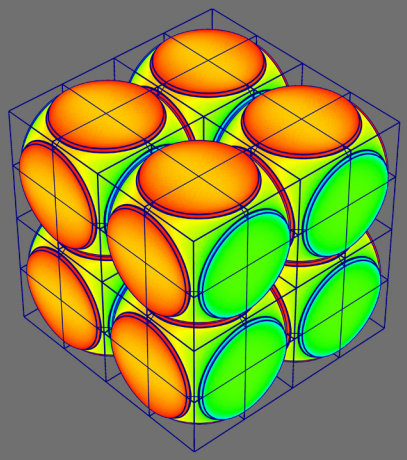
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Захаров И.И., Алероев Т.С. Решение первой краевой задачи для неоднородного дробного дифференциального уравнения. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 100-111.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/343/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.60
21.02.2026 20:44:12

УДК 517.581, 517.954 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-100111

Решение первой краевой задачи для неоднородного дробного дифференциального уравнения

© И.И. Захаров, Т.С. Алероев

НИУ МГСУ, Москва, 129347, Россия

Данная работа посвящена приближенному методу решения первой краевой задачи для неоднородного дробного-дифференциального уравнения адвекции-диффузии (дисперсии). Целью работы является построение, и реализация эффективного приближенного метода решения физико-математических задач. Краевая задача изучается для двухмерного случая. Рассматриваются проблемы нахождения собственных значений, построения поверхностей решений первой краевое задачи для неоднородного дифференциального уравнения. Показывается метод оценки точности приближенного решения. Описан алгоритм нахождения приближенного решения на основе аналитического метода разделение переменных (Метод Фурье). Для конкретных примеров приведены точные результаты вычислений, как числовые, так и графические.

Ключевые слова: *дробное исчисление, дробное уравнение адвекции-диффузии, дробная производная Римана – Лиувилля*

Введение. Дробное исчисление — это раздел прикладной математики, который фокусируется на производных и интеграл произвольного порядка (включая комплексные порядки). Он также известен как обобщенное интегральное и дифференциальное исчисление произвольного порядка. Горенфло и Майнарди определили дробное исчисление как раздел математики, связанный с изучением и применением интегралов и производных произвольного порядка.

В этом исследовании предлагается разработать аналитические методы разделения переменных (метод Фурье) для решения пространственно-временного дробного адвекции-диффузионного уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, зависящими от пространства времени. Производная Риманаи – Лиувилля рассматриваются во временном и пространственном направлениях соответственно. Поскольку аналитическое решение некоторых моделей уравнений дробной диффузии трудно получить, в частности, очень популярным стали методы конечных разностей, и совсем недавно было опубликовано большое количество схем. Были выбраны две разные схемы с возрастающим порядком точности для временной, пространственной и пространственно-временной дробной диффузии с возрастающим порядком точности для уравнения дробной диффузии во времени, пространстве – времени.

Так как эти две схемы достаточно сложны в данной работе приводится достаточно продуктивный и простой в реализации прибли-

женный метод, позволяющий моделировать различные физические процессы.

Первая краевая задача для уравнения дробной дисперсии. Рассмотрим неоднородную краевую задачу для уравнения дробной дисперсии:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + ku(x,t), \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = C, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\tau,t)d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}}$$

— дробная производная (в смысле Римана – Лиувилля), $1 < \alpha < 2$ [1].

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - Cx,$$
$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + Cx.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha} \tilde{u}(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + C\frac{d^{\alpha} x}{dx^{\alpha}},$$
$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(1,t) = 0,$$
$$\tilde{u}(x,0) = -Cx,$$
$$\frac{d^{\alpha} x}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha}.$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^{\alpha} \tilde{u}(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + \frac{C}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} \right) + k\left(\tilde{u}(x,t) + Cx\right).$$

Обозначив $p(x) = \dfrac{DC}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} + kCx,$ получим задачу для функции $\tilde{u}(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^{\alpha}\tilde{u}(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + k\tilde{u}(x,t) + p(x), \\ u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, \\ \tilde{u}(x,0) = -Cx. \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (4) будем искать в виде суммы $\tilde{u}(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x,t)$, где функции $w(x,t)$ и $\upsilon(x,t)$ являются решениями задач (5) и (6) соотвественно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^{\alpha} w(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + kw(x,t) + p(x), \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) = 0, \\ w(x,0) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^{\alpha} \upsilon(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + k\upsilon(x,t), \\ \upsilon(0,t) = 0, \\ \upsilon(1,t) = 0, \\ \upsilon(x,0) = -Cx. \end{cases} \tag{6}$$

Задача (6) может быть решена методом Фурье, решение выписывается в виде ряда по собственным функциям.

