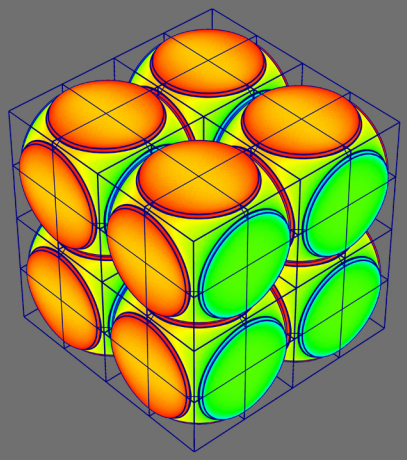
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю.
Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей An и метода асимптотического осреднения. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 17–34.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/338/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.38
04.03.2026 12:54:57

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-1734

Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A_n и метода асимптотического осреднения

© Ю.И. Димитриенко, С.Б. Каримов, А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Статья посвящена моделированию деформирования композиционных материалов с конечными деформациями. Рассмотрены так называемые универсальные модели определяющих соотношений для компонентов композита, задающих сразу несколько классов нелинейной связи между тензором напряжений Пиолы—Кирхгофа и градиентом деформаций в рамках разных энергетических пар тензоров напряжений-деформаций. Применен метод асимптотического осреднения и сформулированы локальные задачи для решения задачи об определении осредненных свойств композитов с конечными деформациями. Рассмотрена вариационная постановка исходной задачи деформирования, так называемых локальных задач на ячейке периодичности и осредненной задачи для композита, позволившая применить МКЭ для численного решения указанных классов задач. Разработан программный модуль в составе программного комплекса Manipula/SMCM, который реализует предложенный численный алгоритм. Приведен пример численного решения задач на ячейке периодичности для 3D ортогонально-армированного композита с учетом больших деформаций матрицы и волокон, а также рассчитаны диаграммы деформирования композита для различных вариантов универсальных моделей определяющих соотношений.

Ключевые слова: *композиты, конечные деформации, метод асимптотического осреднения, универсальные модели A_n, ячейка периодичности, метод конечных элементов*

Введение. В разных отраслях промышленности широко применяют композиционные материалы, состоящие из резиноподобных или эластомерных матриц, армированных волокнами, дисперсными частицами или тканевыми наполнителями [1,2]. Такие материалы представляют значительный интерес, так как обладают удачными сочетаниями свойств, в частности относительно высокой прочностью в направлениях укладки армирующего наполнителя, достаточно большой предельной деформацией разрушения, обусловленной способностью резин деформироваться без разрушения в области больших деформаций.

В настоящее время для прогнозирования свойств композитов применяются различные методы [3-7]. Наиболее перспективным является метод асимптотического осреднения, который был предложен Н.С Бахваловым и Г.П. Панасенко [8], Bensoussan A., Lions JL., Papanicalaou [9], Б.Е. Победрей [10], Э. Санчес-Паленсией [11]. Метод асимптотического осреднения достаточно хорошо развит в

настоящее время и успешно численно реализован для различных задач механики, но, главным образом, для линейных задач [12]. В работах под руководством проф. Ю.И. Димитриенко этот метод был применен для расчета нелинейно-упругих свойств слоистых композитов с конечными деформациями [14-17]. Другие подходы для моделирования микромеханики композитов с конечными деформациями можно найти в работах [18-23].

В данной работе предложен метод расчета диаграмм деформирования пространственно армированных композитов с конечными деформациями на основе асимптотической теории осреднения нелинейно-упругих композитов с периодической структурой, которая обобщена для случая конечных деформаций. Для расчета определяющих соотношений нелинейно-упругих сред для случая конечных деформаций в данной работе использованы универсальные представления моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями [24].

