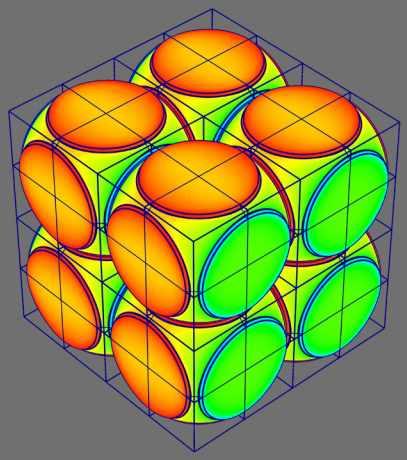
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Бодряков В.Ю. Задача о преследовании в 3D-пространстве с произвольными начальными углами прицеливания. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 68-84.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/341/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:39:29

УДК 519.17 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-6884

Задача о преследовании в 3D-пространстве с произвольными начальными углами прицеливания

© В.Ю. Бодряков

Уральский государственный педагогический университет,
Екатеринбург, 620091, Россия

В статье впервые получено аналитическое решение задачи о преследовании в системе «хищник–жертва» в евклидовом 3D-пространстве для произвольных начальных углов прицеливания. В процессе преследования жертва движется равномерно и прямолинейно, постоянный по модулю вектор скорости хищника нацелен на жертву. Точное решение задачи получено в форме параметрически заданной пространственной кривой преследования. Получены точные выражения для других существенных характеристик процесса преследования (времени преследования, координат жертвы, длины кривой преследования, и др.). Проведено реалистичное компьютерное моделирование взаимного движения хищника и жертвы в пространстве и во времени; определены характерные параметры процесса преследования. Отмечен значительный дидактический потенциал решенной задачи о 3D-преследовании для подготовки будущих специалистов в области механики и управления; задача может служить содержательной основой для выполнения обучающимися исследовательских проектов, курсовых и выпускных квалификационных работ.

Ключевые слова: *задача о преследовании, евклидово 3D-пространство*

Введение. Исчерпывающее решение задачи о преследовании (говорят также, задача о погоне или pursuit problem) в системе «хищник–жертва» в евклидовом 2D-пространстве (в декартовых координатах Oxy) для произвольного начального угла прицеливания $0^{\circ} < \alpha_0 < 180^{\circ}$ получено автором в работе [1]. А именно, получено выражение для параметрически заданной кривой преследования (параметр преследования $0 \le \varsigma \le 1$):

$$\begin{cases} x(\varsigma) = \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{1-\varsigma^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha_0}{2} - \dfrac{1-\varsigma^{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha_0}{2}\right]; \\ y(\varsigma) = h(1-\varsigma), \end{cases}$$

а также выражения для других существенных характеристик процесса погони (время движения, расстояние «хищник–жертва» и др.). В [1] проведено реалистичное компьютерное моделирование движения хищника и жертвы в 2D-пространстве и во времени.

Случай движения хищника и жертвы в евклидовом 3D-пространстве предоставляет гораздо большие содержательные возмож-

ности, как для математического анализа процесса преследования, так и для численного моделирования, но и представляется математически значительно более сложным. Ограничимся кратким обзором работ [2–14], дающих в совокупности вполне ясное представление о текущем состоянии исследований по теме работы.

В работе [2] авторы учли нелинейные динамические характеристики ситуации преследования в трехмерном пространстве для более строгого анализа работы трехмерного закона PPNG (pure proportional navigation guidance — чистое пропорциональное навигационное управление). Доказано, что ракета, управляемая по трехмерному закону PPNG, всегда может перехватить цель, произвольно маневрирующую в трехмерном пространстве, если:

1) ускорение цели изменяется в ограниченных пределах;

2) навигационная постоянная выбрана большой, и либо;

3а) начальная курсовая ошибка мала, либо;

3б) ракета удерживает головную часть в направлении цели во время полета.

Авторы работы [3] представили, по-видимому, наиболее обстоятельное рассмотрение задачи преследования в трехмерном евклидовом пространстве. Авторская постановка задачи такова. Пусть тело B, называемое целью или убегающим, движется по пространственной кривой $B(t)$ в евклидовой декартовой системе отсчета. В момент времени $t = T_1$ другое тело A, называемое преследователем, начинает движение из начала координат так, что его мгновенная скорость направлена на мгновенное положение тела B. При $t = T_1$ убегающее тело B находится в точке (x_0, y_0, z_0), где $y_0 \neq 0$. Задача состоит в том, чтобы определить путь преследователя и найти необходимые условия для перехвата, учитывая то ограничение, что цель может скрыться в безопасном месте в момент $t = T_F$. Чистое преследование цели подразумевает, что искомый путь преследователя $A(t) = (x(t), y(t), z(t))$ должен удовлетворять следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{Y_B - Y}{x_B - x};$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z_B - z}{x_B - x};$$
$$\frac{dz}{dY} = \frac{z_B - z}{Y_B - Y},$$

где $Y = y_0 - y$. При классическом подходе к решению предполагается, что:

1) движение преследования происходит в одной плоскости, т. е. $z_B = z_0 = 0$;

2) отношение скоростей жертвы и преследователя является известной константой: $m = v_B / u_A$.

Авторы [3] указывают, что выписанная ими система уравнений может быть решена только численно.