Согласно [1], решение задачи (5) может быть выписано в виде:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n X_n(x) \int_0^t S^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n S^{\alpha}) ds,$$

где

$$p_n = \frac{(p, z_n)}{(X_n, z_n)},$$

$X_n(\lambda_n, x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$ — собственные функции, $z_n(\lambda_n, x) = (1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^{\alpha})$ — собственные функции сопряженной задачи.

Таким образом, решение задачи (1)–(3) записывается в виде:

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x,t) + Cx.$$

Будем искать нетривиальное решение, непрерывное в замкнутой области Ω $(0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1)$ однородного дробного дифференциаль-

ного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и начальному условию (3). Для решения этой задачи рассмотрим, как это принято в методе разделения переменных [1], сначала основную вспомогательную задачу: найти не тождественно нулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям (2) в виде:

$$\upsilon(x,t) = X(x), T(t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1), получаем:

$$\begin{gathered} D \cdot \frac{d^{\alpha} X}{dx^{\alpha}} T + kXT = X \frac{dT}{dt}, \\ \frac{D \dfrac{d^{\alpha} X}{dx^{\alpha}}}{X} + k = \frac{dT}{Tdt} = \mu, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\mu = \text{const}$, так как левая часть уравнения (8) зависит только от x, а правая только от t.

Граничные условия (2) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X\left(x\right)$ получена задача Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} D \cdot \dfrac{d^{\alpha} X}{dx^{\alpha}} = (\mu - k) X(x), \\ X(0) = 0, \ X(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Данная задача (10) была подробно изучена в [1], [5], [8]. Показано, что число $\lambda_n = \dfrac{\mu_n - k}{D}$ вляется собственным значением (10), только в том случае, когда оно является нулем функции Миттаг – Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$:

$$E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^j}{\Gamma(a + aj)}. \tag{11}$$

Для таких λ_n существуют собственные функции задачи, равные:

$$X_n(\lambda_n, x) = x^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \tag{12}$$

Эти собственные значения λ_n, очевидно, соответствуют решения уравнения:

$$T'(t) = \lambda T(t),$$
$$T_n(\lambda_n, t) = \varphi_n e^{(D\lambda_n + k)t},$$

где φ_n — ещё не определенные коэффициенты.

Таким образом, функции

$$\upsilon_n(x,t) = X_n(\lambda_n, t) \cdot T_n(\lambda_n, t) = \varphi_n e^{(D\lambda_n + k)t} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha),$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими нулевым граничным условиями (2).

Перейдем теперь к решению задачи (1)–(3). Составляем ряд:

$$\upsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{(D\lambda_n + k)t} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha). \tag{13}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha). \tag{14}$$

В [8] показано, что система функций $\{X_n(\lambda_n, x)\} = \{x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,1)$. Так как базис $\{X_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ не ортогонален, то вместе с системой $\{X_n(\lambda_n, x)\}$ будем рассматривать систему

$$\{z_n(\lambda_n, x)\} = \{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)\}_{n=1}^{\infty},$$

которая биортогональна $\{X_n(\lambda_n, x)\}$ [8]. Вообще говоря, система $z_n(\lambda_n, x)$ — система собственных функций сопряженной задачи [6]

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha Y}{d(1-x)^\alpha} = \lambda Y(x), \\ Y(0) = Y(1) = 0. \end{cases}$$

Для определения неизвестных коэффициентов φ_n обе части равенства (13) умножаем на систему функций $z_n(\lambda_n, x)$:

$$\varphi(x) z_n(\lambda_n, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(\lambda_n, x) z_n(\lambda_n, x). \tag{15}$$

