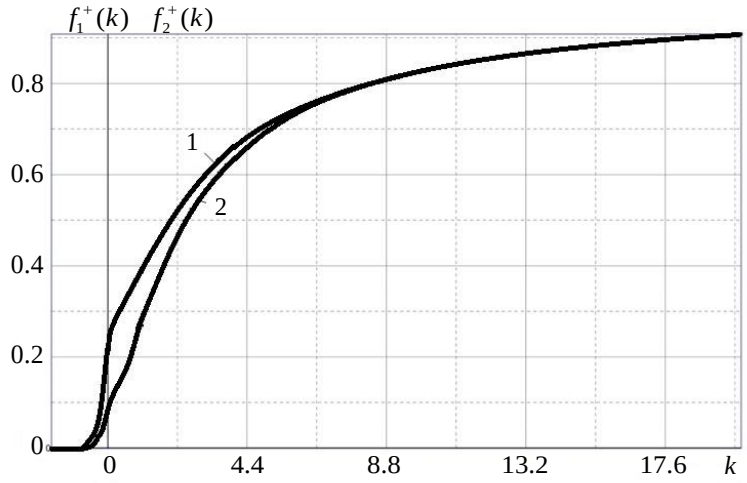



**Рис. 1.** Графики функций $f_1^+(k)$ (1) и $f_2^+(k)$ (2)

Эти функции (38) обладают «хорошими» свойствами: они являются монотонно-возрастающими, ограниченными, удовлетворяют соотношению $f_1^+(k) \geq f_2^+(k)$, имеют горизонтальную асимптоту $f_s^+(k) \to 1$ при $k \to +\infty$, и $f_s^+(k) = 0$ при $k \leq -1$.

Функции $f_1^-(k)$ и $f_2^-(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$f_1^+(k) = f_1^-(-k),\ f_2^+(k) = f_2^-(-k). \tag{39}$$

С учетом введенных обозначений и степенной зависимости (10) функции (37) можно записать так

$$\tilde{K}^+(t) = f_1^+(k)\frac{K_0^+ t^{1-\alpha^+}}{1-\alpha^+} + f_1^-(k)\frac{K_0^- t^{1-\alpha^-}}{1-\alpha^-},$$
$$\tilde{K}^-(t) = f_1^-(k)\frac{K_0^+ t^{1-\alpha^+}}{1-\alpha^+} + f_1^+(k)\frac{K_0^- t^{1-\alpha^-}}{1-\alpha^-},$$
$$\tilde{\Gamma}^+(t) = f_2^+(k)\frac{(\Gamma_0^+)^2 t^{2-2\beta^+}}{(1-\beta^+)^2} + f_2^-(k)\frac{(\Gamma_0^-)^2 t^{2-2\beta^-}}{(1-\beta^-)^2},$$
$$\tilde{\Gamma}^-(t) = f_2^+(k)\frac{(\Gamma_0^-)^2 t^{2-2\beta^-}}{(1-\beta^-)^2} + f_2^-(k)\frac{(\Gamma_0^+)^2 t^{2-2\beta^+}}{(1-\beta^+)^2}. \tag{40}$$

Подставляя выражения (40) в (18), находим функцию $\Phi\left(t,\sigma^0\right)$ при циклическом нагружении

$$\begin{gathered}\Phi\left(t,\sigma^0\right)=f_1^+\left(k,\sigma^0\right)\frac{K_0^+t^{1-\alpha^+}}{1-\alpha^+}+f_1^-\left(k,\sigma^0\right)\frac{K_0^-t^{1-\alpha^-}}{1-\alpha^-}-\\ -f_2^+\left(k,\sigma^0\right)\frac{(\Gamma_0^+)^2t^{2-2\beta^+}}{\left(1-\beta^+\right)^2}-f_2^-\left(k,\sigma^0\right)\frac{(\Gamma_0^-)^2t^{2-2\beta^-}}{\left(1-\beta^-\right)^2},\end{gathered}\tag{41}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}f_1^+\left(k,\sigma^0\right)=h^+\left(\sigma^0\right)f_1^+(k)+h^-\left(\sigma^0\right)f_1^-(k),\\ f_1^-\left(k,\sigma^0\right)=h^+\left(\sigma^0\right)f_1^-(k)+h^-\left(\sigma^0\right)f_1^+(k),\\ f_2^+\left(k,\sigma^0\right)=h^+\left(\sigma^0\right)f_2^+(k)+h^-\left(\sigma^0\right)f_2^-(k),\\ f_2^-\left(k,\sigma^0\right)=h^+\left(\sigma^0\right)f_2^-(k)+h^-\left(\sigma^0\right)f_2^+(k).\end{gathered}\tag{42}$$

Аналогчный вид имеют функции $\Phi_1\left(t,\sigma^0\right)$.

С учетом формулы (36) интегралы в формулах (22) и (23) при циклическом нагружении (26) преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered}\tilde{N}^+(t)=K_d^+\tilde{f}_\alpha^+(k)t^{1-\alpha^+}+K_d^-\tilde{f}_\alpha^-(k)t^{1-\alpha^-},\\ \tilde{N}^-(t)=K_d^+\tilde{f}_\alpha^\pm(k)t^{1-\alpha^+}+K_d^-\tilde{f}_\alpha^\mp(k)t^{1-\alpha^-},\\ \tilde{Q}^+(t)=\Gamma_d^+\tilde{f}_\beta^+(k)t^{2-2\beta^+}+\Gamma_d^-\tilde{f}_\beta^-(k)t^{2-2\beta^-},\\ \tilde{Q}^-(t)=\Gamma_d^+\tilde{f}_\beta^\pm(k)t^{2-2\beta^+}+\Gamma_d^-\tilde{f}_\beta^\mp(k)t^{2-2\beta^-}.\end{gathered}\tag{43}$$

