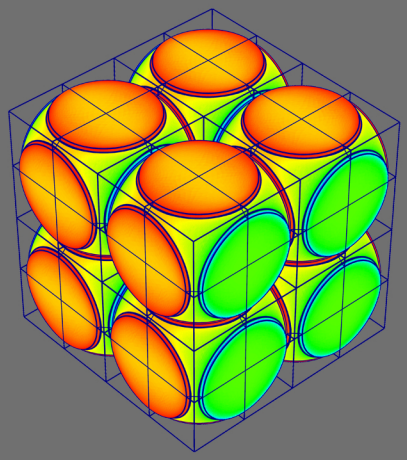
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Мозжорина Т.Ю., Закуражная А.А. Моделирование влияния времени схода с орбиты Земли на оптимальное управление перелетом малоразмерного КА на Венеру. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 88–99.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/342/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:50:13

УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-8599

Моделирование влияния времени схода с орбиты Земли на оптимальное управление перелетом малоразмерного космического аппарата на Венеру

© Т.Ю. Мозжорина, А.А. Закуражная

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В данной работе рассматривается оптимизация управления перелетом малого космического аппарата (КА) на ионных двигателях на орбиту Венеры с учетом притяжения Земли и времени схода с геостационарной орбиты. При решении задачи были приняты следующие допущения: орбиты планет являются круговыми, лежащими в одной плоскости. Подробное рассмотрение влияния Венеры при приближении к орбите планеты не рассматривалось. Задача решается при помощи принципа максимума Понтрягина численным методом пристрелки. Моделирование движения КА было разбито на 3 этапа: разгон КА до скорости, позволяющей преодолеть притяжение Земли с помощью кратковременной работы реактивного двигателя, оптимизация управления вблизи Земли при расстоянии КА до Земли не более 950 000 км и на основной межорбитальный перелет между планетами. Алгоритм решения задачи реализован на языке программирования C++. Получено оптимальное управление углом действия вектора тяги. Анализ полученных результатов показал, что при минимизации времени достижения орбиты Венеры помимо существенного влияния на критерий эффективности наиболее протяженного межорбитального участка перелета принципиально важным является момент начала старта (схода с Земной орбиты).

Ключевые слова: *оптимальное управление, перелет между орбитами Земли и Венеры, метод пристрелки, ионные двигатели, принцип максимума Понтрягина, краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Введение. Осуществление перелета космических аппаратов на другие планеты является сложной технической задачей. Изучение планеты Венера является одним из важных и интересных направлений в космической исследовательской деятельности. Венера — вторая планета от Солнца, которая является нашим ближайшим соседом в Солнечной системе. До настоящего времени было запущено несколько миссий на Венеру, которые позволили получить ценную информацию о планете. Особый интерес представляет исследование возможности существования микроорганизмов на Венере. Их наличие или отсутствие позволит лучше понять, насколько вероятным является зарождение жизни на планете [1].

Основной целью изучения Венеры является получение информации о структуре и составе ее атмосферы, климатических условиях и геологических процессах, которые происходят на поверхности планеты. Это позволит ученым разработать более эффективные методы и технологии для исследования космического пространства [2].

В настоящее время разрабатывается российская автоматическая межпланетная станция (АМС) «Венера-Д» («Венера-Долгоживущая»), которая представляет собой комплексный научный проект, включающий в себя несколько аппаратов. «Венеру-Д» планируется запустить после 2030 года. В рамках миссии предполагается отправить на планету несколько аппаратов, которые будут работать параллельно и собирать данные о различных аспектах планеты [3].

Ионные двигатели потребляют гораздо меньше топлива, чем традиционные химические двигатели, что позволяет увеличить время полета космических аппаратов. Недостатком их является малая величина создаваемой тяги, что не позволяет за счет них совершать не только старт с поверхности планеты, но и делает нецелесообразным с их помощью уход даже с высоких орбит Земли [4]. Поэтому в работе была рассмотрена составная силовая установка, где сход с геостационарной орбиты [5] Земли должен обеспечивать твердотопливный реактивный двигатель. Этот первый этап разгона КА длится малое время, соизмеримое с парой минут, поэтому оптимизация этого участка не рассматривалась, предполагалось действие тяги вдоль скорости движения КА.

Актуальность выбранной темы исследования подтверждается появлением в печати работ, посвященным перелету к орбитам планет Солнечной системы малых КА с двигателями малых тяг (ионные двигатели и солнечный парус) [6], [7], [8].

Физическая постановка задачи. Решение задачи оптимизации перелета КА разбито на 3 этапа: первый — разгон до скорости 5,3 км/с за счет работы твердотопливного реактивного двигателя, второй — полет в зоне существенного влияния сил притяжения Земли и третий — межорбитальный перелет.

На втором этапе полета в зоне действия силы тяготения Земли (в пределах расстояния от Земли до 950000 км) уравнения движения КА расписаны в геоцентрической системе координат с учетом притяжения сил тяготения Солнца. Критерий эффективности — время, затраченное на достижение расстояния между КА и Землей равному 950000 км. При расчетах варьируется угол схода КА с геостационарной орбиты φ_0 (угол между продолжением радиуса от Солнца до Земли и радиусом от Земли до КА). Этот угол сопоставим со временем суток: вечер (углы, достигающие в отрицательном направлении 90 градусов и более), глубокая ночь (КА находится в тени Земли) и утро (положительные углы в районе 90 градусов и более). Привязки к конкретной широте и долготе нет, тем более не анализируется время суток с учетом поясного времени.