Равенство (15) можно почленно проинтегрировать по отрезку [0;1]:

$$\int_0^1 \varphi(x) z_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 X_n(x) z_n(x) dx. \qquad (16)$$

Равенство (13) можно переписать в виде:

$$(\varphi, z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (X_n, z_n), \qquad (17)$$

где $(\varphi, z_n) = \int_0^1 \varphi(x) z_n(x) dx,\ (X_n, z_n) = \int_0^1 X_n(x) z_n(x) dx.$

В силу биортогональности систем функций $\{X_n\}$ и $\{z_n\}$ из (17) следует, что $(\varphi, z_n) = \varphi_n (X_n, z_n)$. Отсюда:

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)}. \qquad (18)$$

Таким образом, решение задачи (6) записывается в виде:

$$\upsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)} e^{(D\lambda_n + k)t} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \qquad (19)$$

Приближенное решение первой краевой задачи. Для нахождения приближенного решения сначала получим несколько первых собственных значений λ_n из уравнения:

$$E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^j}{\Gamma(\alpha + \alpha j)} = 0 \qquad (20)$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений нескольких первых собственных значений для некоторых $1 < \alpha < 2$.

Таблица 1

Первые собственные значения для $1 < \alpha < 2$

α	1,1	1,2	1,3	1,4
λ_n	–5,1	–4,567	–4,52	–4,71
	–10,795 ± 7,989i	–14,139 ± 6,9214i	–17,92 ± 3,92i	–16,73
	–14,338 ± 16,876i	–21,916 ± 18,035i	–32,27 ± 17,14i	–26,22
	–17,273 ± 26,049i	–28,880 ± 30,344i	–45,82 ± 32,68i	–45,42 ± 12,81i
	–19,920 ± 35,456i	–35,547 ± 43,497i	–59,42 ± 50,08i	–69,17 ± 30,81i
	–//–	–//–	–//–	–94,02 ± 52,77i

Окончание табл. 1

α	1,5	1,6	1,7	1,8
λ_n	–5,075	–5,61	–6,322	–7,240
	–17,472	–19,513	–22,570	–26,737
	–32,129	–38,158	–45,945	–56,345
	–55,834	–62,410	–76,129	–95,44
	–64,586	–88,22	–111,77	–143,27
	–99,718 ± 21,304i	–123,88	–153,70	–199,67

Таким образом, для приближенного решения задачи (6) достаточно взять первых нескольких членов ряда:

$$\upsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\varphi,z_n)}{(X_n,z_n)}e^{(D\lambda_n+k)t}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \qquad (21)$$

Приближенное решение обозначим:

$$\upsilon_0(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\varphi,z_n)}{(X_n,z_n)}e^{(D\lambda_n+k)t}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \qquad (22)$$

Пользуясь обозначенным (22), построим поверхности приближенного решения рис. 1 — 3 при помощи программного комплекса MATLAB.