где обозначены функции от параметра асимметрии $k$

$$\begin{gathered}\tilde{f}_\alpha^+(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^+}}h^+(\zeta)>^{1-\alpha^+},\quad \tilde{f}_\alpha^\pm(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^+}}h^-(\zeta)>^{1-\alpha^+},\\ \tilde{f}_\alpha^\mp(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^-}}h^+(\zeta)>^{1-\alpha^-},\quad \tilde{f}_\alpha^-(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{2}{1-\alpha^-}}h^-(\zeta)>^{1-\alpha^-},\\ \tilde{f}_\beta^+(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^+}}h^+(\zeta)>^{2-2\beta^+},\quad \tilde{f}_\beta^\pm(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^+}}h^-(\zeta)>^{2-2\beta^+},\\ \tilde{f}_\beta^\mp(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^-}}h^+(\zeta)>^{2-2\beta^-},\quad \tilde{f}_\beta^-(k)=<\left|\zeta\right|^{\frac{1}{1-\beta^-}}h^-(\zeta)>^{2-2\beta^-}.\end{gathered}\tag{44}$$

Подставляя выражения (42) в (21), находим функцию $\Phi_d\left(t,\sigma^0\right)$ для циклического нагружения

$$\begin{gathered}\Phi_d\left(t,\sigma^0\right)=K_d^+f_\alpha^+\left(k,\sigma^0\right)t^{1-\alpha^+}+K_d^-f_\alpha^-\left(k,\sigma^0\right)t^{1-\alpha^-}-\\ -\Gamma_d^+f_\beta^+\left(k,\sigma^0\right)t^{2-2\beta^+}-\Gamma_d^-f_\beta^-\left(k,\sigma^0\right)t^{2-2\beta^-},\end{gathered}\tag{45}$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
f_\alpha^+\left(k,\sigma^0\right) &= h^+\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\alpha^+(k)+h^-\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\alpha^\pm(k),\\
f_\alpha^-\left(k,\sigma^0\right) &= h^+\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\alpha^-(k)+h^-\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\alpha^\mp(k),\\
f_\beta^+\left(k,\sigma^0\right) &= h^+\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\beta^+(k)+h^-\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\beta^\pm(k),\\
f_\beta^-\left(k,\sigma^0\right) &= h^+\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\beta^-(k)+h^-\left(\sigma^0\right)\tilde{f}_\beta^\mp(k).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Для функции $\Phi_{1d}\left(t,\sigma^0\right)$ получаем аналогичные выражения, с аналогичными обозначениями с «1» в соответствующих индексах.

С помощью выражений (40) и (44) получаем выражения для составных частей (17), (20) параметра повреждаемости (57) для случая циклического нагружения

$$
\begin{aligned}
z_r(t) = \sigma_u^{02}&\left(f_1^+\frac{K_0^+t^{1-\alpha^+}}{1-\alpha^+}+f_1^-\frac{K_0^-t^{1-\alpha^-}}{1-\alpha^-}-f_2^+\frac{(\Gamma_0^+)^2t^{2-2\beta^+}}{(1-\beta^+)^2}-f_2^-\frac{(\Gamma_0^-)^2t^{2-2\beta^-}}{(1-\beta^-)^2}\right)+\\
+\sigma^{02}&\left(f_1^+\frac{K_{10}^+t^{1-\alpha_1^+}}{1-\alpha_1^+}+f_1^-\frac{K_{10}^-t^{1-\alpha_1^-}}{1-\alpha_1^-}-f_2^+\frac{(\Gamma_{10}^+)^2t^{2-2\beta_1^+}}{(1-\beta_1^+)^2}-f_2^-\frac{(\Gamma_{10}^-)^2t^{2-2\beta_1^-}}{(1-\beta_1^-)^2}\right),
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
z_d(t) = \sigma_u^{02}&\left(K_d^+f_\alpha^+t^{1-\alpha^+}+K_d^-f_\alpha^-t^{1-\alpha^-}-\Gamma_d^+f_\beta^+t^{2-2\beta^+}-\Gamma_d^-f_\beta^-t^{2-2\beta^-}\right)+\\
+\sigma^{02}&\left(K_{1d}^+f_{1\alpha}^+t^{1-\alpha_1^+}+K_{1d}^-f_{1\alpha}^-t^{1-\alpha_1^-}-\Gamma_{1d}^+f_{1\beta}^+t^{2-2\beta_1^+}-\Gamma_{1d}^-f_{1\beta}^-t^{2-2\beta_1^-}\right).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Найдем выражение для мгновенной части повреждений при циклическом нагружении, используя формулы (25). Вычисляем максимальные и медианное значения инвариантов с учетом формул (27) и (28)

$$
\begin{gathered}
\max\sigma_u=\sigma_u^0,\quad \sigma_m=\sigma^0\zeta_m=\frac{\sigma^0k}{1+|k|},\\
\max(\zeta h^+(\zeta))=g^+(k)\equiv\frac{1+k}{1+|k|}h^+(k+1),\\
\left|\min(\zeta h^-(\zeta))\right|=g^-(k)\equiv\frac{|k-1|}{1+|k|}h^-(k-1),\\
\tilde{g}\left(\sigma^0,\zeta\right)=g\left(\sigma^0,k\right)\equiv h^+\left(\sigma^0\right)g^+(k)+h^-\left(\sigma^0\right)g^-(k),\\
\max\sigma_+=\left|\sigma^0\right|g\left(\sigma^0,k\right).
\end{gathered}
\tag{49}
$$

Графики функции $g^+(k)$ и $g^-(k)$ показаны на рисунке 2.