На третьем этапе, где силы притяжения Земли уже не оказывают значительного влияния на траекторию движения, уравнения движе-

ния КА расписаны уже в гелиоцентрической системе координат. При решении задач приняты следующие допущения: орбиты планет являются круговыми, лежащими в одной плоскости; Солнце является неподвижным центром гелиоцентрической системы координат; не учитывается притяжение Венеры.

Математическая постановка задачи. Математическая модель минимизации времени перелета космического аппарата на орбиту Венеры, как на втором этапе, так и на третьем, представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), полученную при использовании принципа максимума Понтрягина [9]. Решение краевой задачи реализовано методом пристрелки [10]. Целью задачи оптимального управления (ОУ) является минимизация функционала:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{v^2}{R} - g_z \cdot \left(\dfrac{R_{zr0}}{R_{zr}} \right)^2 + \dfrac{T_{отн}}{\left(1 - Q_{отн} \cdot t\right)} \sin\theta - \\ - \left[g_s \cdot \left(\dfrac{R_{sr0}}{R_{sr}} \right)^2 - \omega_z^2 R_{sr} \right] \cdot \cos\alpha + 2\omega_z v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-uv}{R} + \dfrac{T_{отн}}{\left(1 - Q_{отн} \cdot t\right)} \cos\theta + \left[g_s \cdot \left(\dfrac{R_{sr0}}{R_{sr}} \right)^2 - \omega_z^2 R_{sr} \right] \cdot \sin\alpha - \\ -2\omega_z u, \\ \dfrac{dR}{dt} = u, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{v}{R}. \end{cases} \qquad (1)$$

где t — время, с; u — скорость движения ракеты вдоль радиуса, м / с; v — скорость движения ракеты по касательной к окружности с центром в Земле, м / с; $R = R_{zr}$ — расстояние от Земли до КА, м; R_{sr} — расстояние от Солнца до КА, м; φ — полярный угол положения ракеты, рад; R_0 — начальное положение радиуса Земной орбиты, м; θ — угол между касательной скоростью и направлением тяги, рад; α — угол между радиусами от Солнца до КА и от Земли до КА, рад; ω_z — угловая скорость Земли, м / с; g_s — влияние притяжения от Солнца, м / с^2; g_z — влияние притяжения от Земли, м / с^2; $Q_{отн} = Q / m_0$ — отношение расхода топлива двигателя к исходной массе, сутки$^{-1}$; m_0 — масса КА, кг; $T_{отн} = T / m_0$ — отношение тяги двигателя к исходной массе, м / с^2. На рис. 1 представлена общая схема межорбитального перелета КА с орбиты Земли на орбиту Ве-

неры с учетом допущения о круговых орбитах. В качестве управления при решении данной задачи был выбран согласно с моделью из [11] угол действия тяги ионного двигателя θ между касательной скоростью и направлением тяги.

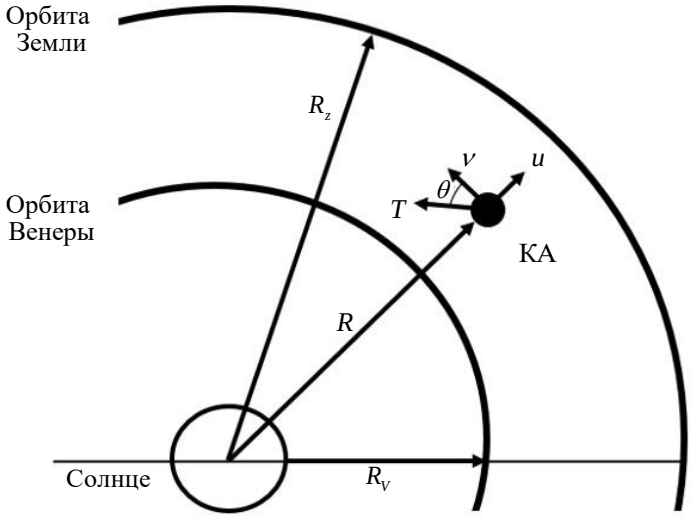


Рис. 1. Общая схема межорбитального полета КА

На рис. 2 представлены направления действия сил на КА и основные углы, присутствующие в системе уравнений движения на втором этапе.

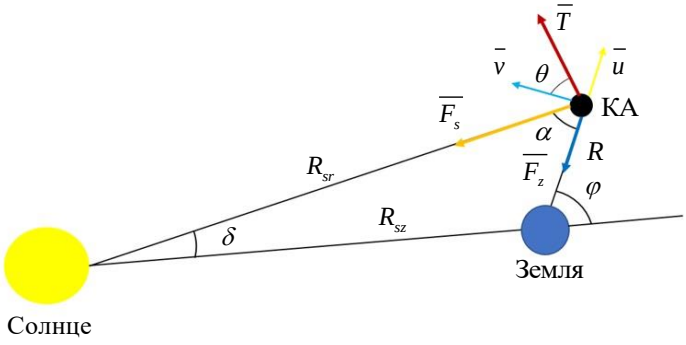


Рис. 2. Силы, действующие на КА на втором этапе полета

Функция Понтрягина для текущей задачи будет иметь вид:

$$H = \psi_u \left(\frac{v^2}{R} - g_z \cdot \left(\frac{R_{zr0}}{R_{zr}} \right)^2 + \frac{T_{отн}}{\left(1 - Q_{отн} \cdot t\right)} \cdot \sin\theta - \right.$$
$$\left. - \left[g_s \cdot \left(\frac{R_{sr0}}{R_{sr}} \right)^2 - \omega_z^2 R_{sr} \right] \cdot \cos\alpha + 2\omega_z v \right) +$$

$$+\psi_v\left(\frac{-uv}{R}+\frac{T_{отн}}{\left(1-Q_{отн}\cdot t\right)}\cdot\cos\theta+\left[g_s\cdot\left(\frac{R_{sr0}}{R_{sr}}\right)^2-\omega_z^2R_{sr}\right]\cdot\sin\alpha-2\omega_z u\right)+$$

$$+\psi_R u+\psi_\varphi\frac{v}{R}-1,$$

где ψ_u, ψ_v, ψ_R, ψ_φ — сопряженные переменные.