В работе [4] для рассмотрения относительного движения в системе «хищник–жертва» в 3D-пространстве автор вводит полярную систему координат, связанную с хищником. При этом преобразовании количество дифференциальных уравнений, необходимых для описания относительной динамики «контрагентов», можно сократить с шести до трех, а все члены преобразованных дифференциальных уравнений содержат только произведения и сложения переменных. Решение задачи преследования в конечном виде автором не получено.

В диссертационном исследовании [5] разработан новый подход к решению 3D-задачи преследования, реализованный в специально разработанной автором среде моделирования. Предлагаемый алгоритм работает путем разложения трехмерного пространства с осями *Ox, Oy* и *Oz* на три плоскости *Oxy, Oxz* и *Oyz,* соответственно. После решения задачи преследования-уклонения в этих плоскостях и вычисления требуемых ускорений, комплект плоскостных решений с помощью геометрических соотношений «собирается» в движение в трехмерной среде. Анализ траектории и характеристик движения выполняется посредством созданного автором программного обеспечения для моделирования VEGAS (Visual End-Game Simulation). Подтверждено, что характеристики предлагаемого подхода являются надежными и эффективными с точки зрения величины промаха и времени перехвата с допустимой перегрузкой до $10g$ для воздушных целей, использующих маневры уклонения.

В работе [6] преследование цели по методу погони рассматривается как задача неголономной механики, когда на движение точки наложены две идеальные неголономные, а значит и неинтегрируемые, связи. Авторами [6] получены дифференциальные уравнения для траектории преследователя $M(x,y,z)$, решение которых могло быть получено только численно.

В работе [7] диссертант анализирует проблему как дифференциальную игру преследования/уклонения для двух космических аппаратов на околоземных орбитах. Анализ существенно упрощается за счет линеаризации системы уравнений движения. Игра преследования/уклонения может быть также интерпретирована как «минимаксная» задача, так как цель преследователя — минимизировать, а цель

убегающего — максимизировать время захвата. Ввиду математических сложностей автору не удалось получить аналитическое решение своей задачи преследования/уклонения. Для осуществления расчетов автор использовал специализированный пакет MATLAB Toolbox DACE.

В статье [8] коллектив авторов изучил движение аэрокосмического аппарата в трех измерениях. Сформулированы кинематические уравнения движения с тремя степенями свободы, используя метод наведения чистого преследования. Кинематические дифференциальные уравнения движения решаются путем численного интегрирования методом Эйлера с использованием созданной авторами программы в среде MATLAB.

В [9] авторы рассмотрели обобщенную задачу преследования в двухмерном и трехмерном пространствах, когда преследуемый объект движется по окружности (плоский случай) или по винтовой линии (трехмерный случай) при различных соотношениях векторов скоростей преследующего и мишени. Аналитически получены условия устойчивости траекторий движения объектов в задаче. Найдено, что при определенных условиях, накладываемых как на траекторию объекта-преследователя, так и на объект-мишень, можно получить как устойчивую траекторию, так и неустойчивую. Численное моделирование проведено с применением пакета Wolfram Mathematica.

В статье [10] авторский коллектив предложил новую стратегию управления движением преследующего в пространстве, являющуюся гибридом двух известных стратегий навигации: навигации чистого преследования (Pure Pursuit, PP) и навигации чистого рандеву (Pure Rendezvous, PR). В PP-навигации поле вектора скорости преследователя $\vec{v}_M(t)$ всегда направлено к цели, тогда как в PR-навигации поле вектора скорости $\vec{v}_M(t)$ направлено к некоторым точкам перед целью, что возможно при условии правильного предсказания траектории цели. Новая стратегия названа авторами навигацией гибридного преследования (Hybrid pursuit, HP). Авторы [10] в среде Maple провели модельные расчеты, которые показали некоторый небольшой выигрыш (в несколько процентов) во времени погони в HP-навигации по сравнению с PP-навигацией.

Авторы [11] подчеркивают, что традиционный закон наведения в задаче преследования гарантирует лишь результативность атаки цели. Однако в реальных приложениях обязателен учет фактически существующих ограничений по углу обзора и ускорению. Авторы предлагают закон наведения для адаптивной трехмерной пропорциональной навигации на основе выпуклой оптимизации; последняя позволяет учесть существующие ограничения. Собственно, минимизируемой целевой функцией является введенная авторами интегральная

функция энергии управления J, учитывающая ограничения. Задача оптимизации решена численно с помощью существующего программного обеспечения MOSEK для MATLAB.v2 в модели конусного программирования второго порядка (second-order cone programming). Моделирование движения выполнено в [11] на персональном компьютере. Правильность работы программы проконтролирована путем решения задачи преследования в классическом (плоском) случае.

В статье [12] представлена новая и, как считают авторы, надежная двухэтапная стратегия преследования для импульсно управляемых космических аппаратов с учетом неполноты информации и с учетом возмущения из-за сжатия Земли. Согласно стратегии [12], осуществляемая игра преследования-уклонения на первом этапе происходит в форме дальнодействующего перехвата (far-distance rendezvous stage, FRS), а на втором этапе (ближняя дистанция, close-distance game stage, CGS) — превращается в задачу преследования с использованием одного из алгоритмов обучения с подкреплением, что позволяет корректировать траекторию преследующего. Показана осуществимость этой новой стратегии и ее устойчивость к различным начальным состояниям преследователя и убегающего, а также к разным стратегиям уклонения. Результаты тестов методом Монте-Карло показали, что коэффициент успешных попыток предложенного метода составляет более 91%. Численное моделирование движений выполнено в среде Matlab.