Тогда из (24) получаем выражение для мгновенной части повреждений

$$z_0 = \frac{\sigma_u^{02}}{3\sigma_S^2\left(1+B_C V\left(\sigma_m\right)\right)} + \frac{\sigma^{02}}{\sigma_{T+}^2}\left(g\left(\sigma^0,k\right)\right)^2. \qquad (50)$$

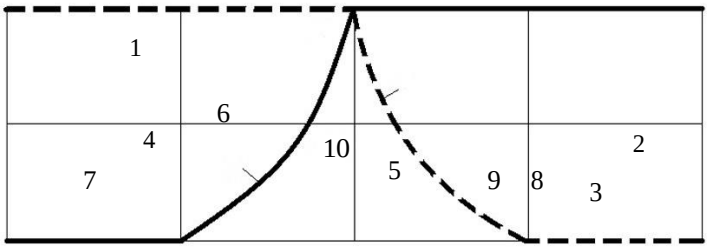



**Рис. 2.** Графики функции $g^+(k)$ (1) и $g^-(k)$ (2)

Общее выражение для параметра повреждаемости при иклическом нагружении с учетом (47), (48) и (50) можно представить в виде

$$z(t) = \sigma_u^{02}\left(\frac{1}{3\sigma_S^2 V_1(\sigma_m)} + \tilde{N}_K^+ t^{1-\alpha^+} - \tilde{N}_\Gamma^+ t^{2-2\beta^+} + \tilde{N}_K^- t^{1-\alpha^-} - \tilde{N}_\Gamma^- t^{2-2\beta^-}\right) +$$
$$+\sigma^{02}\left(\frac{(g(\sigma^0,k))^2}{\sigma_{T+}^2} + \tilde{N}_{1K}^+ t^{1-\alpha_1^+} - \tilde{N}_{1\Gamma}^+ t^{2-2\beta_1^+} + \tilde{N}_{1K}^- t^{1-\alpha_1^-} - \tilde{N}_{1\Gamma}^- t^{2-2\beta_1^-}\right). \qquad (51)$$

Коэффициенты, входящие в это выражение, имеют вид

$$\tilde{N}_K^+\left(k,\sigma^0\right) = f_1^+\left(k,\sigma^0\right)\frac{K_0^+}{1-\alpha^+} + K_d^+ f_\alpha^+\left(k,\sigma^0\right),$$
$$\tilde{N}_\Gamma^+\left(k,\sigma^0\right) = f_2^+\left(k,\sigma^0\right)\frac{\left(\Gamma_0^+\right)^2}{\left(1-\beta^+\right)^2} + \Gamma_d^+ f_\beta^+\left(k,\sigma^0\right),$$
$$\tilde{N}_K^-\left(k,\sigma^0\right) = f_1^-\left(k,\sigma^0\right)\frac{K_0^-}{1-\alpha^-} + K_d^- f_\alpha^-\left(k,\sigma^0\right), \qquad (52)$$
$$\tilde{N}_\Gamma^-\left(k,\sigma^0\right) = f_2^-\left(k,\sigma^0\right)\frac{\left(\Gamma_0^-\right)^2}{\left(1-\beta^-\right)^2} + \Gamma_d^- f_\beta^-\left(k,\sigma^0\right).$$

Аналогичный вид имеют коэффициенты $\tilde{N}_{1K}^+\left(k,\sigma^0\right)$, $\tilde{N}_{1\Gamma}^+\left(k,\sigma^0\right)$, $\tilde{N}_{1K}^-\left(k,\sigma^0\right)$ и $\tilde{N}_{1\Gamma}^-\left(k,\sigma^0\right)$.

Подставляя (50) в (1), получаем критерий усталостной прочности

$$\sigma_u^{02}\left(\frac{1}{3\sigma_S^2 V_1(\sigma_m)} + \tilde{N}_K^+ t_*^{1-\alpha^+} + \tilde{N}_K^- t_*^{1-\alpha^-} - \tilde{N}_\Gamma^+ t_*^{2-2\beta^+} - \tilde{N}_\Gamma^- t_*^{2-2\beta^-}\right) +$$
$$+\sigma^{02}\left(\frac{g^2(\sigma^0,k)}{\sigma_{T+}^2} + \tilde{N}_{1K}^+ t_*^{1-\alpha_1^+} + \tilde{N}_{1K}^- t_*^{1-\alpha_1^-} - \tilde{N}_{1\Gamma}^+ t_*^{2-2\beta_1^+} - \tilde{N}_{1\Gamma}^- t_*^{2-2\beta_1^-}\right) = 1. \qquad (53)$$

**Модель без накопления объемных повреждений.** Рассмотрим более простую модель, в которой повреждения, вызванные чисто объемными напряжениями, отсутствуют, тогда

$$\tilde{N}_{1K}^{+}=0,\ \tilde{N}_{1\Gamma}^{+}=0,\ \tilde{N}_{1K}^{-}=0,\ \tilde{N}_{1\Gamma}^{-}=0. \tag{54}$$

и, следовательно, из (53) имеем критерий усталостной прочности

$$\begin{gathered}\sigma_u^{02}\left(\frac{1}{3\sigma_S^2 V_1(\sigma_m)}+\tilde{N}_K^{+}t_*^{1-\alpha^+}+\tilde{N}_K^{-}t_*^{1-\alpha^-}-\tilde{N}_\Gamma^{+}t_*^{2-2\beta^+}-\tilde{N}_\Gamma^{-}t_*^{2-2\beta^-}\right)+\\ +\sigma^{02}\frac{g^2(\sigma^0,k)}{\sigma_{T+}^2}=1.\end{gathered} \tag{55}$$