Для того, чтобы получить оптимальное управление воспользуемся уравнение Эйлера в канонической форме по управлению:

$$\frac{\partial H}{\partial\theta}=\psi_u\left(\frac{T_{отн}}{1-Q_{отн}\cdot t}\cdot\cos\theta\right)-\psi_v\left(\frac{T_{отн}}{1-Q_{отн}\cdot t}\cdot\sin\theta\right)=0.$$

Отсюда тангенс оптимального угла действия тяги:

$$\sin\theta^*=\frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u^2+\psi_v^2}},\ \cos\theta^*=\frac{\psi_v}{\sqrt{\psi_u^2+\psi_v^2}}.$$

Сопряженная система примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_u}{dt}=\dfrac{v}{R}\psi_v-\psi_R+2\psi_v\omega_z,\\ \dfrac{d\psi_v}{dt}=\dfrac{d\psi_v}{dt}=\psi_v\dfrac{u}{R}-\psi_u\dfrac{2v}{R}-\dfrac{\psi_\varphi}{R}-2\psi_u\omega_z,\\ \dfrac{d\psi_R}{dt}=\psi_u\dfrac{v^2}{R^2}-2g_z\psi_u\dfrac{R_0^{\ 2}}{R^3}-\psi_v\dfrac{uv}{R^2}+\psi_\varphi\dfrac{v}{R^2}+\\ +\dfrac{g_sR_{s-r0}^2}{R_{s-r}^3}\cdot\left(\psi_u\cdot\left(R_{s-r}\cos(\alpha)_R^{'}-2\left(R_{s-r}\right)_R^{'}\cos(\alpha)\right)-\right.\\ \left.-\psi_v\cdot\left(R_{s-r}\sin(\alpha)_R^{'}-2\left(R_{s-r}\right)_R^{'}\sin(\alpha)\right)\right)-F_3,\\ \dfrac{d\psi_\varphi}{dt}=\dfrac{g_sR_{s-r0}^2}{R_{s-r}^3}\left(\psi_u\cdot\left(R_{s-r}\cos(\alpha)_\varphi^{'}-2\left(R_{s-r}\right)_\varphi^{'}\cos(\alpha)\right)-\right.\\ \left.-\psi_v\cdot\left(R_{s-r}\sin(\alpha)_\varphi^{'}-2\left(R_{s-r}\right)_\varphi^{'}\sin(\alpha)\right)\right)+F_4+F_5,\end{cases}$$

где

$$F_3=\omega_z^2\left(\frac{\partial R_{sr}}{\partial R}\cdot\left(\psi_u\cos\alpha-\psi_v\sin\alpha\right)+R_{sr}\left(\psi_u\frac{\partial\cos\alpha}{\partial R}-\psi_v\frac{\partial\sin\alpha}{\partial R}\right)\right),$$

$$F_4=-\psi_u\cdot\omega^2\cdot\left(\frac{\partial R_{sr}}{\partial\varphi}\cos\alpha+\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varphi}R_{sr}\right),$$

$$F_5=\psi_v\cdot\omega^2\cdot\left(\frac{\partial R_{sr}}{\partial\varphi}\sin\alpha+\frac{\partial\sin\alpha}{\partial\varphi}R_{sr}\right).$$

За параметры пристрелки, которые являются недостающими начальными условиями, выбираем:

$$\psi_u(t_0),\ \psi_v(t_0),\ \psi_R(t_0),\ \psi_\varphi(t_0),\ t_1,$$

где t_1 — время перелета, требуемое для достижения расстояния $R_{fII} = 950\,000$ км от центра Земли.

При численном интегрирование системы ДУ на правом конце образуются невязки:

$$\begin{gathered}\delta_1 = \psi_u(t_1) \to 0,\\ \delta_2 = \psi_v(t_1) \to 0,\\ \delta_3 = \frac{R(t_1) - R_{fII}}{R_{fII}} \to 0,\\ \delta_4 = H(t_1) \to 0,\\ \delta_5 = \psi_\varphi(t_1) \to 0.\end{gathered}$$

Уравнения движения и сопряженная система образуют краевую задачу для системы ОДУ.

На третьем этапе, где силы притяжения Земли уже не оказывают значительного влияния на траекторию движения, уравнения движения КА расписаны в гелиоцентрической системе координат:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{v^2}{R} + \dfrac{T_{отн}}{(1 - Q_{отн}\cdot t)}\cdot\sin\theta - g_s\cdot\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^2 - g_z\cdot\left(\dfrac{R_{zr0}}{R_{zr}}\right)^2\cdot\cos\alpha,\\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-uv}{R} + \dfrac{T_{отн}}{(1 - Q_{отн}\cdot t)}\cdot\cos\theta - g_z\cdot\left(\dfrac{R_{zr0}}{R_{zr}}\right)^2\cdot\sin\alpha,\\ \dfrac{dR}{dt} = u,\\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{v}{R}.\end{cases}$$