Коллективом авторов [13] численно изучены дифференциальные игры преследования-уклонения между более быстрым преследователем, движущимся в трехмерном пространстве, и убегающим, движущимся в плоскости.

В монографии [14] описано численное (итерационное) моделирование в среде MathCAD задачи преследования при различных характеристиках движений участников процесса. В частности, учитываются ограничения на движения участников преследования, например, по кривизне траектории. Автор [14] декларирует, что разработанные алгоритмы и модели могут быть востребованы при проектировании беспилотных летательных аппаратов с автономным управлением с элементами искусственного интеллекта. Модельные задачи в монографии [14] снабжены множеством анимированных изображений, позволяющих визуализировать процесс преследования.

Подводя итоги краткому обзору работ [2–14], отметим следующее:

- задача о преследовании в системе «хищник–жертва» в 3D-пространстве представляет несомненный как теоретический, так и практический интерес, однако до сих пор не найдено ее точного аналитического решени;

- имеются модельные рассмотрения движения участников преследования как в евклидовом 3D-пространстве, где траектория жертвы в простейшем случае прямолинейна, так и в околоземном космическом пространстве, где в простейшем случае жертва движется по околоземной круговой орбите;
- в существующих исследованиях задачи преследования в 3D-пространстве выписаны верные уравнения движения, но из-за математических сложностей авторы ограничиваются проведением численного моделирования, обычно с помощью некоторого существующего компьютерного математического пакета, таким образом, получаются всегда частные решения задачи, обобщение же затруднено.

Целью настоящей статьи является получение точного решения задачи о преследовании в 3D-пространстве с произвольными начальными углами прицеливания и во всем временном промежутке преследования, демонстрация результатов компьютерного моделирования, указание перспектив дальнейших исследований в рамках модели и дидактического потенциала решенной задачи.

Математическая модель и постановка задачи. Объект B (жертва) движется параллельно оси Ox евклидова 3D-пространства $Oxyz$ с постоянной скоростью v из начальной точки $B_0\left(x_0, y_0, z_0 = h\right)$ (рис. 1). Объект A (хищник) движется из начальной точки $O\left(0,0,0\right)$ с постоянной скоростью u так, что вектор $\vec{u}$ все время направлен на объект B. Начальный угол прицеливания α_0, тсчитываемый от плоскости Oxy, лежит в пределах $0^o < \alpha_0 < 90^o$; начальный угол прицеливания φ_0, отсчитываемый от оси Ox в плоскости Oxy, $0^o < \varphi_0 < 360^o$.

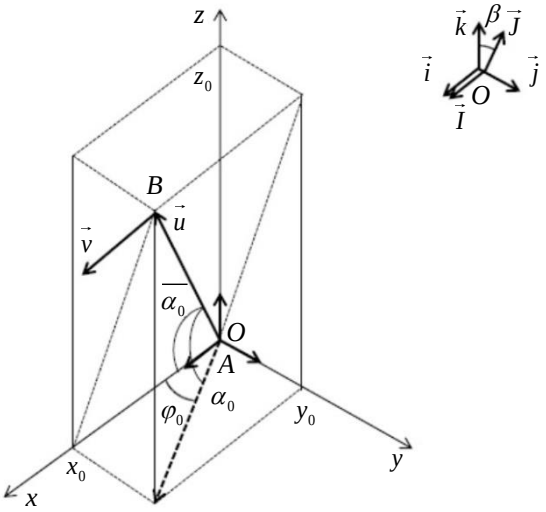


Рис. 1. Координатное представление задачи о преследовании в 3D-пространстве (точка A соответствует началу вектора $\vec{u}$, точка B — $\vec{v}$)

Задача состоит в том, чтобы найти уравнение $z(x,y)$ траектории движения хищника (кривую преследования), время погони T, другие существенные характеристики процесса преследования. Провести численное моделирование процесса преследования при различных значениях начального положения жертвы. Размерами объектов A и B в задаче можно пренебречь.

Для получения точного решения задачи заметим, что векторы $\vec{v}$, $\vec{u}$ и, как следствие, вектор визирования $\overrightarrow{AB}$ компланарны в процессе всего преследования. Рис. 1 визуализирует сказанное.

Плоскостью преследования OXY назовем плоскость, содержащую векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$. Единичные орты плоскости преследования OXY есть

$$\vec{I} = \vec{i},\ \vec{J} = \vec{j}\sin\beta + \vec{k}\cos\beta, \tag{1}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, и $\vec{k}$, соответственно, единичные орты координатных осей Ox, Oy и Oz евклидова 3D-пространства $Oxyz$. Плоскость OXY содержит ось $Ox = OX$ и наклонена к оси Oz под углом

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{y_0}{z_0},\ -90° \le \beta \le 90°. \tag{2}$$

С учетом сказанного, радиус-векторы хищника в системах координат $Oxyz(\vec{r})$ и $OXY(\vec{R})$ определяются соотношениями:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\left(\vec{i}\cos\alpha_0\cos\varphi_0 + \vec{j}\cos\alpha_0\sin\varphi_0 + \vec{k}\sin\alpha_0\right); \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} = X\vec{I} + Y\vec{J} = R\left(\vec{I}\cos\overline{\alpha_0} + \vec{J}\sin\overline{\alpha_0}\right) = \\ = R\left(\vec{i}\cos\overline{\alpha_0} + \vec{j}\sin\overline{\alpha_0}\sin\beta + \vec{k}\sin\overline{\alpha_0}\cos\beta\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Так как $\vec{r} = \vec{R}$, то из сопоставления (3) и (4) получаем

$$\begin{cases}\cos\overline{\alpha_0} = \cos\alpha_0\cos\varphi_0; \\ \sin\overline{\alpha_0}\sin\beta = \cos\alpha_0\sin\varphi_0; \\ \sin\overline{\alpha_0}\cos\beta = \sin\alpha_0.\end{cases} \tag{5}$$