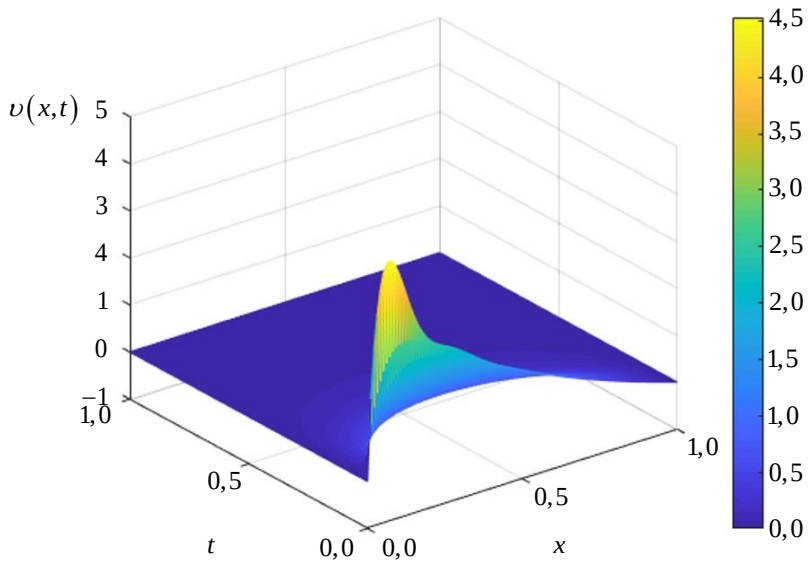


Рис. 1. Приближенное решение при $\alpha=1,7;\ k=0;\ C=4$

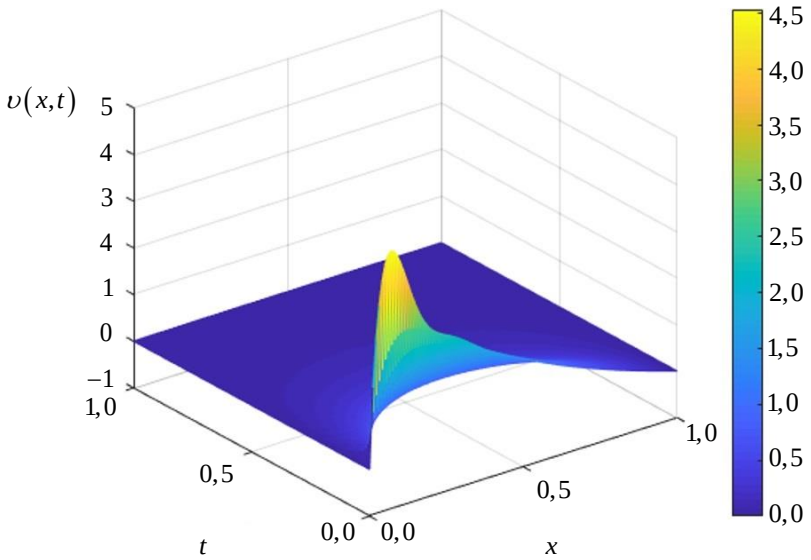


Рис. 2. Приближенное решение при $\alpha = 1{,}7;\ k = 1;\ C = 4$

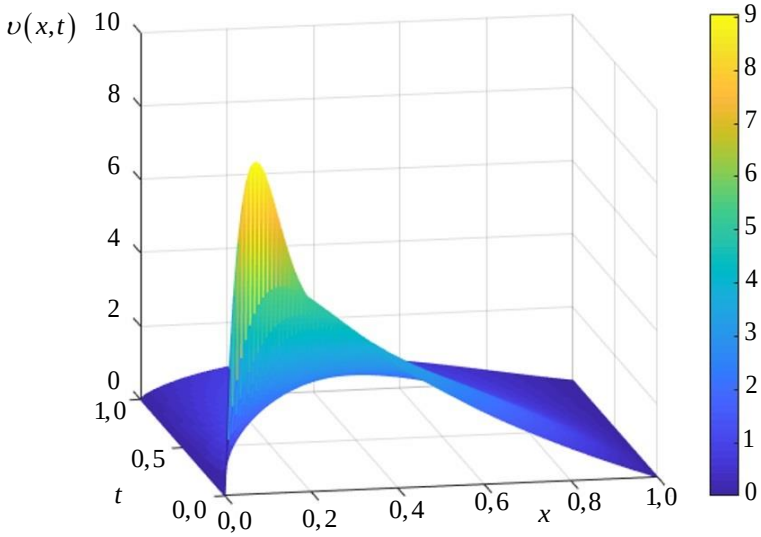


Рис. 3. Приближенное решение при $\alpha = 1{,}7;\ k = 5;\ C = 4$

Оценка точности приближенного решения. Для оценки точности приближенного решения (22) согласно [8] рассмотрим величину

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\max\limits_{\Omega}\left|\upsilon_N(x,t)\right|}{\max\limits_{\Omega}\left|\upsilon_0(x,t)\right|}\cdot 100\ \%, \tag{23}$$

где Ω $(0 \le x \le 1{,}0 \le t \le T)$ — замкнутая область, $\upsilon_N(x,t) = \dfrac{(\varphi, z_N)}{(X_N, z_N)}\times$ $\times e^{(D\lambda_N + k)} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_N x^\alpha)$ — последний член суммы (22).

Результаты вычислений (23) для различных начальных условий $\varphi(x)$ приведены в табл. 2 — 4.

Таблица 2

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = x - x^2$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
ε_α, %	0,047	0,041	0,035	0,021	0,025	0,021	0,024	0,019	0,020

Таблица 3

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = \sin(\pi x)$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
ε_α, %	0,043	0,038	0,032	0,017	0,021	0,016	0,021	0,016	0,017

Таблица 4

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
ε_α, %	0,058	0,051	0,044	0,029	0,034	0,021	0,024	0,019	0,020

Определим невязку, подставив приближенное решение (22) в (1):

$$\delta_0(x,t) = \frac{\partial \upsilon_0(x,t)}{\partial t} - D \cdot \frac{\partial^\alpha \upsilon_0(x,t)}{\partial x^\alpha} + k\upsilon_0(x,t),$$

$$\delta_\alpha = \frac{\max\limits_{\Omega} \left|\delta_0(x,t)\right|}{\max\limits_{\Omega} \left|\upsilon_0(x,t)\right|} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений невязки приближенного решения отображены в табл. 5 — 7.

Таблица 5

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = x - x^2$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
δ_α, %	0,086	0,079	0,069	0,039	0,048	0,038	0,045	0,035	0,037

Таблица 6

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = \sin(\pi x)$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
δ_α, %	0,082	0,073	0,061	0,033	0,040	0,029	0,038	0,028	0,031

Таблица 7

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
δ_α, %	0,101	0,092	0,081	0,055	0,063	0,039	0,044	0,036	0,037

Полученные результаты расчетов свидетельствуют о высокой точности нахождения решения задачи (6) функцией (22).

В табл. 8 приведены результаты вычисления первых собственных значений на отрезке $1,9 \le \alpha \le 2,0$, при $\alpha = 2$ спользуется теоретическое значение равное $(\pi n)^2$.

Таблица 8

Первые собственные значения для $1,9 < \alpha < 2,0$

α	1,9	1,95	1,97	1,99	2 теоретические значения $(\pi n)^2$
λ_n	–8,404	–9,09	–9,39	–9,70	–9,87
	–32,253	–35,62	–37,10	–38,66	–39,48
	–70,247	–78,86	–82,67	–86,72	–88,83
	–121,86	–138,49	–145,9	–153,78	–157,91

Результаты. Рассмотрен метод и алгоритм решения неоднородного дробно-дифференциального уравнения адвекции–диффузии. Уравнение решается на основе аналитического метода разделения переменных (метода Фурье). Результаты вычислительного эксперимента демонстрируют высокую точность приближенного решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gorenflo R., Mainardi F. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*. Springer Vienna, 1997, pp. 223–276.
[2] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation *Applied Mathematics Letters*, 1996, vol. 9, iss. 6, pp. 23–28.
[3] Wyss W. The fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1986, vol. 27, iss. 11, pp. 2782–2785.
[4] Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, pp. 145–155.
[5] Aleroev T., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 194, no. 5, pp. 499–512.
[6] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва, Физматлит, 2003, 271 с.

[7] Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, iss. 1, pp. 1766–1772.
[8] Aleroev T., Aleroeva H. Problems of Sturm–Liouville type for differential equations with fractional derivatives. *Fractional Diffrential Equations*, 2019, pp. 21–46.
[9] Aleroev T. Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables. *Mathematics*, 2020, vol. 8, iss. 1, art. no. 1877. DOI: 10.3390/math8111877
[10] Aleroev T., Aleroeva H., Huang J., Tamm M., Tang Y., Zhao Y. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations. *Computers and Mathetics with Applications*, 2017, vol. 73, iss. 6, pp. 959–969.
[11] Mahmoud E.I., Aleroev T.S. Boundary value problem of space-time fractional adverction diffuion equation. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 17, art. no. 3160. DOI: 10.3390/math10173160
[12] Tfayli A. *Sur quelques équations aux dérivées partielles fractionnaires, théorie et applications*. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Français, Université de La Rochelle, 2020. ffNNT: 2020LAROS031ff. fftel-03549142f
[13] Kaltenbacher Â., Rundell W. *Inverse problems for fractional partial differential equations*. New York, American Mathematical Society, 2020, 505 p.
[14] Jin B. *Fractional differential equations*. Switzerland, Springer International Publishing, 2021, 368 p.
[15] Aleroev T., Orlov V.On one approximate metod of a boundary value problem for a one-dimensional advection-diffusion equation. *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 10, art. no. 541. DOI: 10.3390/axioms11100541

Статья поступила в редакцию 10.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Захаров И.И., Алероев Т.С. Решение первой краевой задачи для неоднородного дробного дифференциального уравнения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 2, с. 100-111.

Захаров Иван Иванович — аспирант кафедры высшей математики НИУ МГСУ. e-mail: kroshvanya@yandex.ru

Алероев Темирхан Султанович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики НИУ МГСУ. e-mail: aleroev@mail.ru

Solution of the first boundary value problem for the inhomogeneous fractional differential equation

© I.I. Zakharov, T.S. Aleroev

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129347, Russia

This paper is devoted to an approximate method for solving the first boundary value problem for the inhomogeneous fractional-differential advection-diffusion (dispersion) equation. The aim of the work is to construct, and realize an effective approximate method for solving physical and mathematical problems. The boundary value problem is studied for the two-dimensional case. The problems of finding eigenvalues and constructing surfaces of solutions of the first boundary value problem for the inhomogeneous differential equation are considered. The method of estimating the accuracy of the approximate

solution is shown. An algorithm for finding an approximate solution based on the analytical method of separation of variables (Fourier method) is described. The exact results of calculations, both numerical and graphical, are given for specific examples.

Keywords: *fractional calculus, fractional advection-diffusion equation, fractional Riemann – Liouville derivative*

REFERENCES

[1] Gorenflo R., Mainardi F. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*. Springer Vienna, 1997, pp. 223–276.
[2] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation *Applied Mathematics Letters*, 1996, vol. 9, iss. 6, pp. 23–28.
[3] Wyss W. The fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1986, vol. 27, iss. 11, pp. 2782–2785.
[4] Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, pp. 145–155.
[5] Aleroev T., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 194, no. 5, pp. 499–512.
[6] Nahushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 271 p.
[7] Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, iss. 1, pp. 1766–1772.
[8] Aleroev T., Aleroeva H. Problems of Sturm–Liouville type for differential equations with fractional derivatives. *Fractional Diffrential Equations*, 2019, pp. 21–46.
[9] Aleroev T. Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables. *Mathematics*, 2020, vol. 8, iss. 1, art. no. 1877. DOI: 10.3390/math8111877
[10] Aleroev T., Aleroeva H., Huang J., Tamm M., Tang Y., Zhao Y. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations. *Computers and Mathetics with Applications*, 2017, vol. 73, iss. 6, pp. 959–969.
[11] Mahmoud E.I., Aleroev T.S. Boundary value problem of space-time fractional adverction diffuion equation. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 17, art. no. 3160. DOI: 10.3390/math10173160
[12] Tfayli A. *Sur quelques équations aux dérivées partielles fractionnaires, théorie et applications*. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Français, Université de La Rochelle, 2020. ffNNT: 2020LAROS031ff. fftel-03549142f
[13] Kaltenbacher Â., Rundell W. *Inverse problems for fractional partial differential equations*. New York, American Mathematical Society, 2020, 505 p.
[14] Jin B. *Fractional differential equations*. Switzerland, Springer International Publishing, 2021, 368 p.
[15] Aleroev T., Orlov V.On one approximate metod of a boundary value problem for a one-dimensional advection-diffusion equation. *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 10, art. no. 541. DOI: 10.3390/axioms11100541

Zakharov I.I., Dr. Sc. (Phys. — Math.), postgraduate student of the Department of Higher Mathematics, NRU Moscow State University of Civil Engineering. e-mail: kroshvanya@yandex.ru

Aleroev T.S., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Professor of Department of Higher Mathematics, NRU Moscow State University of Civil Engineering. e-mail: aleroev@mail.ru