Функция Понтрягина для уравнений движения на данном этапе:

$$\begin{aligned}H = \psi_u&\left(\frac{v^2}{R} + \frac{T_{отн}}{(1 - Q_{отн}\cdot t)}\cdot\sin\theta - g_s\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - g_z\cdot\left(\frac{R_{zr0}}{R_{zr}}\right)^2\cdot\cos\alpha\right) +\\ +\psi_v&\left(\frac{-uv}{R} + \frac{T_{отн}}{(1 - Q_{отн}\cdot t)}\cdot\cos\theta - g_z\cdot\left(\frac{R_{zr0}}{R_{zr}}\right)^2\cdot\sin\alpha\right) +\\ &+\psi_R u + \psi_\varphi\frac{v}{R} - 1.\end{aligned}$$

Оптимальное управление останется прежним:

$$\sin\theta^* = \frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u{}^2 + \psi_v{}^2}},\ \cos\theta^* = \frac{\psi_v}{\sqrt{\psi_u{}^2 + \psi_v{}^2}}.$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_u}{dt} = \dfrac{v}{R}\psi_v - \psi_R, \\ \dfrac{d\psi_v}{dt} = \psi_v \dfrac{u}{R} - \psi_u \dfrac{2v}{R} - \dfrac{\psi_\varphi}{R}, \\ \dfrac{d\psi_R}{dt} = \psi_u \dfrac{v^2}{R^2} - 2g_s\psi_u \dfrac{R_0^2}{R^3} - \psi_v \dfrac{uv}{R^2} + \psi_\varphi \dfrac{v}{R^2} + \dfrac{g_z R_{zr0}^2}{R_{zr}^3} \times \\ \times\left(\psi_u \cdot \left(R_{zr}(\cos\alpha)_R' - 2\cdot(R_{zr})_R' \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{sgn}\right) + \right. \\ \left. +\psi_v \cdot \left(R_{zr}(\sin\alpha)_R' - 2\cdot(R_{zr})_R' \cdot \sin\alpha\right)\right), \\ \dfrac{d\psi_\varphi}{dt} = \dfrac{g_z R_{zr0}^2}{R_{zr}^3}\left(\psi_u \cdot \left(R_{zr}(\cos\alpha)_\varphi' - 2\cdot(R_{zr})_\varphi' \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{sgn}\right) + \right. \\ \left. +\psi_v \cdot \left(R_{zr}(\sin\alpha)_\varphi' - 2\cdot(R_{zr})_\varphi' \cdot \sin\alpha\right)\right). \end{cases}$$

Параметры пристрелки:

$$\psi_u(t_0),\ \ \psi_v(t_0),\ \ \psi_R(t_0),\ \ \psi_\varphi(t_0),$$

где t_0 — время перелета КА до орбиты Венеры.

При численном интегрирование системы ДУ на правом конце образуются невязки:

$$\delta_1 = u(t_1) \to 0,$$
$$\delta_2 = \frac{v(t_1) - v_1}{v_1} \to 0,$$
$$\delta_3 = \frac{R(t_1) - R_1}{R_1} \to 0,$$
$$\delta_4 = H(t_1) \to 0,$$
$$\delta_5 = \psi_\varphi(t_1) \to 0.$$

Здесь u_1, v_1, R_1 — радиальная скорость в конце полета в гелиоцентрической системе координат, тангенциальная скорость, равная орбитальной скорости полета Венеры, радиус Венеры соответственно.

Алгоритм численной реализации математической модели. Задача решается при помощи принципа максимума Понтрягина численным методом пристрелки. В алгоритм метода пристрелки входит модифицированный метод Ньютона для решения системы нелиней-

ных алгебраических уравнений. Для улучшения сходимости метода Ньютона использовалась локальная норма, введенная Р.П. Федоренко в [12]. Полученная СЛАУ решалась с использованием LU-разложения. Внутренний цикл — интегрирование П-системы решается с помощью метода Рунге–Кутта четвертого порядка.

Результаты моделирования. Для реализации решения данной задачи была написана программа на языке программирования C++. Точность решения в методе Ньютона составляет $\varepsilon = 10^{-5}$, число шагов для численного решения системы ДУ методом Рунге–Кутта равно 1000. Время полета КА для достижения расстояния 950000 км составляет около трех суток при различных углах φ_0. Результаты расчетов представлены на рис. 3–11.