Система соотношений (5) обеспечивает преобразование углов и координат при переходе $Oxyz \leftrightarrow OXY$. В частности,

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha_0\sin\varphi_0,$$
$$\operatorname{tg}\overline{\alpha_0} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0\cos^2\varphi_0}}{\cos\alpha_0\cos\varphi_0}.$$

Прочие тригонометрические функции углов могут быть легко получены из выписанных сооношений. В частности, в дальнейшем потребуется выражение:

$$\operatorname{tg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\overline{\alpha_0}}{1+\cos\overline{\alpha_0}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}}. \tag{6}$$

В начальный момент времени для векторов скоростей жертвы $\vec{v}$ и хищника $\vec{u}$ в системе координат $Oxyz$ имеем:

$$\begin{cases}\vec{v}(t=0)=v\vec{i};\\ \vec{u}(t=0)=u\left(\vec{i}\cos\alpha_0\cos\varphi_0+\vec{j}\cos\alpha_0\sin\varphi_0+\vec{k}\sin\alpha_0\right).\end{cases} \tag{7}$$

Начальные углы прицеливания связаны с начальными координатами жертвы соотношениями:

$$\alpha_0=\operatorname{arctg}\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}};\ \ \varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}. \tag{8}$$

Процесс преследования в плоскости OXY происходит согласно точному решению задачи о преследовании в 2D-пространстве, полученному в [1]. Начальные координаты жертвы B в плоскости OXY равны $B_0\left(x_0,\sqrt{y_0^2+z_0^2}\right)$. Иными словами, в плоскости преследования OXY жертва движется на «высоте»

$$\begin{aligned}H&=\sqrt{y_0^2+z_0^2}=\frac{h}{\cos\beta}=\\ &=\frac{h}{\sin\alpha_0}\sqrt{1-\cos^2\alpha_0\cos^2\varphi_0}.\end{aligned} \tag{9}$$

В начальный момент времени для векторов скоростей жертвы $\vec{V}$ и хищника $\vec{U}$ в системе координат OXY имеем:

$$\begin{cases}\vec{V}(t=0)=v\vec{I};\\ \vec{U}(t=0)=u\left(\vec{I}\cos\overline{\alpha_0}+\vec{J}\sin\overline{\alpha_0}\right).\end{cases} \tag{10}$$

В (10) учтено, что по модулю $V=v$ и $U=u$. Как и следует, при $\varphi_0\to 0$, $H\to h$, и задача о преследовании в 3D-пространстве переходит в решенную в [1] задачу о 2D-преследовании.

Алгоритм решения задачи. С учетом сказанного, точное решение задачи о преследовании в 3D-пространстве в форме кривой преследования, есть:

$$X(\varsigma)=\frac{H}{2}\left[\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\operatorname{ctg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}-\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\operatorname{tg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}\right]=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\right)\frac{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}-\left(\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\right)\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}\right], \quad (11)$$

$$k_1=1/k,$$

где приведенная ордината жертвы в плоскости OXY равна

$$\varsigma=\frac{H-Y}{H},\ \ 0\le\varsigma\le 1.$$

и отношение скоростей хищника и жертвы $k=u/v>1$. Ордината жертвы равна

$$Y(\varsigma)=H(1-\varsigma)=\frac{h}{\cos\beta}(1-\varsigma)=h(1-\varsigma)\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0\cos^2\varphi_0}}{\sin\alpha_0}. \quad (12)$$

Таким образом, кривая преследования в плоскости OXY представляет собой параметрически заданную кривую $\left(X(\varsigma),Y(\varsigma)\right)$, $0\le\varsigma\ge 1$. В координатах $Oxyz$ та же пространственная кривая преследования определяется соотношениями:

$$x=X(\varsigma)=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\right)\frac{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\right)\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}\right];$$

$$y=Y(\varsigma)\sin\beta=h(1-\varsigma)\operatorname{ctg}\alpha_0\sin\varphi_0; \quad (13)$$

$$z=Y(\varsigma)\cos\beta=h(1-\varsigma).$$

Совокупность (13) дает исчерпывающее решение вопроса об уравнении кривой преследования в евклидовом 3D-пространстве в рамках поставленной задачи.

С учетом результатов [1], время 3D-преследования составит

$$T=\frac{Hu}{u^2-v^2}\frac{k+\cos\overline{\alpha_0}}{k\sin\overline{\alpha_0}}=T_0\frac{k+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{k\sin\alpha_0}, \quad (14)$$

где для «классического» ($\alpha_0=90°,\ \varphi_0=0$) времени преследования введено обозначение $T_0=\dfrac{hu}{u^2-v^2}$. Как и следует, при $\varphi_0\to 0$ результат (14) для времени погони T в 3D-задаче о преследовании переходит в результат для 2D-задачи.