**Одноосное циклическое нагружение.** Рассмотрим одномерное циклическое растяжение-сжатие, когда

$$\sigma_{11}\neq 0,\ \text{а остальные}\ \sigma_{ij}=0. \tag{56}$$

Подставляя (55) в (4), находим выражение для инвариантов

$$\sigma=\sigma_{11},\ \sigma_u=\left|\sigma_{11}\right|. \tag{57}$$

Подставляя (56) в (14), (15), (27) и (48), получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=\sigma_{11}^0\zeta(t),\quad \sigma^0=\sigma_{11}^0,\quad \sigma_u^0=\left|\sigma_{11}^0\right|,\\ \sigma_m=\frac{\sigma_{11}^0 k}{1+|k|},\quad \sigma_a=\sigma_{11}^0\zeta_a=\frac{\sigma_{11}^0}{1+|k|}.\end{gathered} \tag{58}$$

Пусть для определенности $\sigma_{11}^0>0$. Тогда $h^+\left(\sigma^0\right)=1,\ \ h^-\left(\sigma^0\right)=0$ и, следовательно, из (41), (45) и (45)

$$\begin{gathered}f_1^+\left(k,\sigma^0\right)=f_1^+(k),\ \ f_1^-\left(k,\sigma^0\right)=f_1^-(k),\\ f_2^+\left(k,\sigma^0\right)=f_2^+(k),\ \ f_2^-\left(k,\sigma^0\right)=f_2^-(k),\\ f_\alpha^+\left(k,\sigma^0\right)=\tilde{f}_\alpha^+(k),\ \ f_\alpha^-\left(k,\sigma^0\right)=\tilde{f}_\alpha^-(k),\\ f_\beta^+\left(k,\sigma^0\right)=\tilde{f}_\beta^+(k),\ \ f_\beta^-\left(k,\sigma^0\right)=\tilde{f}_\beta^-(k),\\ g\left(\sigma^0,k\right)=g^+(k).\end{gathered} \tag{59}$$

т.е. все эти функции при одноосном нагружении зависят только от параметра асимметрии $k$. Соответственно и функции (52) также в этом случае зависят только от $k$

$$\tilde{N}_K^{+}\left(k,\sigma^0\right)=\tilde{N}_K^{+}(k)\equiv f_1^+(k)\frac{K_0^+}{1-\alpha^+}+K_d^+\tilde{f}_\alpha^+(k),$$

$$\tilde{N}_{\Gamma}^{+}\left(k,\sigma^{0}\right)=\tilde{N}_{\Gamma}^{+}(k)\equiv f_{2}^{+}(k)\frac{\left(\Gamma_{0}^{+}\right))^{2}}{\left(1-\beta^{+}\right)^{2}}+\Gamma_{d}^{+}\tilde{f}_{\beta}^{+}(k),$$
$$\tilde{N}_{K}^{-}\left(k,\sigma^{0}\right)=\tilde{N}_{K}^{-}(k)\equiv f_{1}^{-}(k)\frac{K_{0}^{-}}{1-\alpha^{-}}+K_{d}^{-}\tilde{f}_{\alpha}^{-}(k), \tag{60}$$
$$\tilde{N}_{\Gamma}^{-}\left(k,\sigma^{0}\right)=\tilde{N}_{\Gamma}^{-}(k)\equiv f_{2}^{-}(k)\frac{\left(\Gamma_{0}^{-}\right)^{2}}{\left(1-\beta^{-}\right)^{2}}+\Gamma_{d}^{-}\tilde{f}_{\beta}^{-}(k).$$

Критерий усталостной прочности (55) при одноосном циклическом переменном растяжении-сжатии с учетом (58) и (60) принимает вид

$$\sigma_{11}^{0}=(\hat{\sigma}_{C}^{-2}\left(\sigma_{11}^{0},k\right)+\tilde{N}_{K}^{+}(k)t_{*}^{1-\alpha^{+}}-$$
$$-\tilde{N}_{\Gamma}^{+}(k)t_{*}^{2-2\beta^{+}}+\tilde{N}_{K}^{-}(k)t_{*}^{1-\alpha^{-}}-\tilde{N}_{\Gamma}^{-}(k)t_{*}^{2-2\beta^{-}})^{-1/2}. \tag{61}$$

Здесь обозначен условный предел статической прочности при растяжении-сжатии, зависящий от $k$ и $\sigma_{11}^{0}$

$$\hat{\sigma}_{C}\left(\sigma_{11}^{0},k\right)=\left(\frac{\left(g^{+}(k)\right)^{2}}{\sigma_{T+}^{2}}+\frac{1}{3\sigma_{S}^{2}\left(1+B_{C}V\left(\sigma_{m}\right)\right)}\right)^{-1/2}. \tag{62}$$

**Модель без учета необратимых повреждений.** При постоянно действующих циклических нагружениях можно рассмотреть упрощенную модель, в которой не учитываются необратимые повреждения. В этой модели все константы (13) являются нулевыми, и следовательно

$$\Omega=0,\ \ \Omega=\left\{K_{d}^{+},K_{d}^{-},\Gamma_{d}^{+},\Gamma_{d}^{-},K_{1d}^{+},K_{1d}^{-},\Gamma_{1d}^{+},\Gamma_{1d}^{-}\right\},\ \ z_{d}(t)\equiv 0. \tag{63}$$

**Методика определения констант упрощенной модели.** Для упрощенной модели (62) имеется 11 ненулевых констант

$$\sigma_{T},\ \ \sigma_{C},\ \ \sigma_{S}, \tag{64}$$

$$K_{0}^{+},\ K_{0}^{-},\ \Gamma_{0}^{+},\ \Gamma_{0}^{-},\ \alpha^{+},\ \alpha^{-},\ \beta^{+},\ \beta^{-}. \tag{65}$$

Константы (63) определяются из экспериментов на статическую прочность. Укажем методику определения констант (64) для этой модели.