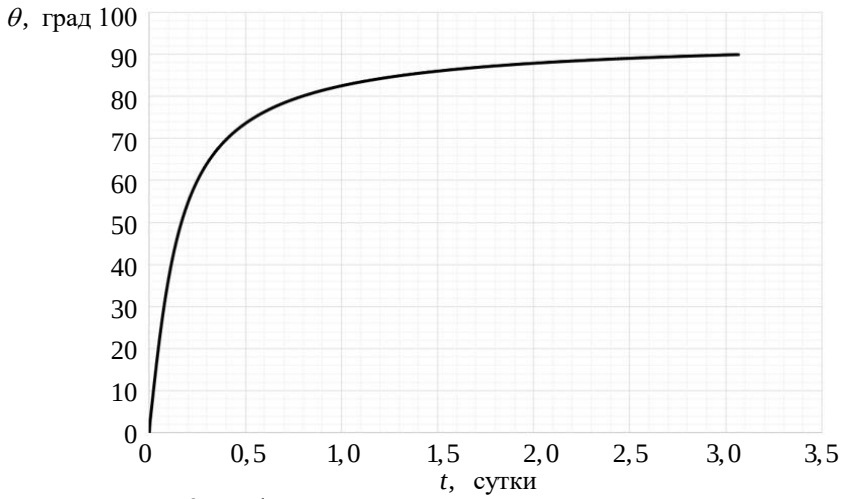


Рис. 3. График изменения управления θ на втором этапе

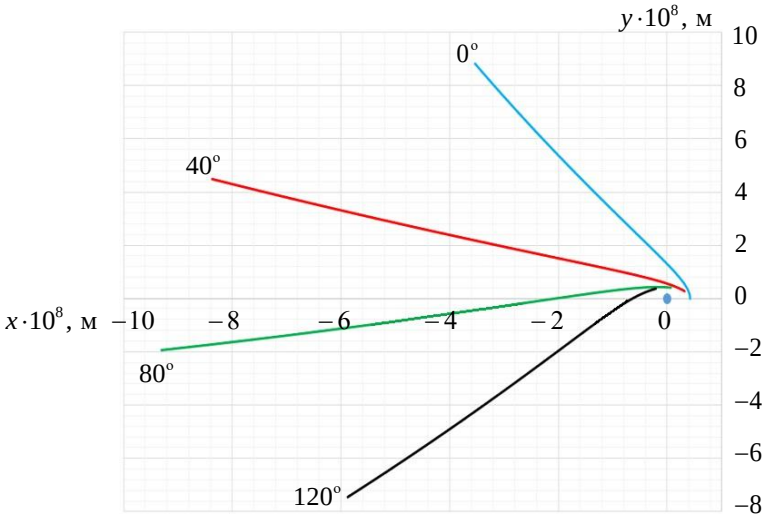


Рис. 4. График траекторий полета КА в геоцентрической системе координат на втором этапе вычислений

Больший интерес представляет поведение управления на третьем этапе. Угол действия тяги от направления текущей окружной скорости отсчитывается в принятой математической модели по направлению часовой стрелки. В начале межорбитального перелета угол θ находится в третьей четверти. В конце перелета — во второй четверти независимо от угла φ_0. Для углов φ_0, равных $0^\circ, 20^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$, происходит поворот через 0°, а для углов, равных $40^\circ, 60^\circ$, поворот угла действия тяги меняет направление на противоположное через 180° (рис. 5, 6).

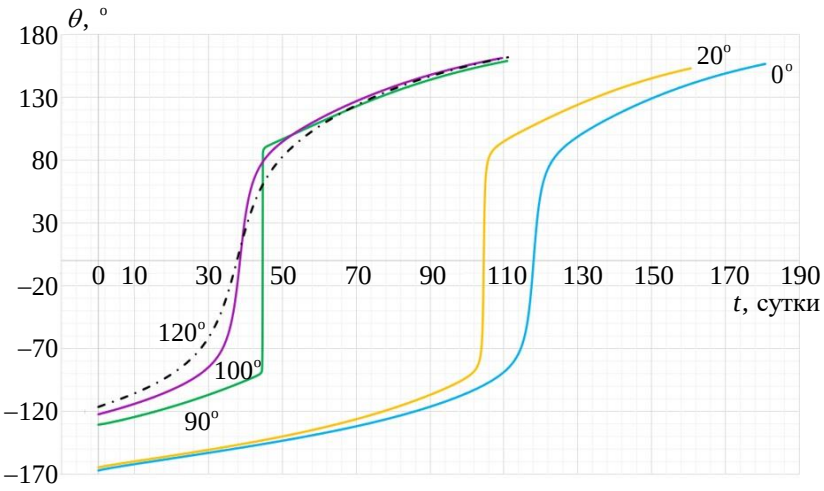


Рис. 5. Изменение оптимального управления в зависимости от угла φ_0 при повороте вектора тяги в процессе полета через 0°

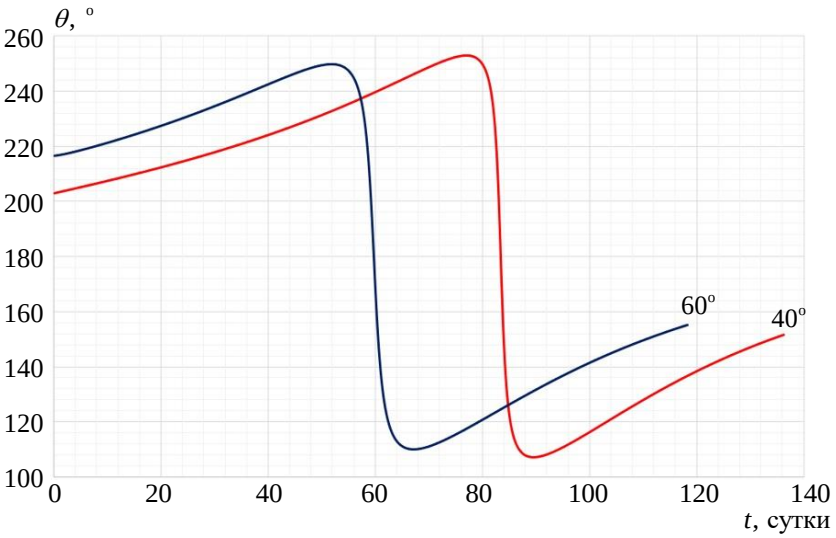


Рис. 6. Изменение оптимального управления в зависимости от угла φ_0 при повороте вектора тяги в процессе полета через 180°

Графики данных по составляющим скорости на третьем этапе вычислений представлены на рис. 7, 8.