В момент встречи координаты хищника (A) и жертвы (B) равны: $A(T)=B(T)$. Координаты точки встречи, с учетом (13), равны:

$$x(T)=x_0+vT=\frac{hk}{k^2-1}\frac{1+k\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}=\frac{hu^2}{u^2-v^2}\frac{v/u+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0};$$
$$y(T)=y_0=h\operatorname{ctg}\alpha_0\sin\varphi_0;$$
$$z(T)=z_0=h.$$

Полная длина кривой преследования:

$$\ell(T)=uT=uT_0\frac{k+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{k\sin\alpha_0}=\ell_0\frac{k+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{k\sin\alpha_0}, \qquad (15)$$

где $\ell_0=\dfrac{hu^2}{u^2-v^2}$ — длина классической ($\alpha_0=90°$, $\varphi_0=0$) кривой преследования.

Принимая во внимание геометрический смысл производной, вычислим угол $\overline{\alpha}$, который в процессе преследования составляет вектор скорости хищника $\vec{u}$ с положительным направлением оси OX (как и оси Ox):

$$\operatorname{tg}\overline{\alpha}=\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{d\varsigma}\cdot\left(\frac{dX}{d\varsigma}\right)^{-1}.$$

С учетом (11) и (12),

$$\operatorname{tg}\overline{\alpha}=2\left[\varsigma^{-k_1}\operatorname{ctg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}-\varsigma^{k_1}\operatorname{tg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}\right]^{-1}=$$
$$=2\left[\varsigma^{-k_1}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}}-\varsigma^{k_1}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}}\right]^{-1}. \qquad (16)$$

С учетом геометрических соображений, абсцисса жертвы $X_B(\varsigma)$ в плоскости преследования OXY определяется соотношением:

$$X_B(\varsigma)=X(\varsigma)+\frac{H-Y(\varsigma)}{\operatorname{tg}\overline{\alpha}}; \qquad (17)$$

абсцисса $X(\varsigma)$ и ордината $Y(\varsigma)$ хищника определяются (11), (12). С учетом (17) после преобразований получаем в плоскости преследования OXY

$$X_B(\varsigma)=H\operatorname{ctg}\overline{\alpha_0}+\frac{H}{2k}\left[\left(\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}+\left(\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\right)\operatorname{tg}\frac{\overline{\alpha_0}}{2}\right]. \qquad (18)$$

В пространстве *Oxyz*:

$$x_B(\varsigma) = x_0 + \frac{h}{2k}\left[\left(\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\right)\frac{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0} + \left(\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\right)\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}\right]. \quad (19)$$

Текущее время t взаимного движения хищника и жертвы определяется из условия $t = \left[x_B(\varsigma) - x_0\right]/v$ выражением:

$$t = \frac{h}{2u}\left[\left(\frac{1-\varsigma^{1-k_1}}{1-k_1}\right)\cdot\frac{1+\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0} + \left(\frac{1-\varsigma^{1+k_1}}{1+k_1}\right)\cdot\frac{1-\cos\alpha_0\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0}\right]. \quad (20)$$

Поставленная задача о преследовании в системе «хищник–жертва» в евклидовом 3D-пространстве решена.

С учетом ограниченного формата журнальной статьи, перейдем далее к компьютерному моделированию задачи о преследовании в евклидовом 3D-пространстве, оставив получение дальнейших математических результатов в рамках построенной модели для последующих публикаций.

Результаты компьютерного моделирования. Результаты численного моделирования преследования в евклидовом 3D-пространстве при указанных значениях параметров в рамках поставленной задачи выборочно представлены на рис. 2–6 и в табл. 1. Расчеты проведены штатными средствами MS Excel. Проведению рабочих расчетов предшествовал цикл тестовых расчетов, выполненных для удостоверения в правильности компьютерной реализации построенной математической модели. Собственно варьируемыми параметрами были начальные координаты x_0 и y_0 жертвы; высота движения жертвы, хотя и могла варьироваться наряду с x_0 и y_0, была принята постоянной $z_0 = h = 1000$ м. Скорость хищника была принята равной $u = 500$ м/с, скорость жертвы — $v = 300$ м/с.

Таблица 1

Характеристические параметры выборочных кривых преследования

x_0, км	y_0, км	α_0	φ_0	β	$\overline{\alpha_0}$	T, с	$x(T)$, м	ℓ, м
–20	10	24,09°	153,43°	45°	35,26°	39,04	–8286	19523
–10	10	35,26°	135°	45°	54,74°	35,38	613	17688
0	10	45°	90°	45°	90°	44,19	13258	22097
3,9	10	42,97°	68,69°	45°	74,58°	53,16	19847	26578

Обозначения: α_0, φ_0, β и $\overline{\alpha_0}$ — начальные углы, T — время преследования, $x(T)$ — абсцисса «встречи» хищника и жертвы, ℓ — длина кривой преследования.

Пространственные траектории хищника $z(x,y)$ при различных начальных координатах имеют характерный выпуклый вправо вид на рис. 2–5. Иными словами, направление выпуклости кривой преследования «противоположно» направлению вектора скорости жертвы $\vec{v}$.