Для решения этой задачи необходимо иметь по 2 точки на 4 экспериментальных кривых усталости при одноосном циклическом растяжении и сжатии при разных коэффициентах асимметрии $k$ (рис. 4):

$$\sigma_{11}^{0}=\sigma_{11}^{(Э)}\left(k,t_{*}\right),\ \ k=\{k_{1},k_{2},k_{3},k_{4}\},\ \ k_{1},k_{2}\geq 1,\ \ k_{3},k_{4}<1. \tag{66}$$

Точки на этих кривых (65) — это точки на плоскости $\left(t_*, \sigma_{11}^0\right)$ (время нагружения — максимальное напряжение цикла $\sigma_{(s)I}$, )

$$\left(t_{*I}, \sigma_{(s)I}\right), \;\; I = 1,2, \;\; s = 1,...,4, \;\; \sigma_{(s)I} \equiv \sigma_{11}^{(Э)}\left(k_s, t_{*I}\right), \tag{67}$$

где $t_{*I}$ — моменты времени усталостного разрушения.

Рассмотрим отдельно 2 кривые усталости при циклическом растяжении, при $k_1, k_2 \geq 1$. Тогда используем уравнение усталостной прочности (61). Запишем его для двух точек (67) и двух коэффициентов $k_1, k_2 \geq 1$

$$\sigma_{11}^0\left(k_s, t_{*I}\right) = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} + \tilde{N}_K^+\left(k_s\right) t_{*I}^{1-\alpha^+} - \tilde{N}_\Gamma^+\left(k_s\right) t_{*I}^{2-2\beta^+}\right)^{-1/2}, \tag{68}$$
$$I = 1,2, \quad s = 1,2.$$

Приравняем левые части в уравнении (66) (это экспериментальные точки) и в уравнении (68) (это математическая модель). Тогда, возводя в (-2) степень левую и правую части получившихся уравнений, получим

$$\tilde{N}_K^+\left(k_s\right) t_{*I}^{1-\alpha^+} - \tilde{N}_\Gamma^+\left(k_s\right) t_{*I}^{2-2\beta^+} = \frac{1}{\sigma_{(s)I}^2} - \frac{1}{\sigma_T^2}, \tag{69}$$
$$I = 1,2, \;\; s = 1,2.$$

Подставим в эту систему выражения (60) для $\tilde{N}_K^+(k)$ и $\tilde{N}_\Gamma^+(k)$ для случая упрощенной модели (63)

$$\frac{K_0^+}{1-\alpha^+} f_1^+\left(k_s\right) t_{*I}^{1-\alpha^+} - \frac{(\Gamma_0^+)^2}{(1-\beta^+)^2} f_2^+\left(k_s\right) t_{*I}^{2-2\beta^+} = \frac{1}{\sigma_{(s)I}^2} - \frac{1}{\sigma_T^2}, \tag{70}$$
$$I = 1,2, \;\; s = 1,2.$$

В результате получим систему 4-х уравнений относительно 4-х неизвестных $K_0^+$, $\Gamma_0^+$, $\alpha^+$, $\beta^+$.

Введем обозначения

$$U_I^+ = \frac{K_0^+}{1-\alpha^+} t_{*I}^{1-\alpha^+}, \;\; V_I^+ = \frac{\left(\Gamma_0^+\right)^2}{\left(1-\beta^+\right)^2} t_{*I}^{2-2\beta^+},$$
$$H_{Is} = f_I^+\left(k_s\right), \;\; S_{Is} = \frac{1}{\sigma_{(s)I}^2} - \frac{1}{\sigma_T^2}, \;\; I = 1,2, \;\; s = 1,2. \tag{71}$$

Тогда систему уравнений (70) можно записать в виде

$$U_I^+ H_{1s} - V_I^+ H_{2s} = S_{Is}\,,\ I = 1,2\,,\ s = 1,2\,. \tag{72}$$

Это линейная система 4-х уравнений относительно 4-х неизвестных $U_I^+$ и $V_I^+$. Решая эту систему, находим

$$\begin{gathered} U_I^+ = \frac{1}{\Delta}\left(S_{I1}^+ H_{22} - S_{I2}^+ H_{21}\right), \\ V_I^+ = \frac{1}{\Delta}\left(S_{I1}^+ H_{12} - S_{I2}^+ H_{11}\right), \\ \Delta = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}. \end{gathered} \tag{73}$$

После того, как определены $U_I^+$ и $V_I^+$, воспользуемся соотношениями (80) . Поделим каждое из их уравнений при $I = 1$ на соответствующее уравнения при $I = 2$, тогда получим

$$\frac{t_{*1}^{1-\alpha^+}}{t_{*2}^{1-\alpha^+}} = \frac{U_1^+}{U_2^+}\,,\ \frac{t_{*1}^{2-2\beta^+}}{t_{*2}^{2-2\beta^+}} = \frac{V_1^+}{V_2^+}\,. \tag{74}$$

Из этих уравнений находим $\alpha^+$, $\beta^+$

$$1-\alpha^+ = \frac{\ln\left(U_1^+ / U_2^+\right)}{\ln\left(t_{*1} / t_{*2}\right)}, \quad 2-2\beta^+ = \frac{\ln\left(V_1^+ / V_2^+\right)}{\ln\left(t_{*2} / t_{*1}\right)}. \tag{75}$$

После этого, возвращаясь к (71), находим $K_0^+$, $\Gamma_0^+$

$$K_0^+ = \frac{U_1^+\left(1-\alpha^+\right)}{t_{*1}^{1-\alpha^+}},\ \left(\Gamma_0^+\right)^2 = \frac{V_1^+\left(1-\beta^+\right)^2}{t_{*1}^{2-2\beta^+}}\,. \tag{76}$$

Аналогичным методом находим константы $K_0^-$, $\Gamma_0^-$, $\alpha^-$, $\beta^-$ из усталостных кривых при циклическом сжатии.