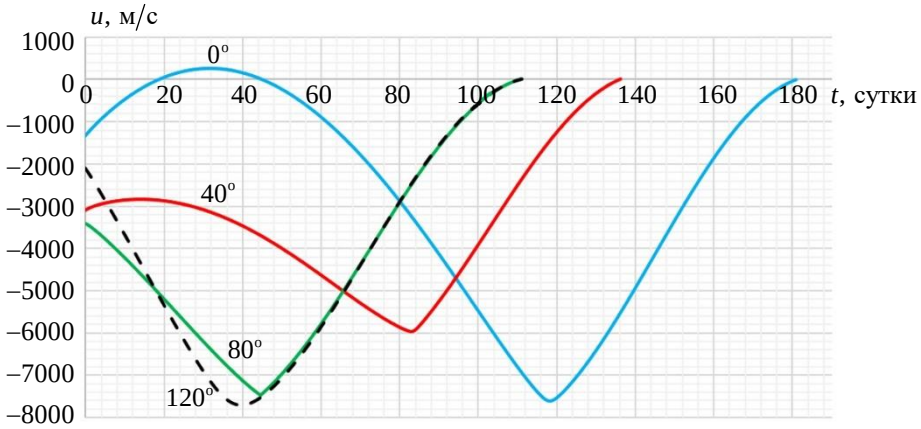


Рис. 7. Изменение радиальной скорости в зависимости от угла φ_0

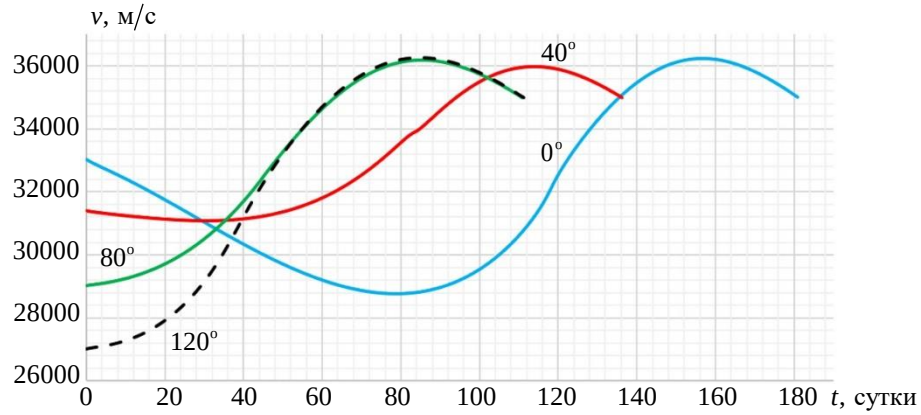


Рис. 7. Изменение тангенциальной скорости в зависимости от угла φ_0

Дополнительно построен график зависимости времени полета от угла φ_0, оптимальные углы схода с орбиты Земли находятся в районе $90^o - 100^o$, условно время раннего утра (рис. 9). Перелет до орбиты Венеры составляет порядка 112 дней (экстремум в районе указанных углов очень пологий).

На рис. 10 представлены зависимости управления (угол θ) от начального угла φ_0 в конце второго этапа и в начале третьего этапа в гелиоцентрической системе координат. Равенство этих углов, а, следовательно, непрерывность управления достигается при $\varphi_0 = 100^o$, что соответствует области минимума времени перелета.

На рис. 11 в соответствующем масштабе изображена орбита Земли и орбита Венеры, в зависимости от угла φ_0 показаны траектории полета КА.

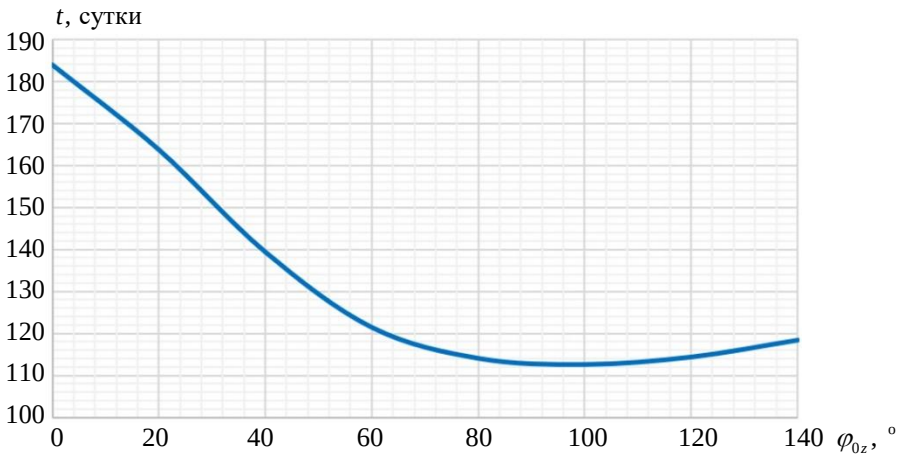


Рис. 9. Изменение времени полета КА в зависимости от угла φ_0

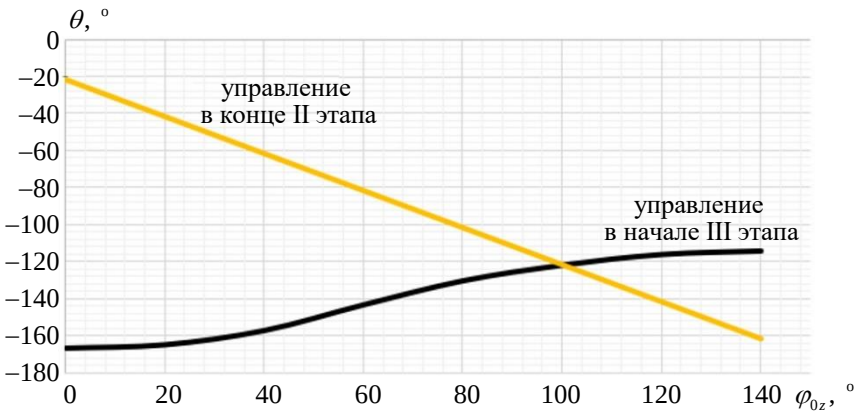


Рис. 10. Оптимальное управление в момент стыка II и III этапов при разных начальных углах φ_0