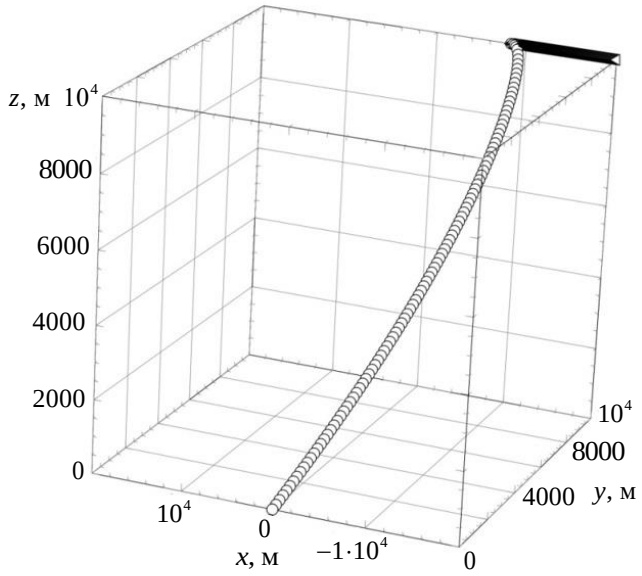


Рис. 2. Траектории хищника (кружки) и жертвы (треугольники) для начальных координат жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (-2000, 10000, 10000)$

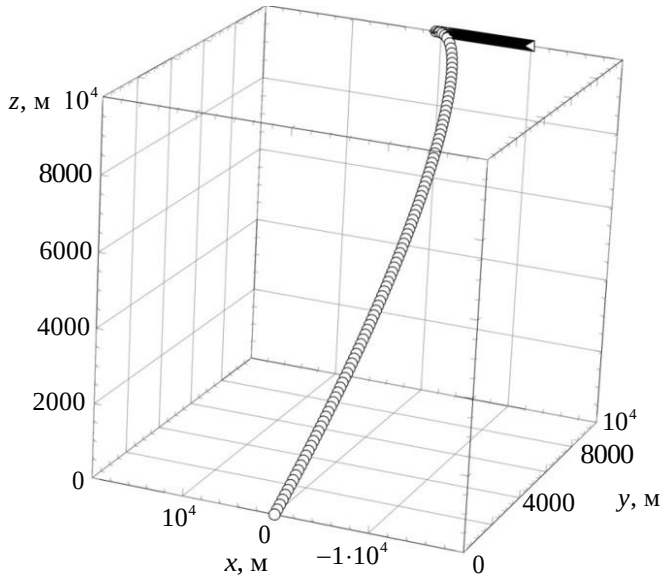


Рис. 3. Траектории хищника (кружки) и жертвы (треугольники) для начальных координат жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (-10000, 10000, 10000)$

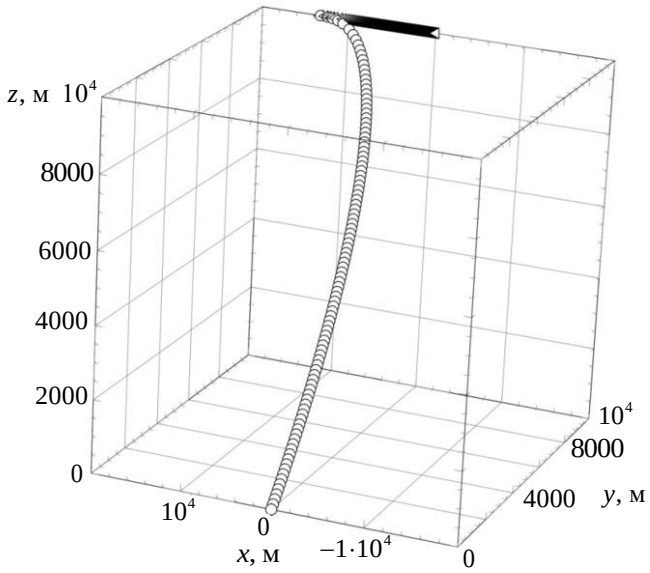


Рис. 4. Траектории хищника (кружки) и жертвы (треугольники) для начальных координат жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (0,10000,10000)$

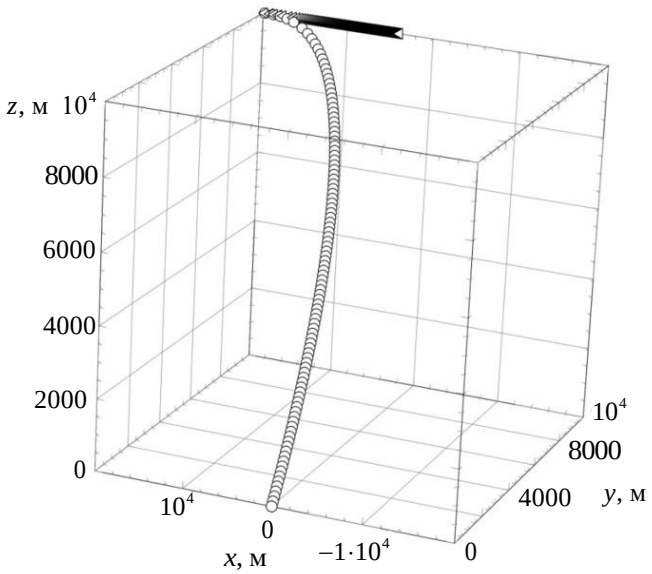


Рис. 5. Траектории хищника (кружки) и жертвы (треугольники) для начальных координат жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (3900,10000,10000)$

В проекции на вертикальную плоскость Oxz евклидова пространства $Oxyz$ кривые преследования ожидаемо имеют вид, характерный для 2*D*-преследования (рис. 6); в проекции на горизонтальную плоскость Oxy кривые преследования демонстрируют аналогичное поведение. Проекция кривой преследования на плоскость Oyz тривиальна (прямолинейна).