**Диаграмма Гудмана для «химического» критерия усталостной прочности**. Кривую усталости (61) при одноосном циклическом нагружении можно представить в виде диаграммы Гудмана [20]. Для этого в (61) зафиксируем время $t_*$ и запишем его в виде

$$\left(\sigma_{11}^0\right)^{-2} - \hat{\sigma}_C^{-2}\left(\sigma_{11}^0, k\right) = \hat{W}\left(k, t_*\right), \tag{77}$$

где обозначена функция

$$\hat{W}\left(k, t_*\right) = \tilde{N}_K^+(k) t_*^{1-\alpha^+} - \tilde{N}_\Gamma^+(k) t_*^{2-2\beta^+} + \tilde{N}_K^-(k) t_*^{1-\alpha^-} - \tilde{N}_\Gamma^-(k) t_*^{2-2\beta^-}. \tag{78}$$

Найдем решение уравнения (61) относительно максимального напряжения цикла $\sigma_{11}^0$ при фиксированных $t_*$ и $k$

$$\sigma_{11}^0 = W\left(k, t_*\right). \tag{79}$$

Подставим теперь в (79) вместо k и $\sigma_{11}^0$ их выражения через $\sigma_m$ и $\sigma_a$, полученные с помощью (58), тогда получим две ветви кривой на плоскости $(\sigma_m, \sigma_a)$

$$\begin{gathered}\sigma_m + \sigma_a = W\left(k, t_*\right), \quad k \geq 0, \\ \sigma_a - \sigma_m = W\left(k, t_*\right), \quad k < 0, \\ k = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}.\end{gathered} \tag{80}$$

Вводя вместо $t_*$ число циклов до разрушения $t_* = n_* / \nu$, из (80) получаем предельную диаграмму Гудмана.

**Пример численного моделирования.** В качестве примера применения разработанной модели и алгоритма вычислений была рассмотрена сталь 34CrNiMo6, усталостные кривые которой при разных коэффициентах асимметрии k были взяты из работы [21]. Пределы статической прочности этой стали были выбраны следующими:

$$\sigma_T = 1.2 \text{ ГПа}, \ \sigma_C = 1.6 \text{ ГПа}, \ \sigma_S = 0.8 \text{ ГПа}.$$

Были получены следующие константы (11) модели усталостной прочности для данной стали, с помощью применения разработанного вычислительного алгоритма:

$$\begin{gathered}\alpha^+ = 0.6389, \ \beta^+ = 0.8202, \ \alpha_1^- = 0.8859, \ \beta_1^- = 0.9439, \\ K_0^+ = 0.01438 \text{ ГПа}^{-2}\text{с}^{\alpha^+ - 1}, \ \left(\Gamma_0^+\right)^2 = 0.001278 \text{ ГПа}^{-2}\text{с}^{2\beta^+ - 2}, \\ K_0^- = 0.1727 \text{ ГПа}^{-2}\text{с}^{\alpha^- - 1}, \ \left(\Gamma_0^-\right)^2 = 0.00485 \text{ ГПа}^{-2}\text{с}^{2\beta^- - 2}.\end{gathered}$$

Кривые усталостной прочности, полученные для этой стали с помощью разработанной модели по формуле (61) для разных коэффициентов асимметрии $k$, показаны на рисунке 3. На этом же рисунке кривыми с точками показаны экспериментальные значения кривых усталости, взятые из работы [21]. Совпадение результатов моделирования с экспериментальными данными достаточно хорошее для этого типа данных.

На рисунке 4 показаны диаграммы Гудмана для стали 34CrNiMo6, полученные расчетным путем с помощью разработанного варианта «химического» критерия усталостной прочности. Диаграммы построены для 3-х значений числа циклов $n = 10^5$, $10^6$, $10^7$ Гц.

Диаграммы Гудмана показывают существенное различие усталостных свойств стали 34CrNiMo6 при циклическом нагружении в области растяжени и сжатия, а также в смешанном цикле растяжение-

сжатие. Разработанный вариант «химического» критерия усталостной прочности позволяет получить аналитические зависимости для моделирования усталостной прочности конструкций при различных режимах циклического нагружения, в том числе не моногоармонического.

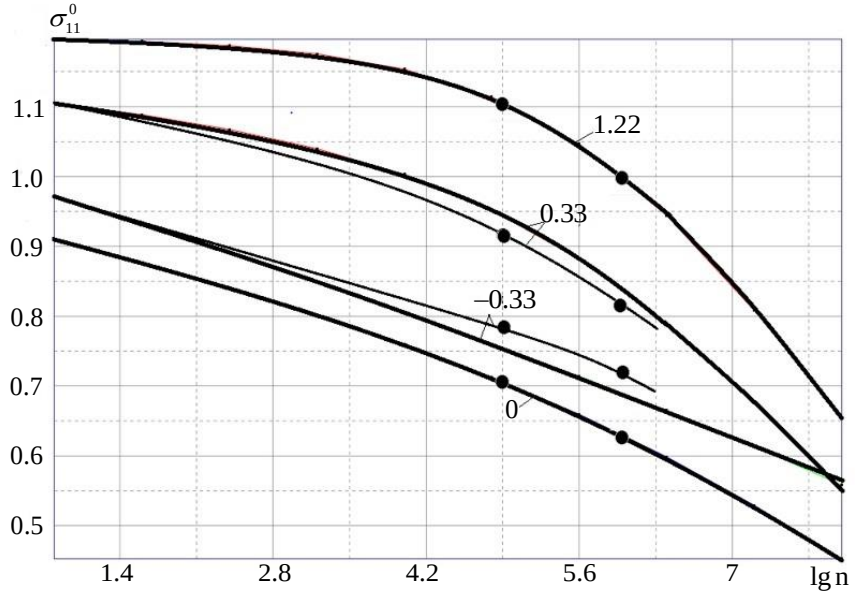



**Рис. 3.** Расчетные и экспериментальные (линии с точками) кривые усталости для стали 34CrNiMo6 при различных значениях коэффициента асимметрии $k$