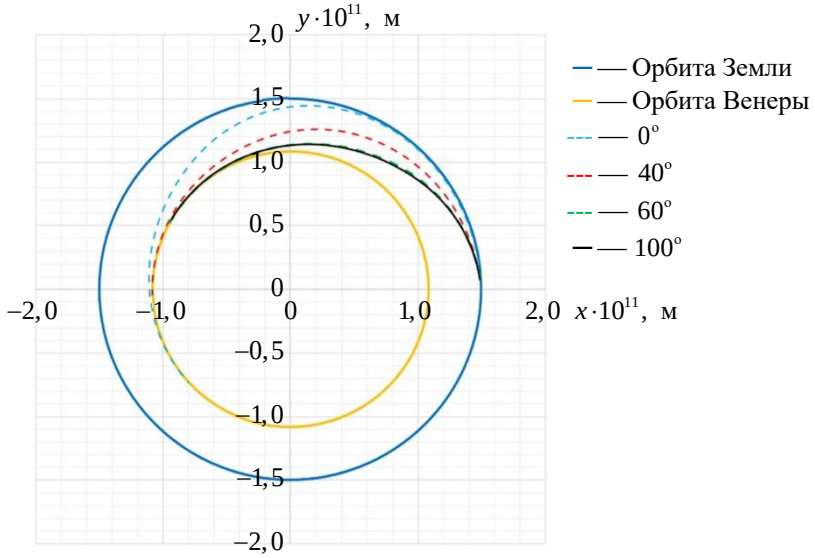


Рис. 11. Траектории полета космического аппарата в зависимости от угла φ_0

Заключение. По результатам проведенного численного эксперимента было получено, что оптимальные углы схода с орбиты Земли находятся в районе $90^{o} - 100^{o}$, условно время раннего утра. Перелет до орбиты Венеры составляет порядка 112 дней. Интерес также представляют полученные зависимости оптимального управления на этапе межорбитального перелета. В моменты изменения направления вращения вектора тяги ОУ можно считать вариантом управления с релейным переключением, настолько быстро изменяется оптимальный угол (рис. 5). Оценено влияние времени схода с орбиты Земли на суммарное время полета, при неудачном выборе начала перелета время достигает 180 суток при том же значении модуля скорости КА в момент окончания работы твердотопливного двигателя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Воронцов В.А., Лохматова М.Г., Мартынов М.Б., Пичхадзе К.М., Симонов А.В., Хартов В.В., Засова Л.В., Зеленый Л.М., Кораблев О.И. Перспективный космический аппарат для исследования Венеры. Проект «Венера-Д». Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочника, 2010, № 4, с. 62–67.

[2] Хартов В.В., Мартынов М.Б., Пичхадзе К.М., Карчаев Х.Ж., Яременко Д.Э., Воронцов В.А. *Анализ результатов венерианских экспедиций и перспективные исследования (к 30-летию посадки КА Вега 1,2 и дрейфа аэростатных станций в атмосфере Венеры)*. Сборник докладов 20-ой Международной конференции «Системный анализ, управление и навигация», Москва, 2015, с. 12.

[3] *Российская Газета*. Когда состоится полет на Венеру? [Электронный ресурс]. URL: https://rg.ru/2018/10/09/kogda-sostoitsia-pervyj-polet-na-veneru.html (дата обращения: 26.05.2023).

[4] *Hi – News*. Как работает ионный двигатель и где он применяется [Электронный ресурс]. URL: https://hi-news.ru/eto-interesno/kak-rabotaet-ionnyj-dvigatel-i-gde-on-primenyaetsya.html (дата обращения: 27.05.2023)

[5] *Новая наука*. Геостационарная орбита [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://new-science.ru/geostacionarnaya-orbita/ (дата обращения: 15.12.2023)

[6] Мозжорина Т.Ю., Чуванова Л.О. Моделирование и оптимизация перелета спутников малой массы с Земной орбиты на орбиту Марса с помощью ионных двигателей. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 54–67.

[7] Синицын А.А. Расчет траектории межпланетного перелета Земля-Марс с малой тягой без использования метода грависфер. *Труды МАИ*, 2017, № 94, с. 10.

[8] Старинова О. Л., Горбунова И. В. *Оптимизация гелиоцентрического движения космического аппарата с солнечным парусом*. Самара, Изд-во СНЦ РАН, 2015, с. 168–171.

[9] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. *Принцип максимума в оптимальном управлении*. Москва, Изд-во МГУ, 2004, 73 с.

[10] Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. *Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод стрельбы. Методические указания для студентов 3 и 4 курсов мехмата*. Ростов-на-Дону, УПЛ РГУ, 2003, 29 с.

[11] Лейтман Дж. *Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета*. Москва, Наука, 1965, 538 с.

[12] Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления*. Москва, Наука, 1978, 486 с.

[13] Мозжорина Т.Ю., Закуражная Д.А. Моделирование и оптимизация управления полетом космического аппарата с орбиты Земли на орбиту Венеры с помощью ионных двигателей. *Математическое моделирование и численные методы,* 2022, № 2, с. 88–101.

Статья поступила в редакцию 20.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мозжорина Т.Ю., Закуражная А.А. Моделирование влияния времени схода с орбиты Земли на оптимальное управление перелетом малоразмерного КА на Венеру. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 2, с. 88–99.