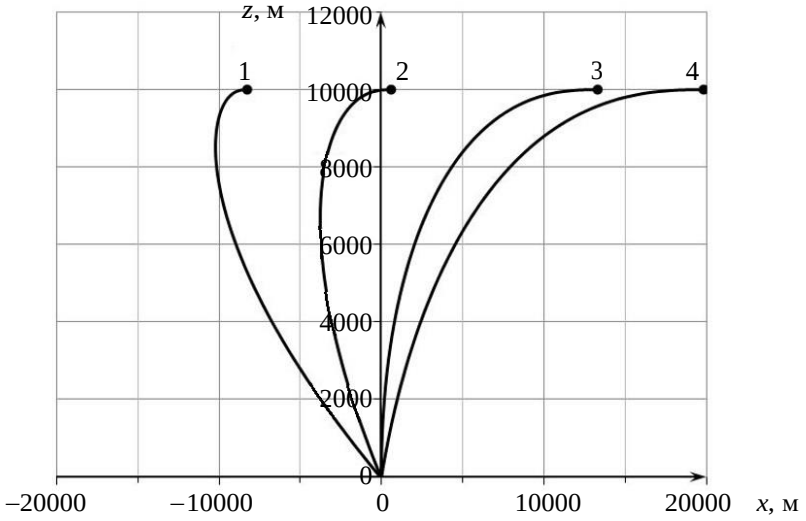


Рис. 6. Траектории хищника в проекции на плоскость Oxz
для начальных координат жертвы: 1 — $(x_0, y_0, z_0) = (-20000, 10000, 10000)$;
2 — $(x_0, y_0, z_0) = (-10000, 10000, 10000)$; 3 — $(x_0, y_0, z_0) = (0, 10000, 10000)$;
4 — $(x_0, y_0, z_0) = (3900, 10000, 10000)$

Выводы и рекомендации. В настоящей статье впервые получено аналитически точное решение задачи о преследовании в системе «хищник–жертва» в евклидовом 3D-пространстве $Oxyz$ для произвольных начальных углов прицеливания или, что то же, для произвольных начальных координат жертвы (x_0, y_0, z_0), — в форме параметрически заданной пространственной кривой преследования $\big(x(\varsigma), y(\varsigma), z(\varsigma)\big)$, $0 \le \varsigma \le 1$. Проведено реалистичное компьютерное моделирование взаимного движения хищника и жертвы в пространстве и во времени; определены характерные параметры процесса преследования (время преследования, длина кривой преследования, координаты точки встречи, и др.). Перспективы дальнейших исследований в рамках модели представляются весьма широкими: изучение процесса преследования в условиях ограничений (на кривизну кривой преследования, на ресурс движения хищника, при наличии укрытия у жертвы, и др.).

Следует отметить значительный дидактический потенциал задачи о 3D-преследовании для профессиональной подготовки будущих специалистов в области механики и управления. Задача о преследовании может быть рассмотрена в курсе механики, дифференциальных уравнений, математического моделирования, и др. Качественная предметная подготовка будущих учителей и преподавателей математики и физики также очень важна, и задача о преследовании вполне

подходит для этого. Автор обсуждает задачу о преследовании в ее различных аспектах со своими студентами, будущими преподавателями математики и информатики, — в рамках курса «Основы математического моделирования» (бакалавриат) и спецкурса «Избранные вопросы современных математических исследований» (магистратура). Задача о преследовании служит отличной содержательной основой для выполнения обучающимися научно-исследовательских проектов, курсовых и выпускных квалификационных работ [15].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бодряков В.Ю. Задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания. *Математическое моделирование*, 2023, т. 35, № 11, с. 35–46.

[2] Song S.H., Ha I.J. A Lyapunov-like approach to performance analysis of 3-dimensional pure PNG laws. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1994, vol. 30, № 1, p. 238–248.

[3] Ibidapo-Obe O., Asaolu O.S., Badiru A.B. Generalized solutions of the pursuit problem in three-dimensional Euclidean space. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 119, № 1, p. 35–45.

[4] Feng T. An unified approach to missile guidance laws: A 3D extension. *Proceedings of the American Control Conference Anchorage*, AK May 8-10, 2002, p. 1711–1716.

[5] Moran İ. *Three plane approach for 3d true proportional navigation*. İstanbul, Turkish Naval Academy Publ., 2005, 97 p.

[6] Погребская Т.Н., Солтаханов Ш.Х. Управление преследованием цели по методу погони как неголономная задача механики. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, 2007, № 1, с. 117–126.

[7] Stupik J.M. *Optimal pursuit/evasion spacecraft trajectories in the hill reference frame*. Thesis of Master of Science in Aerospace Engineering. Urbana (Illinois): University of Illinois, 2013, 69 p.

[8] Saleh A.I., Takieldeen A., El-Sawi A.R. Aerospace vehicle simulation and analysis applying pure pursuit guidance method. *International Journal of Computer Applications*, 2016, vol. 155, № 11, p. 19–21.

[9] Andreeva M.V., Pavlovsky V.E. On the stability of trajectories in the task of pursuit. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 489, art. № 012050. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012050

[10] Attarchi H., Bidabad B., Torbaghan S.M.K., Khosravi M.R. Towards a novel family of algorithms in pursuit navigation. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2020, vol. 18, № 1, p. 15–26.

[11] Fu S., Liu X., Zhang W., Xia Q. Multiconstraint adaptive three-dimensional guidance law using convex optimization. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2020, vol. 31, № 4, p. 791–803.