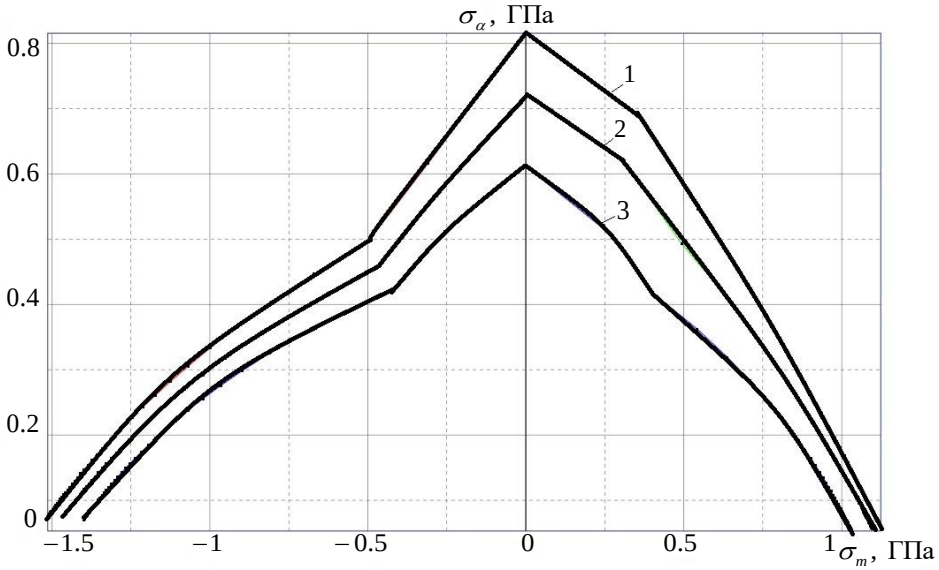



**Рис. 4.** Диаграммы Гудмана для стали 34CrNiMo6 при циклическом нагружении для значений $n_* = 10^5$ (1), $10^6$ (2), $10^7$ (3), построенные с помощью предложенного «химического» критерия усталостной прочности

**Выводы.** Разработан вариант «химического» критерия усталостной прочности для материалов, разносопротивляющихся циклическому нагружения в области растяжения и сжатия. Критерий применим для решения 3-х мерных задач расчета усталостной прочности и долговечности конструкций при различных значениях коэффициента асимметрии нагружения. Разработан алгоритм определения констант модели усталостной прочности с помощью кривых усталости при различных коэффициентах асимметрии.

Приведен пример расчета кривых усталостной прочности и диаграмм Гудмана для стали 34CrNiMo6. Показано, что разработанный вариант «химического» критерия усталостной прочности обеспечивает достаточно хорошее совпадение результатов моделирования с экспериментальными данными для различных значений коэффициентов асимметрии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 282 с.

[2] Москвитин В.В. *Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе*. Москва, Наука, 1972, 327 с.

[3] Трощенко В.Т. Прочность металлов при переменных нагрузках. Киев, Наукова думка, 1978, 176 с.

[4] Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расеты деталей машин на прочность. Москва, Машиностроение, 1975, 488 с.

[5] Bannantine J.A., Comer J.J., Handrock J.L. *Fundamentals of metal fatigue analysis*. Prentice Hall, 1990, 273 p.

[6] Bomas, H., Bacher-Hoechst, M., Kienzler, R., Kunow, S., Loewisch, G., Muehleder, F., Schroeder R. Crack initiation and endurance limit of a hard steel under multiaxial cyclic loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2010, vol. 33, iss. 2, pp.126–139.

[7] Lüpfert, H.P., Spies H.J. Fatigue strength of heat-treated steel under static multiaxial compression stress. Advanced Engineering Materials, 2004, vol 6, iss. 7, pp. 544–550.

[8] Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д., Якушев В.Л. Определение критической плоскости и оценка усталостной долговечности при различных режимах циклического нагружения. *Вестник ПНИПУ. Механика*, № 4, 2017, с. 238-252.

[9] Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V. *ASME. Journal of Engineering Materials and Technology*, 2002, vol. 124, pp. 229–237.

[10] Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 2001, vol. 23, iss. 10, pp. 839–849.

[11] Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. Москва, Машиностроение, 2008, 204 с.

[12] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Прогнозирование долговечности полимерных элементов конструкций с помощью "химического" критерия длительной прочностию. *Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении*, № 1, 2002, с. 15-21.

[13] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе "химического" критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении*, №1, 2002, с. 21-25.

[14] Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[15] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений. *Известия ВУЗов. Машиностроение*, 2013, № 11, с. 3-11.

[16] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Шиверский Е.А. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 2. Численное статистическое моделирование. *Известия ВУЗов. Машиностроение*, 2013, № 12, с.12-19.

[17] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование повреждаемости и долговечности композитных элементов конструкций с дефектами типа расслоения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 49–70.

[18] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Длительная прочность армированных пластиков. *Механика композитных атериалов*, 1989, № 1, с. 16-22.

[19] Goodman J. *Mechanics applied to engineering*. London, UK, Longmans Green, 1899, 770 p.

[20] Pallares-Santasmartas L., Albizuri J., Aviles A., Aviles R. Mean stress effect on the axial fatigue strength of din 34CrNiMo6 quenched and tempered steel. *MDPI. Metals*, 2018, vol. 8, iss. 4, art. 213, pp.1-19.

Статья поступила в редакцию 28.01.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 3, с. 18–42.