Мозжорина Татьяна Юрьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Закуражная Алина Андреевна — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: azakurazhnaya@mail.ru

Investigation of the effect of the time of departure from the Earth's orbit on the optimal control of the flight of a small spacecraft to Venus

© T.Yu. Mozzhorina, A.A. Zakurazhnaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In this paper, optimization of the control of the flight of a small spacecraft (spacecraft) on ion engines to the orbit of Venus is considered, taking into account the attraction of the Earth and the time of departure from the geostationary orbit. When solving the problem, the following assumptions were made: the orbits of the planets are circular, lying in the same plane. A detailed consideration of the influence of Venus when approaching the orbit of the planet was not considered. The problem is solved using the Pontryagin maximum principle by numerical targeting method. The spacecraft motion simulation was divided into 3 stages: acceleration of the spacecraft to a speed that allows overcoming the Earth's attraction with the help of short-term operation of the jet engine, optimization of control near the Earth at a distance of the spacecraft to the Earth of no more than 950 000 km and for the main interorbital flight between planets. The algorithm for solving the problem is implemented in the C++ programming language. Optimal control of the angle of action of the thrust vector is obtained. The analysis of the obtained results showed that, while minimizing the time to reach the orbit of Venus, in addition to significantly influencing the efficiency criterion of the longest interorbital section of the flight, the moment of the start (departure from Earth orbit) is fundamentally important.

Keywords*: optimal control, flight between the orbits of the Earth and Venus, the numerical targeting method, ion thrusters, Pontryagin maximum principle, boundary value problems of ordinary differential equations*

REFERENCES

[1] Vorontsov V.A., Lohmatova M.G., Martynov M.B., Pichkhadze K.M., Simonov A.V., Khartov V.V., Zasova L.V., Zelenyi L.M., Korablev O.I. Perspective spacecraft for Venus research. "Venera-D" project. *Vestnik FGUP NPO im. S.A. Lavochkina* [Bulletin of FSUE NPO named after S.A. Lavochkin], 2010, no. 4, pp. 62–67.

[2] Khartov V.V., Martynov M.B., Pichkhadze K.M., Karchaev H.J., Yaremenko D.E., Vorontsov V.A. *Analiz rezul'tatov venerianskih ekspedicij i per-spektivnye issledovaniya (k 30-letiyu posadki KA Vega 1,2 i drejfa aero-statnyh stancij v atmosfere Venery)* [Analysis of the results of Venusian expeditions and prospective studies (on the 30th anniversary of the landing of Vega 1,2 spacecraft and the drift of aerostatic stations in the atmosphere of Venus)]. Sbornik dokladov 20-oj Mezhdu-narodnoj konferencii «Sistemnyj analiz, upravlenie i navigaciya» [Collection of reports of the 20th International Conference "System Analysis, Management and Navigation"], Moscow, 2015, p. 12.

[3] *Rossiyskaya Gazeta*. Kogda sostoitsa polet na Veneru [When will the flight to Venus take place?] [Electronic resource]. URL: https://rg.ru/2018/10/09/kogda-sostoitsia-pervyj-polet-na-veneru.html (accessed: 26.05.2023)

[4] *Hi – News*. Kak rabotaet ionnyj dvigatel' i gde on primenyaetsya? [How the ion engine works and where it is applied?] [Electronic resource]. URL: https://hi-news.ru/eto-interesno/kak-rabotaet-ionnyj-dvigatel-i-gde-on-primenyaetsya.html (accessed: 27.05.2023).

[5] *New science*. Geostacionarnaya orbita [Geostationary orbit] [Electronic resource]. URL: https://new-science.ru/geostacionarnaya-orbita/ (accessed: 15.12.2023).

[6] Mozzhorina T.Y., Chuvanova L.O. Optimization of low–mass satellites flight from Earth orbit to Mars orbit using ion engines. M*athematical modeling and Computational Methods*, 2021, no. 2, pp. 54–67.

[7] Sinitsin A. Calculation of interplanetary Earth-Mars low thrust transfer without method of gravispheres. *Trudy MAI*, 2017, no. 94, p. 10.

[8] Starinova O.L., Gorbunova I.V. *Optimizaciya geliocentricheskogo dvizheniya kosmicheskogo apparata s solnechnym parusom* [Optimization of the heliocentric motion of a spacecraft with a solar sail]. Samara, NRC RAS Publ., 2015, pp. 168–171.

[9] Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovsky N.P. *Princip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [The principle of maximum in optimal control]. Moscow, MSU Publ., 2004, 73 p.

[10] Morshneva I.V., Ovchinnikova S.N. *Chislennoe reshenie kraevyh zadach dlya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Metod strel'by. Metodicheskie ukazaniya dlya studentov 3 i 4 kursov mekhmata* [Numerical solution of edge problems for ordinary differential equations. The method of shooting. Methodological guidelines for students of the 3rd and 4th courses of the Faculty of Mechanics]. Rostov-on-Don, UPL RSU Publ., 2003, 29 p.

[11] Lietmann G. *Optimization techniques: with applications to aerospace systems*. Academic Press, 1962, 453 p.

[12] Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 486 p.

[13] Mozzhorina T.Yu., Zakurazhnaya A.A. Simulation and optimization of spacecraft flight control from Earth orbit to Venus orbit using ion thruster. M*athematical modeling and Computational Methods*, 2022, no. 2, pp. 88–101.

Mozzhorina T.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Zakurazhnaya A.A., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: azakurazhnaya@mail.ru