[12] Yang B., Liu P., Feng J., Li S. Two-stage pursuit strategy for incomplete-information impulsive space pursuit-evasion mission using reinforcement learning. *Aerospace*, 2021, vol. 8, № 10. DOI: 10.3390/aerospace8100299

[13] Li S., Wang C., Xie G. Pursuit-evasion differential games of players with different speeds in spaces of different dimensions. *American Control Conference (ACC-2022)*, 2022, p. 1299–1304.

[14] Дубанов А.А. *Компьютерное моделирование в задачах преследования: монография*. Москва, ООО "Издательский Центр РИОР", 2023, 161 с.

[15] Бодряков В.Ю., Быков А.А. Научно-исследовательская работа и научно-исследовательская работа студентов как инструменты формирования профессиональных компетенций студентов и академической репутации вуза. *Педагогическое образование в России*, 2014, № 8, с. 154–158.

Статья поступила в редакцию 15.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Бодряков В.Ю. Задача о преследовании в 3D-пространстве с произвольными начальными углами прицеливания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 2, с. 68-84.

Бодряков Владимир — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой, Уральский государственный педагогический университет. e-mail: bodryakovvyu@yandex.ru

Pursuit problem in 3D-space with arbitrary initial aiming angles

© V.Yu.Bodryakov

Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, 620091, Russia

An analytical solution of the pursuit problem in the "predator-prey" system in Euclidean 3D space for arbitrary initial aiming angles was obtained in the article for the first time. In the process of pursuit, the prey moves uniformly and rectilinearly, the speed vector of the predator is constant in magnitude and is aimed at the prey. The exact solu-tion of the problem is obtained in the form of a parametrically specified spatial pursuit curve. Exact expressions were obtained for other essential characteristics of the pursuit process (pursuit time, coordinates of the prey, length of the pursuit curve, etc.). A real-istic computer simulation of the mutual movement of predator and prey in space and time was carried out; the characteristic parameters of the pursuit process are deter-mined. The significant didactic potential of the solved problem of 3D pursuit for the training of future specialists in the field of mechanics and control is noted; the problem for students can serve as a meaningful basis to carry out research projects, courseworks and final qualifying works.

Keywords: *pursuit problem, Euclidean 3D-space*

REFERENCES

[1] Bodryakov V.Yu. Pursuit problem with an arbitrary initial aiming angle. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2023, vol. 35, no. 11, pp. 35–46.
[2] Song S.H., Ha I.J. A Lyapunov-like approach to performance analysis of 3-dimensional pure PNG laws. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1994, vol. 30, no. 1, p. 238–248.
[3] Ibidapo-Obe O., Asaolu O.S., Badiru A.B. Generalized solutions of the pursuit problem in three-dimensional Euclidean space. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 119, no. 1, p. 35–45.
[4] Feng T. An unified approach to missile guidance laws: A 3D extension. *Proceedings of the American Control Conference Anchorage*, AK May 8-10, 2002, p. 1711–1716.
[5] Moran İ. *Three plane approach for 3D true proportional navigation*. İstanbul, Turkish Naval Academy Publ., 2005, 97 p.

[6] Pogrebskaya T.N., Soltakhanov Sh.Kh. The control of chasing a target by the pursuit method as a nonholonomic problem in mechanics. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2007, no. 1, pp. 117–126.
[7] Stupik J.M. *Optimal pursuit/evasion spacecraft trajectories in the hill reference frame*. Thesis of Master of Science in Aerospace Engineering. Urbana (Illinois): University of Illinois, 2013, 69 p.
[8] Saleh A.I., Takieldeen A., El-Sawi A.R. Aerospace vehicle simulation and analysis applying pure pursuit guidance method. *International Journal of Computer Applications*, 2016, vol. 155, no. 11, p. 19–21.
[9] Andreeva M.V., Pavlovsky V.E. On the stability of trajectories in the task of pursuit. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 489, art. no. 012050. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012050
[10] Attarchi H., Bidabad B., Torbaghan S.M.K., Khosravi M.R. Towards a novel family of algorithms in pursuit navigation. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2020, vol. 18, no. 1, p. 15–26.
[11] Fu S., Liu X., Zhang W., Xia Q. Multiconstraint adaptive three-dimensional guidance law using convex optimization. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2020, vol. 31, no. 4, p. 791–803.
[12] Yang B., Liu P., Feng J., Li S. Two-stage pursuit strategy for incomplete-information impulsive space pursuit-evasion mission using reinforcement learning. *Aerospace*, 2021, vol. 8, no. 10. DOI: 10.3390/aerospace8100299
[13] Li S., Wang C., Xie G. Pursuit-evasion differential games of players with different speeds in spaces of different dimensions. *American Control Conference (ACC-2022)*, 2022, p. 1299–1304.
[14] Dubanov A.A. *Komp'yuternoe modelirovanie v zadachah presledovaniya: monografiya* [Computer modeling in pursuit problems: monograph]. Moscow, RIOR Publishing Center LLC, 2023, 161 p.
[15] Bodryakov V.Yu., Bykov A.A. Scientific research as a tool for forming professional competencies of students and academic reputation of the university. *Pedagogical Education in Russia*, 2014, no. 8, pp. 154–158.

Bodryakov V.Yu., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Assistant Professor, Head of Department, Ural State Pedagogical University. e-mail: bodryakovvyu@yandex.ru