**Димитриенко Юрий Иванович —** д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit@bmstu.ru

**Димитриенко Александр Юрьевич —** аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

# «Chemical» criterion for modeling the fatigue life of materials with different resistance to tension and compression

© Yu.I. Dimitrienko, A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The problem of developing a universal criterion for long-term fatigue strength of isotropic materials, in which the accumulation of damage differs significantly under loading in the region of tension and compression, is considered. Usually, to model the durability of such materials, Goodman diagrams are used, which take into account the dependence of durability on the load asymmetry coefficient. However, this model, as a rule, contains only one so-called S-N curve, as a result of which the fatigue life curves at different asymmetry coefficients turn out to be self-similar, which is not always observed in experimental data. In addition, Goodman diagrams are only applicable for cyclic loading. This article proposes a further development of the "chemical" criterion, which was previously developed in the author's works, and which is applicable for a wide range of loads, both long-term static and cyclic with a random form of the loading cycle. The development of the "chemical" criterion for fatigue strength was carried out by separately taking into account the accumulation of damage in the areas of tension and compression. For mixed loading modes in the tension-compression region, a special layer accumulates damage in the tension and compression areas. A method for determining the constants of the proposed fatigue life model has been developed. It is shown how Goodman diagrams are constructed for the developed version of the fatigue life criterion. An example of using the "chemical" criterion to simulate the fatigue life of 34CrNiMo6 steel is considered.*

***Keywords**: "chemical" criterion, fatigue, durability, damage accumulation, resistance difference, tension-compression, Goodman diagrams*

## REFERENCES

[1] Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity], Moscow, Nauka Publ, 1970, 282 p.

[2] Moskvitin V.V. *Soprotivleniye vyazko-uprugikh materialov primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Resistance of visco-elastic materials: Applied to solid fuel rocket engine charges]. Moscow, Nauka Publ, 1972, 327 p.

[3] Troshchenko V.T. *Prochnost' metallov pri peremennykh nagruzkakh* [Strength of metals under variable loads]. Kiyev, Naukova dumka, 1978, 176 p.

[4] Serensen S.V., Kogayev V.P., Shneyderovich R.M. *Nesushchaya sposobnost' i rasety detaley mashin na prochnost'* [Load-bearing capacity and strength tests of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 488 p.

[5] Bannantine J.A., Comer J.J., Handrock J.L. *Fundamentals of metal fatigue analysis*. Prentice Hall, 1990, 273 p.

[6] Bomas, H., Bacher-Hoechst, M., Kienzler, R., Kunow, S., Loewisch, G., Muehleder, F., Schroeder R. Crack initiation and endurance limit of a hard steel under multiaxial cyclic loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2010, vol. 33, iss. 2, pp.126–139.

[7] Lüpfert, H.P., Spies H.J. Fatigue strength of heat-treated steel under static multiaxial compression stress. Advanced Engineering Materials, 2004, vol 6, iss. 7, pp. 544–550.

[8] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Yakushev V.L. Determination of the critical plane and assessment of fatigue durability under various cyclic loading regimes. *PNRPU MECHANICS BULLETIN*, no. 4, 2017, pp. 238-252.

[9] Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V. *ASME. Journal of Engineering Materials and Technology*, 2002, vol. 124, pp. 229–237.

[10] Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 2001, vol. 23, iss. 10, pp. 839–849.

[11] Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy V.L. *Dinamika i prochnost' aviacionnyh dvigatelej i energeticheskih ustanovok* [Dynamics and strength of aircraft engines and energy plants]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2008, 204 p.

[12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.P. Prognozirovanie dolgovechnosti polimernyh elementov konstrukcij s pomoshch'yu "himicheskogo" kriteriya dlitel'noj prochnostiyu [Predicting the durability of polymer structural elements using the “chemical” criterion of long-term strength]. *Voprosy oboronnoj tekhniki. Ser. 15. Kompozicionnye nemetallicheskie materialy v mashinostroenii* [Issues of defense technology. Ser. 15. Composite non-metallic materials in mechanical engineering], no. 1, 2002, pp.15-21.

[13] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.P. [Calculation of fatigue resistance of composites based on the “chemical” criterion of long-term strength]. *Raschet soprotivleniya ustalosti kompozitov na osnove "himicheskogo" kriteriya dlitel'noj prochnosti* [Issues of defense technology. Ser. 15. Composite non-metallic materials in mechanical engineering], no. 1, 2002, pp. 21-25.

[14] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy [Continuum Mechanics. Vol. 4. Universal laws of mechanics and electrodynamics of a continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[15] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Evropin S.V. Prognozirovanie dolgovechnosti i nadezhnosti elementov konstrukcij vysokogo davleniya. CHast' 1. CHislennoe modelirovanie nakopleniya povrezhdenij [Durability and Reliability forecasting of high pressure structures. Part 1. Computational 3D Modeling of damage]. *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedeny. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 11, p. 3-11.

[16] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Shiverskiy E.A. Prognozirovanie dolgovechnosti i nadezhnosti elementov konstrukcij vysokogo davleniya. CHast' 2. CHislennoe statisticheskoe modelirovanie [Durability and Reliability forecasting of high pressure structures. Part 2. Computational Statistical modeling]. *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedeny. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 12, p. 12-19.

[17] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Finite Element Modeling of Damage and Durability of Composite Structures with Local Delaminations. *Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2017, no. 3, pp. 49–70.

[18] Yu. I. Dimitrienko and I. P. Dimitrienko. Long-term strength of reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 13-18.

[19] Goodman J. *Mechanics applied to engineering*. London, UK, Longmans Green, 1899, 770 p.

[20] Pallares-Santasmartas L., Albizuri J., Aviles A., Aviles R. Mean stress effect on the axial fatigue strength of din 34CrNiMo6 quenched and tempered steel. *MDPI. Metals*, 2018, vol. 8, iss. 4, art. 213, pp.1-19.

**Dimitrienko Yu. I.,** Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

**Dimitrienko A.Yu.,** Graduate student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru