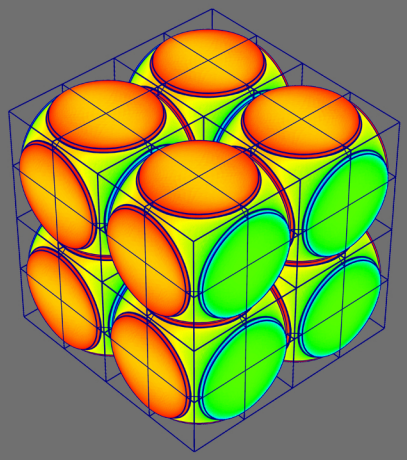
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Абдикаримов Н.И., Наврузов К.Н. Математическое моделирование гидродинамических сопротивлений при колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 35–45.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/339/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.182
31.01.2026 10:31:57

УДК 532.516 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-3545

Математическое моделирование гидродинамических сопротивлений при колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале

© Н.И. Абдикаримов, К.Н. Наврузов

Ургенчский государственный университет, Ургенч, 220100, Узбекистан

Решены задачи о колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости на основе обобщенной модели Максвелла. Определена «импеданс» функция, с помощью этой функции исследованы зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний при различных значениях упругого числа Деборы и концентрации Ньютоновской жидкости. Показано, что в колебательном течении упруговязкой жидкости гидродинамическое сопротивление уменьшается в зависимости от числа Деборы. Этот эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала, при колебательном течении и, тем самым позволяет определить диссипации энергии среды, имеющие важные значения при регулировании гидро-и пневмосистем.

Ключевые слова: *Вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, «импеданс» функция, колебательное течение, амплитуда, фаза*

Введение. Практический интерес предоставляет изучение колебательного течения упруговязкой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. В [1] исследовано движение упруговязкой жидкости по длинной трубе под действием колебательного градиента давления. Показаны отличительные особенности этого движения по сравнению соответствующего движения ньютоновской жидкости. Исследован безынерционный пульсирующий поток упруговязкой жидкости в круглой бесконечной трубе под действием колебательного градиента давления в работе [2], в котором показано, что в осциллирующем потоке профили продольной скорости симметричны, и существует значительный фазовый сдвиг между градиентом давления и скоростью. В пульсирующих потоках фазовый сдвиг фактически отсутствовал, и осевая скорость изменялась несимметрично относительно своего среднего за период колебания. Ламинарные пульсирующие течения упруговязких жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [3]. Где демонстрируется много интересных особенностей отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей.

В [4] проанализированы нестационарные течения вязкоупругой жидкости на модели Олдройда-Б в круглой бесконечной цилиндрической трубе под действием зависящего от времени градиента давления в следующих случаях: а) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальными законами; б) градиент давления изменяется по гармоническим законам; в) градиент давления постоянный. Во всех случаях получены формулы для распределения скорости, расхода жидкости и других гидродинамических величин в пульсирующем потоке.

На основе модели Максвелла в [5] рассмотрена задача нестационарного пульсирующего течения упруговязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что вязкоупругое свойство жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. В последние десятилетия электрокинетические явления, в том числе электроосмос, потенциал течений, электрофорез и седиментационый потенциал привлекли к себе большое внимание и предоставили множество приложений в микро и наноканалах.

В связи с этим в работе [6] исследовано электрокинетическое течение упруговязких жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однонаправленное, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считаются малыми, поэтому уравнение Пуассона-Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, когда преобладает упругое свойство жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливает электрокинетические эффекты, и вместе с тем усиливается эффективность преобразования электрокинетической энергии.

В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменение гидродинамических сопротивлений при пульсирующем потоке упруговязкой жидкости в зависимости от безразмерной частоты колебаний исследовано, относительно мало. Поэтому в данной работе исследуется пульсирующее течение упруговязкой жидкости на обобщенной модели Максвелла в плоском канале при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Определяется «импеданс» функция, в котором можно анализировать изменение гидродинамического сопротивления при колебательном потоке упруговязкой жидкости в зависимости от безразмерной частоты колебаний.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим задачи медленного пульсирующего течения упруговязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Ось Ox проходит горизонтально в средине канала вдоль потока. Ось Oy направлено перпендикулярно к оси Ox.

Течение упруговязкой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения упруговязкой несжимаемой жидкости в напряжение имеет следующий вид [7-10]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

где u — продольная скорость; p — давление; ρ — плотность; τ — касательная напряжения; t — время.

Реологическое уравнение состояния жидкости принимается в виде обобщенного уравнения Максвелла [3,6]

$$\begin{gathered} \tau = \tau_S + \tau_p, \\ \tau_S = -\eta_S \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \lambda \frac{\partial \tau_p}{\partial t} + \tau_p = -\eta_p \frac{\partial u}{\partial y}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь λ — время релаксации; τ_s — касательная напряжения Ньтоновской жидкости; τ_p — касательная напряжения Максвелловской жидкости; τ — касательная напряжения раствора; η_s — динамическая вязкость Ньтоновской жидкости; η_p — динамическая вязкость Максвелловской жидкости. Между динамическими вязкостями выполняется равенство [3,6]

$$\eta = \eta_S + \eta_p,$$

где η — динамическая вязкость раствора.

Подставляя (2) в уравнение движения (1) для скорости жидкости получаем

$$\rho(1+\lambda \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial u}{\partial t} = -(1+\lambda \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_S(1+\lambda \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Считаем, что пульсирующее течение упруговязкой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебания расхода жидкости или продольной скорости осреднённой по сечению канала.

$$Q = a_Q cos\omega t = \operatorname{Re} a_Q e^{i\omega t},$$

$$\langle u \rangle = aucos\omega t = \operatorname{Re} a_u e^{i\omega t},$$

где a_Q и a_u — амплитуда расхода жидкости и амплитуда продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае течение происходит симметрично по оси канала и на стенке канала удовлетворяется условие прилипания.

Тогда граничными условиями будут:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0,\ u = 0 \text{ при } y = h. \tag{4}$$

В силу линейности уравнение (1.3) продольной скорости, давление, касательное напряжение на стене можно записывать следующим образом

$$u(y,t) = \operatorname{Re} u_1(y) e^{i\omega t},$$

$$p(x,t) = \operatorname{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \tag{5}$$

$$\tau(t) = \operatorname{Re} \tau_1 e^{i\omega t}.$$

Подставляя (1.5) в уравнение (1.3), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i\omega}{\eta}\left(X + \frac{Z}{1+i\omega\lambda}\right)^{-1} u_1(y) = \frac{1}{\eta}\left(X + \frac{Z}{(1+i\omega\lambda)}\right)^{-1} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x}. \tag{6}$$

Здесь $X = \frac{\eta_S}{\eta}$ — вязкостная доля Ньютоновской жидкости; $Z = \frac{\eta_p}{\eta}$ — вязкостная доля Максвелловской жидкости;

При решении уравнения (6) с граничными условиями (4) получим формулу для определения скорости в следующем виде:

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i\omega}\left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right)}{\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}\right), \tag{7}$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}h$ — колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний); $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — кинематическая вязкость раствора.

С помощью уравнения

$$\tau_1(i\omega) = -\frac{\eta}{\eta^2(i\omega)}\frac{\partial u_1(y)}{\partial y}\bigg|_{y=h} \tag{8}$$

находим касательное напряжение сдвига на стенке

$$\tau_1(i\omega) = -h\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{1}{i\alpha_0^2}\left(\frac{i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}{\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}\right). \tag{9}$$

Теперь проинтегрируем обе части формулы (7) по переменной y в пределах от $-h$ до h, в результате найдём формулу для расхода жидкости

$$Q_1 = 2h\left[\frac{1}{\rho i\omega}\left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x}\right)\left(1-\frac{\sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}{\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}\right)\right]. \tag{10}$$

Учитывая что

$$Q_1 = 2h < u_1 >,$$

из (10) находим продольную скорость осреднённой по сечению канала

$$\langle u_1(i\omega)\rangle = \frac{1}{\rho i\omega}\left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x}\right)\left(1-\frac{\sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}{\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}\right) \tag{11}$$

Определим отношение градиента давления к средней скорости, иногда это отношение называется «импедансом» потока. Из формулы (11) находим это отношение

$$Z = \frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{R_0\langle u_1(i\omega)\rangle} = \left[\frac{3}{i\alpha_0^2}\left(1-\frac{\sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}{\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\right)}\right)\right]^{-1} = \bar{R} + i\bar{L}, \tag{12}$$

где $R_0 = \dfrac{3\eta}{h^2}$ — гидродинамическое сопротивление Ньютоновской жидкости при стационарном потоке. Это отношение позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала. Так как ее действительная часть позволяет определить активное гидродинамическое сопротивление, а мнимая часть реактивное или индуктивность колебательного потока.

Результаты численных расчетов и их анализ. Гидродинамическое сопротивление при колебательном потоке в ньютоновских, а

также упруговязких жидкостей определяется отношением градиента давления к средней скорости, иногда это отношения называется «импедансом» потока. Отношением градиента давления к средней скорости находим из формулы (12)

$$Z=\frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{R_0\left\langle u_1(i\omega)\right\rangle}=\left[\frac{1}{i\alpha_0^2}\left(1-\frac{\sin\left(M_1-i\bar{M}_1\right)}{\left(M_1-i\bar{M}_1\right)\cos\left(M_1-i\bar{M}_1\right)}\right)\right]^{-1}=\bar{R}+i\bar{L} \quad (13)$$

Выделяя действительную и мнимую части формулы (13) определяем полное гидродинамическое сопротивление $\bar{R}$ и индуктивность $\bar{L}$:

$$\bar{R}=\frac{\alpha_0^2\left(A_1^2+B_1^2\right)}{\left(A_2^2+B_2^2\right)}B_2,\ \frac{\bar{L}}{\alpha_0^2}=\frac{\left(A_1^2+B_1^2\right)}{A_2^2+B_2^2}A_2,$$

где

$$A_1=\bar{A}\bar{M}_1+\bar{B}M_1,\quad B_1=\bar{A}M_1-\bar{B}\bar{M}_1,$$

$$A_2=\left(A_1^2+B_1^2\right)-A_1C-B_1D,\quad B_2=\left(B_1C-A_1D\right)$$

$$C=\sin M_1 ch\bar{M}_1,\quad D=-\cos M_1 sh\bar{M}_1,$$

$$\bar{A}=\sin M_1 sh\bar{M}_1,\quad \bar{B}=\cos M_1 ch\bar{M}_1,$$

$$M_1=\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}\bar{\bar{G}}_1,\quad \bar{M}_1=\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}\bar{\bar{G}}_2,$$

$$\bar{\bar{G}}_1=\bar{\bar{G}}_1+\bar{\bar{G}}_2,\ \bar{\bar{G}}_2=\bar{G}_1-\bar{G}_2,\ \sqrt{\frac{1}{\eta^*(i\omega)}}=\sqrt{G_1+G_2 i}=\bar{G}_1+\bar{G}_2 i\ ,$$

$$\bar{G}_1=\sqrt{\sqrt{G_1^2+G_2^2}}\cos\frac{\varphi+2n\pi}{2},\ \bar{G}_2=\sqrt{\sqrt{G_1^2+G_2^2}}\sin\frac{\varphi+2n\pi}{2},\ n=0,1;$$

$$\varphi=arctg\frac{G_2}{G_1},$$

$$\frac{1}{\eta^*(i\omega)}=\frac{1+De^2X\alpha_0^4+iDe\alpha_0^2(1-X)}{1+De^2X^2\alpha_0^4}=G_1+G_2 i,$$

$$G_1=\frac{1+De^2X\alpha_0^4}{1+De^2X^2\alpha_0^4},\ G_2=\frac{De\alpha_0^2(1-X)}{1+De^2X^2\alpha_0^4},$$

$$\eta*(i\omega)=\left(\frac{\eta_s}{\eta}+\frac{\eta_p}{\eta}\frac{1}{1+iDe\alpha_0^2}\right)=$$

$$=\left(X+Z\frac{1}{1+iDe\alpha_0^2}\right)=\frac{1+iDeX\alpha_0^2}{1+iDe\alpha_0^2},$$

$$\frac{\eta_s}{\eta}+\frac{\eta_p}{\eta}=1,$$

$$X=\frac{\eta_s}{\eta},\ Z=\frac{\eta_p}{\eta},$$

$$X+Z=1,$$

$$De=\frac{\lambda\eta}{\rho h^2},\ \alpha_0^2=\frac{\omega}{\nu}h^2.$$

Результаты исследования формулы (13) для Ньютоновской жидкости приведены во многих работах [7,9,10]. В рис. 1 представлена зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0, когда число Деборы $De=0.05$ и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости в растворе.

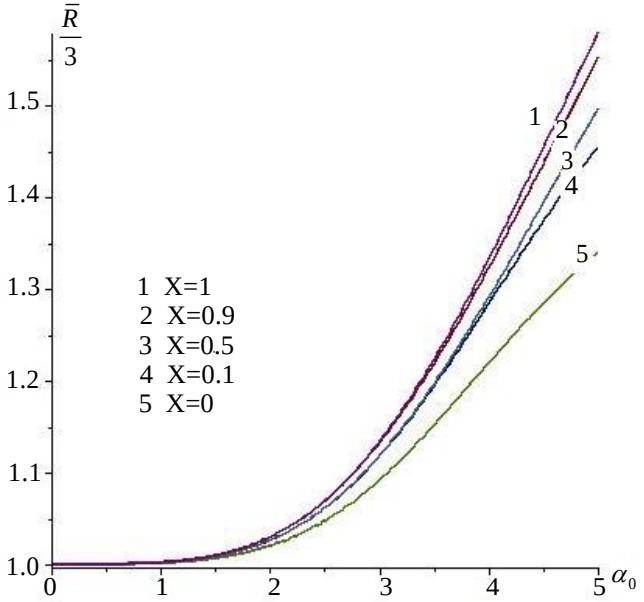


Рис. 1. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости и $De=0.05$

На рис. 1 при $X = 1$ приведено изменение полного гидродинамического сопротивления Ньютоновской жидкости в пульсирующем потоке, совпадающее с результатами других исследователей [7,9,10]. Из этого графика видно, что с увеличением безразмерной частоты колебаний α_0 полное гидродинамическое сопротивление Ньютоновской жидкости монотонно возрастает. Кривые 2-5 приведенные в рис.1 характеризуют изменение гидродинамического сопротивления в пульсирующем потоке упруго вязкой жидкости с низким упругим числом Деборы, с добавлением ее Ньютоновской жидкости. Действительно кривые 2-5 мало отличаются от кривой 1, что в этом случае вместо гидродинамического сопротивления упруговязкой жидкости можно принимать гидродинамическое сопротивление Ньютоновской жидкости.

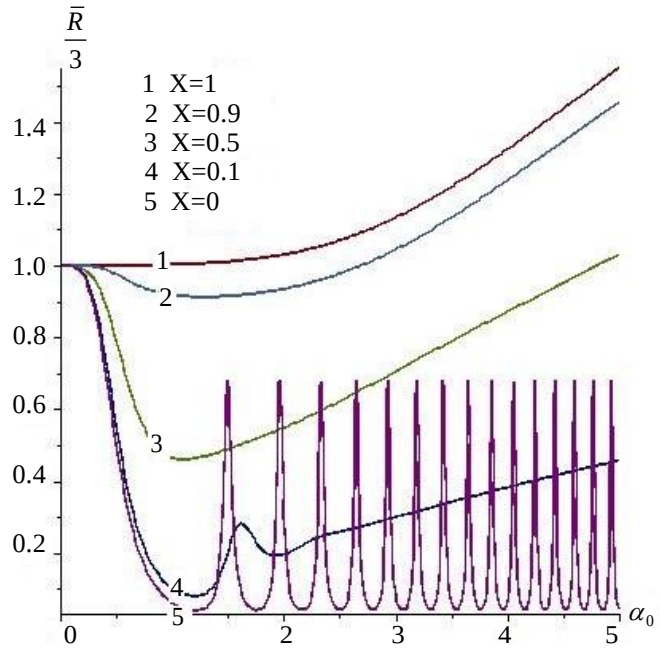


Рис. 2. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости и $De = 2$

Однако с увеличением числа Деборы наблюдается существенное отличие между гидродинамическим сопротивлением упруговязкой жидкости сравнительнос Ньютоновской жидкостью. Это отличие показано в рис. 2 при упругом числе Деборы $De = 2$, где наблюдается умещение гидродинамического сопротивления в зависимости от концентрации Ньютоновской жидкости (кривые 3-5 на рис. 2). Когда отсутствует Ньютоновская жидкость в растворе, тогда раствор обладает реологическими сложными свойствами. В таких случаях в пульсирующем потоке упруговязкой жидкости гидродинамическое сопротив-

ление изменяется колебательным образом в зависимости от безразмерной частоты колебаний α_0, и он усиливается с увеличением числа Деборы (кривые 5 на рис. 2).

Содержание Ньютоновской жидкости в растворе сглаживает колебательный режим изменения гидродинамического сопротивления (кривые 3,4 на рис. 2- 4).В общем случае при пульсирующем течении упруговязкой жидкости гидродинамического сопротивления уменьшается в промежуточном значении $1 < \alpha_0 < 3$ безразмерной частоты колебаний максимально, а затем увеличивается с увеличением этой частоты.

Полученный эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала, при пульсирующем течении упруговязкой жидкости, и тем самым можно определить диссипации механической энергии среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

Заключение. Решены задачи о колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости на основе обобщенной модели Максвелла. Определена передаточная функция амплитудно-фазовой частотной характеристики. С помощью этой функции исследованы зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний при различных значениях числа Деборы и концентрации Ньютоновской жидкости. Показано, что в колебательном течении упруговязкой жидкости гидродинамическое сопротивление уменьшается в зависимости от числа Деборы. С увеличением этого числа уменьшение становится еще ярче, чем прежнее. Этот эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала, при пульсирующем течении упруговязкой жидкости, и, тем самым позволяет определить диссипации механической энергии среды, имеющие важное значение при регулировании гидро-и пневмосистем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jons J.R., Walters T.S. Flow of elastic-viscous liquids in channels under the influence of a periodic pressure gradient. Part 1. *Rheologica Acta*, 1967, vol. 6, pp. 240-245.

[2] Khabakhpasheva E., Popov V., Kekalov A., and Mikhailova E. Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1989, vol.33, iss. 3, pp. 289-304.

[3] Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, iss. 23-24, p. 1315-1326.

[4] Hassan A. Abu-El, El-Maghawru E.M. Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd-B fluid. *Rheology-New Concepts. Applications and Methods*, 2013, vol. 6, pp. 91-106.
[5] Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S., Khuzhayorov B.Kh. Tangential shear stress under the periodic flow of a viscoelastic fluid in a cylindrical tube. *Fluid Dynamics*, 2021, vol. 56, no. 2, pp. 189-199.
[6] Ding Z., JianY. Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, vol. 919, art. A20.
[7] Попов Д.Н. *Нестационарные гидромеханические процессы*. Москва, Машиностроение, 1982, 424 с.
[8] Астарита Дж., Марруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*. Москва, Мир, 1978, 309 с.
[9] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Дрофа, 2003, 840 с.
[10] Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н. *Введение в механику несжимаемой жидкости*. Пермь, Издательство ПНИМУ, 2019, 127 с.

Статья поступила в редакцию 13.09.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Абдикаримов Н.И., Наврузов К.Н. Математическое моделирование гидродинамических сопротивлений при колебательном течении упруговязкой жидкости в плоском канале. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 2, с. 35–45.

Абдикаримов Набижон Ибадуллаевич — д-р кафедры «Математический инжиниринг» физико-математического факультета Ургенчского государственного университета. e-mail: nabijon.88@mail.ru

Наврузов Куралбай — профессор кафедры «Математический инжиниринг» физико-математического факультета Ургенчского государственного университета. e-mail: qurol_46@mail.ru

Mathematical modeling of hydrodynamic resistance during oscillatory flow of viscoelastic fluid in a flat channel

© N.I. Abdikarimov, K. Navruzov

Urgench State University, Urgench, 220100, Uzbekistan

The problems of oscillatory flow of an elastic-viscous fluid in a flat channel for a given harmonic oscillation of fluid flow are solved based on the generalized Maxwell model. The "impedance" function was determined, and with the help of this function the dependence of the hydrodynamic resistance on the dimensionless oscillation frequency was studied for various values of the elastic Deborah number and the concentration of the Newtonian fluid. It is shown that in the oscillatory flow of an elastic-viscous fluid, the hydrodynamic resistance decreases depending on the Deborah number. This effect makes it possible to estimate the hydrodynamic resistance for a given law of change in the longitudinal velocity averaged over the cross section of the channel, with oscillatory flow and, thereby, allows us to determine the dissipation of the energy of the medium, which is important in the regulation of hydraulic and pneumatic systems.

***Keywords**: viscoelastic fluid, unsteady flow, "impedance" function, oscillatory flow, amplitude, phase*

REFERENCES

[1] Jons J.R., Walters T.S. Flow of elastic-viscous liquids in channels under the influence of a periodic pressure gradient. Part 1. *Rheologica Acta*, 1967, vol. 6, pp. 240-245.

[2] Khabakhpasheva E., Popov V., Kekalov A., and Mikhailova E. Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1989, vol.33, iss. 3, pp. 289-304.

[3] Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, iss. 23-24, p. 1315-1326.

[4] Hassan A. Abu-El, El-Maghawru E.M. Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd-B fluid. *Rheology-New Concepts. Applications and Methods*, 2013, vol. 6, pp. 91-106.

[5] Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S., Khuzhayorov B.Kh. Tangential shear stress under the periodic flow of a viscoelastic fluid in a cylindrical tube. *Fluid Dynamics*, 2021, vol. 56, no. 2, pp. 189-199.

[6] Ding Z., JianY. Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, vol. 919, art. A20.

[7] Popov D.N. *Nestacionarnye gidromekhanicheskie processy* [Unsteady hydromechanical processes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982, 424 p.

[8] Astarita G., Marrucci G. *Osnovy gidromekhaniki nen'yutonovskih zhidkostej* [Fundamentals of hydromechanics of non-Newtonian fluids]. Moscow, Mir Pupl., 1978, 309 p.

[9] Loytsyansky L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of fluid and gas]. Moscow, Drofa [Bustard], 2003, 840 p.

[10] Kolesnichenko V.I., Sharifulin A.N. *Vvedenie v mekhaniku neszhimaemoj zhidkosti* [Introduction to Incompressible Fluid Mechanics]. Permian, Izdatel'stvo PNIMU [Publishing house PNIMU], 2019, 127 p.

Abdikarimov N.I., Dr. of the Department of Mathematical Engineering, Faculty of Physics and Mathematics, Urgench State University. e-mail: nabijon.88@mail.ru

Navruzov K.N., Professor of the Department of Mathematical Engineering, Faculty of Physics and Mathematics, Urgench State University. e-mail: qurol_46@mail.ru