Постановка задачи механики для упругих композитов с конечными деформациями в рамках моделей $\mathcal{A}_n$. Для композиционного материала, состоящего из различных компонент, рассматривается задача нелинейной теории упругости с конечными деформациями в лагранжевом описании в общей формулировке с использованием универсальных моделей упругих сред — моделей $\mathcal{A}_n$, предложенных Ю. И. Димитриенко [25]:

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{P}+\overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}=0,\quad X^i\in\overset{\circ}{V},\tag{1}$$

$$\mathbf{P}=\overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(\mathbf{F},X^i\right),\quad X^i\in\overset{\circ}{V}\cup\overset{\circ}{\Sigma},\tag{2}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\otimes\mathbf{u}^T,\quad X^i\in\overset{\circ}{V}\cup\overset{\circ}{\Sigma},\tag{3}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\mathbf{P}]=0,\quad [\mathbf{u}]=0,\quad X^i\in\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta},\tag{4}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}=\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n},\quad X^i\in\overset{\circ}{\Sigma}_1,\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_{(e)},\quad X^i\in\overset{\circ}{\Sigma}_2.\tag{5}$$

Здесь (1) — уравнения равновесия, (2) — определяющие соотношения нелинейно-упругой среды с использованием моделей $\mathcal{A}_n$, (3) — кинематическое соотношение, (4)— условия идеального контакта на поверхностях раздела $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ α-ой и β-ой компонент композита, (5) — граничные условия на частях $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_2$ внешней поверхностях композита, которые вместе составляют всю внешнюю поверх-

ность: $\overset{\circ}{\Sigma}_1 \cup \overset{\circ}{\Sigma}_2 = \overset{\circ}{\Sigma}$. Используется обозначение $[\Omega]$ для скачка величины Ω при переходе через границу $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ раздела компонентов α и β. Также введены следующие обозначения: $\overset{\circ}{\rho}$ — плотность в отсчетной конфигурации; $\overset{(n)}{\mathcal{P}}$ — тензор определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита; $\mathbf{P}$ — тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа; $\mathbf{F}$ — тензор градиент деформации; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ — вектор нормали к поверхности в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$; $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n}$ — вектор поверхностных усилий, приложенных к поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_1$, $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n} = \mathbf{S}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{t}_{(e)}$, где $\mathbf{t}_{(e)}$ — вектор напряжений в актуальной конфигурации, $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ — тензор преобразования усилий из актуальной конфигурации в отсчетную; $\mathbf{u}_{(e)}$ — вектор заданных перемещений поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_2$, $\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил; $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла оператор в отсчетной конфигурации; $\otimes$ — знак тензорного произведения; $\cdot$ — знак скалярного произведения.

Тензор определяющих соотношений $\overset{(n)}{\mathcal{P}}$ нелинейно-упругих компонент композита для универсальных моделей $\mathcal{A}_n$ упругих сред с конечными деформациями имеет сложный неявно-заданный вид и зависит от градиента деформаций $\mathbf{F}$ и лагранжевых координат (разрывным образом) X^i:

$$
\begin{gathered}
\overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, X^i) = \overset{\circ}{\rho}\, {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^{\circ} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{C}}, \\
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^{\circ} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E^0_{\alpha\beta}\, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\
\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{C}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}} \Psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, X^i), \\
\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - III}\left(\mathbf{U}^{n-III} - \mathbf{E}\right), \\
\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha .
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Здесь обозначен

$$
\Psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, X^i) = \Psi(I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \ldots, I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), X^i) \tag{7}
$$

– упругий потенциал (различный для каждого компонента композита и поэтому зависящий явно от X^i); $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ — симметричный энергетический тензор деформации [24], n – номер энергетической пары тензоров напряжений-деформаций; $I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}),...,I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ — главные инварианты тензора $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^{\circ}$ — тензор энергетической эквивалентности [24], связывающий энергетический тензор напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и тензор Пиолы-Кирхгофа $\mathbf{P}$; $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \mathbf{p}_\beta$ — векторы собственного базиса для правого $\mathbf{U}$ и левого $\mathbf{V}$ тензора искажений, соответственно (являются неявными функциями только от $\mathbf{F}$); λ_γ — собственные значения тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, которые являются функциями от тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$, $E^0_{\alpha\beta}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ — функции от собственных значений λ_γ [24].

Решение задачи (1) – (6) ищется относительно поля вектора перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(X^i)$, после нахождения которого координаты произвольной точки композита вычисляются по формуле: $\mathbf{x}(X^i) = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^i) + \mathbf{u}(X^i)$.

Асимптотические разложения для решения задачи механики композитов с конечными деформациями. Для КМ, имеющего периодическую структуру, решение задачи (1)-(6) ищем в виде асимптотического разложения [13,14] по малому параметру $æ = l / L \ll 1$, представляющему собой отношение размера l ячейки периодичности (ЯП) к характерному размеру конструкции L:

$$\mathbf{u}(X^i) = \sum_{n=0}^{N} \varkappa^n \mathbf{u}^{(n)}(X^i, \xi^j) + o(\varkappa^n), \tag{8}$$

$$X^i \in \overset{\circ}{V}, \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_\xi .$$

Перемещение (9) представляет собой функцию от безразмерных глобальных лагранжевых координат X^i, меняющихся в гомогенизированной области $\overset{\circ}{V}$ КМ, и от локальных координат $\xi^j = X^j/\varkappa$ $\xi^j = X^j / \varkappa$, заданных на ячейке периодичности $\overset{\circ}{V}_\xi$, и относительно которых функция является периодической.

Локальные задачи на ЯП**.** С использованием разложения (9), а также аналогичных разложений остальных неизвестных полей, на ячейке периодичности может быть получена рекуррентная последовательность локальных задач $\mathcal{L}_n$, $n = 0,1,\ldots,N$. Подробное изложение этой методики представлено в работе [16].

Решение каждой задачи $\mathcal{L}_n$ в этой последовательности используется как входные данные для следующей задачи.

Задача нулевого приближения $\mathcal{L}_0$ имеет вид:

$$\nabla_\xi \cdot \mathbf{P}^{(0)} = 0, \quad \xi^j \in \overset{\circ}{V}_\xi ,$$

$$\mathbf{P}^{(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}^{(0)}, \xi^j), \quad \mathbf{F}^{(0)} = \overline{\mathbf{F}} + \left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}^{(0)}] = 0, \quad [\mathbf{u}^{(1)}] = 0, \quad \xi^j \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta} ,$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{(1)} \right\rangle = 0, \quad \left[\!\left[\mathbf{u}^{(1)} \right]\!\right]_l = 0, \quad l = 1, 2, 3 .$$

Здесь ∇_ξ — набла-оператор по локальным координатам, а также введены обозначения: для осреднения по ЯП

$$\langle \Omega \rangle = \frac{1}{|V_\xi|} \int\limits_{V_\xi} \Omega dV_\xi = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \Omega d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \tag{10}$$

и для условия периодичности функций

$$\Omega_{\ i} = \Omega\big|_{\xi^i = 1/2} - \Omega\big|_{\xi^i = -1/2} . \tag{11}$$

Неизвестным в задаче $\mathcal{L}_0$ является поле перемещений $\mathbf{u}^{(1)}$, а входными данными является поле осредненного тензора градиента деформаций

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u}^{(0)} , \tag{12}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ — набла-оператор по глобальным координатам.

Локальная задача $\mathcal{L}_1$ для модели $\mathcal{A}_n$ имеет вид:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \mathbf{P}^{(1)} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = 0 , \ \xi^j \in \overset{\circ}{V}_\xi ,$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \xi^j)\Big|_{\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)}} \cdot\cdot \mathbf{F}^{(1)\mathrm{T}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \left(\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}^{(1)}] = 0, \quad [\mathbf{u}^{(2)}] = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta} ,$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{(2)} \right\rangle = 0, \quad \left[\!\left[\mathbf{u}^{(2)} \right]\!\right]_l = 0, \quad l = 1, 2, 3 .$$

Неизвестной в этой задаче является вектор перемещений $\mathbf{u}^{(2)}$.

Осредненная задача. Входные данные для локальной задачи нулевого приближения $\mathcal{L}_0$ — градиент деформации $\bar{\mathbf{F}}$, в свою очередь определяются из решения осредненной задачи на ЯП.

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{P}} - \langle \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \rangle = 0, \; X^i \in \overset{\circ}{V},$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \overset{(n)}{\bar{\mathcal{P}}}\left(\bar{\mathbf{F}}\right), \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u}^{(0)})^{\mathrm{T}},$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{P}} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n}, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_{(e)}, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2,$$

где $\bar{\mathbf{P}} = \left\langle \bar{\mathbf{P}}^{(0)} \right\rangle$ — осредненный тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, а

$$\overset{(n)}{\bar{\mathcal{P}}}\left(\bar{\mathbf{F}}\right) = < \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}^{(0)}, \xi^j) > \tag{15}$$

— эффективный тензор определяющих соотношений композита.

Вариационная постановка задач механики. Для произвольного объема $\overset{\circ}{V}$ может быть записана вариационная постановка задачи (1)-(6) с использованием виртуальных скоростей $\delta\mathbf{v}$, в следующем виде:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = 0, \tag{16}$$

где введена вариация мощности сил, действующих на тело $\overset{\circ}{V}$

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) + \delta W_{ext}(\delta\mathbf{v}), \tag{17}$$

здесь $\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v})$ — вариация мощности внутренних сил, а $\delta W_{ext}(\delta\mathbf{v})$ — вариация мощности внешних сил

$$\begin{gathered} \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = -\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \mathbf{P}(\mathbf{u}, X^i) \cdot\cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{v}^T dV, \\ \delta W_{ext}(\delta\mathbf{v}) = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} dV + \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_1} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n} \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma. \end{gathered} \tag{18}$$

В формуле (17) использовано обозначение для функции определяющих соотношений

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, X^i) = \overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(\mathbf{F}, X^i\right) = \overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T, X^i\right), \tag{19}$$

которая зависит от вектора перемещений

Вариационная постановка (17)-(20) может быть применена и для локальных задач $\mathcal{L}_n$ (10) и (14), а также для осредненной задачи (15), с той лишь разницей, что в этих задачах меняются и определяющие соотношения, массовые силы $\overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}$ и внешние поверхностные силы $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{(e)n}$. Условия осреднения и периодичности в локальных задачах (10) и (14) учитываются как дополнительные ограничения на поля кинематически допустимых перемещений $\mathbf{u}$, эти условия явно не входят в вид функционала (17).

Алгоритм линеаризации задачи. Линеаризуем уравнение (17) с использованием процедуры взятия функциональной производной по направлению [26] от функционала мощности (18)

$$D\delta W(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) = 0\,, \tag{20}$$

где $D\delta W(\mathbf{u},\delta\mathbf{v})$ — функциональная производная от виртуальной мощности, которая вычисляется следующим образом

$$\mathcal{D}\delta W(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) = \mathcal{D}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) + \mathcal{D}\delta W_{ext}(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}); \tag{21}$$

здесь

$$\begin{gathered}\mathcal{D}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) = -\int\limits_{V^0}(\overset{\circ}{\nabla}\otimes\delta\mathbf{v})\cdot\cdot{}^4\mathbf{A}\cdot\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\otimes\mathbf{u})dV;\\ {}^4\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{P}(\mathbf{u},X^i) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}\overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(\mathbf{F},X^i\right).\end{gathered} \tag{22}$$

Выражение для $\mathcal{D}\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u},\delta\mathbf{v})$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}\delta W^t_{\text{ext}}(\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) = \int\limits_{V^0}\overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{v}dV + \int\limits_{\Sigma^\circ}\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\left(\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\otimes\mathbf{u}^T\right)\cdot\mathbf{t}_n\,d\overset{\circ}{\Sigma}\,. \tag{23}$$

Запишем вариационное уравнение (21) с учетом (22)-(24) в компонентно-матричном виде в единой декартовой системе координат $O\mathbf{e}_k$, тогда получим

$$D\delta W\left(\{u\},\{\delta v\}\right) = 0 \tag{24}$$

где

$$\mathcal{D}\delta W(\{u\},\{\delta v\}) = \mathcal{D}\delta W_{\text{int}}(\{u\},\{\delta v\}) + \mathcal{D}\delta W_{ext}(\{u\},\{\delta v\}); \tag{25}$$

$$\mathcal{D}\delta W_{\text{int}}(\{u\},\{\delta v\}) = -\int\limits_{V^0}([L]\{\delta v\})[A][L]\{u\}dV;$$

$$\mathcal{D}\delta W^t_{\text{ext}}(\{u\},\{\delta v\}) = \int\limits_{V^0}\{\delta v\}[R]\{f\}dV + \int\limits_{\Sigma^\circ}\{\delta v\}[S]\{t_n\}\,d\overset{\circ}{\Sigma}\,.$$

Здесь $\{u\}=\left(u_1,u_2,u_3\right)^T$, $\{\nu\}=\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)^T$ — координатные столбцы компонент векторов перемещений и скоростей, $[L]$ — матрица операторов дифференцирования, связывающая компоненты градиента $\overset{\circ}{\nabla}\otimes\mathbf{u}$ с компонентами вектора $\mathbf{u}$, $[A]$ — матрица компонент тензора ${}^4\mathbf{A}$, $[S]$ — матрица компонент тензора $\mathbf{S}$, $\{t_n\}$ — координатный столбец компонент вектора $\mathbf{t}_n$, $[\mathrm{R}]=[\overset{\circ}{\rho}\mathrm{E}]$ — диагональная матрица плотностей, $[\mathrm{E}]$ — единичная матрица.

Применение метода конечных элементов. Дискретизируем область $V^{(0)}$, представив ее в виде суммы конечных элементов (КЭ) $V^{(e)}$: $V^{(0)}=\sum\limits_e V^{(e)}$ [27], тем самым вводится конечно-элементная модель (КЭМ) области.

Поля перемещений и виртуальных скоростей аппроксимируются в каждом КЭ $V^{(e)}$ независимо, с помощью следующих представлений:

$$\{u\}=[\Phi]\{q\},\qquad \{\delta v\}=[\Phi]\{\delta y\} \tag{26}$$

где $\{q\}$ и $\{\delta y\}$ — столбцы координат вектора перемещения и виртуальной скорости в узлах КЭ $V^{(e)}$, а $[\Phi]$ — матрица функций формы.

Вариации мощностей (26) для отдельного КЭ $V^{(e)}$ с помощью представлений (27) можно записать в виде

$$D\delta W_{\mathrm{int}}^{(e)}(\{q\},\{\delta y\})=-\{\delta y\}\int\limits_{V^{(e)}}[B]^T[A][B]dV\{q\}; \tag{27}$$

$$D\delta W_{ext}^{(e)}(\{u\},\{\delta v\})=$$

$$=\{\delta y\}\int\limits_{V^{(e)}}[\Phi][R]\{f\}dV+\{\delta y\}\int\limits_{\Sigma^{(e)}}[\Phi][S]\{t_n\}d\overset{\circ}{\Sigma}.$$

Подставляя выражения (28) в (26), получаем для одного КЭ

$$\mathcal{D}\delta W^{(e)}(\{q\},\{\delta y\})=\{\delta y\}([K^{(e)}]\{q\}-\{F^{(e)}\}); \tag{28}$$

где обозначена $[K^{(e)}]$ — локальная матрица жесткости и $\{F^{(e)}\}$ — вектор локальных правых частей

$$[K^{(e)}]=\int\limits_{V^{(e)}}[B]^T[A][B]dV\ . \tag{29}$$

Подставляя выражение (29) в (25), получаем итоговую глобальную систему уравнений

$$[K(q)]\{q\} = \{F\}, \tag{30}$$

где обозначена глобальная матрица жесткости $[K(q)]$ и глобальный вектор правых частей $\{F\}$

$$[K(q)] = \sum_e [K^{(e)}],\ \{F\} = \sum_e \{\tilde{F}^{(e)}\}, \tag{31}$$

$$\{\tilde{F}^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [\Phi][R]\{f\}dV + \int_{\Sigma^{(e)}} [\Phi][S]\{t_n\}d\overset{\circ}{\Sigma}.$$

Численный алгоритм решения вариационных постановок локальных и осредненной задач осуществляется на основе решения полученной системы уравнений (31), для решения которой применялся итерационный алгоритм с пересчетом координат узлов КЭМ в актуальной конфигурации.

Был разработан программный модуль, в котором реализован предложенный численный алгоритм решения вариационных задач на основе метода конечного элемента, с применением типичных процедур этого метода [27]. Программный модуль разработан как составная часть программного комплекса Manipula/SMCM, созданного в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана [28].

Пример численного моделирования. В качестве примера разработанного алгоритма был рассмотрен 3D ортогонально-армированный композиционный материал, волокна которого ориентированы по координатным направлениям. ЯП такого композита показана на рис. 1. Для волокон и матрицы принималась одна и та же модель A_n (одного и того же класса с номером n).

Рассматривались полулинейные модели $\mathcal{A}_n$ [24], в которых упругий потенциал (8) имеет вид

$$\Psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, X^i) = \frac{1}{2} l_1(\xi^j)(I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}))^2 + l_2(\xi^j) I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}^2). \tag{32}$$

Здесь $l_1(\xi^j)$, $l_2(\xi^j)$ — упругие константы, различные для матрицы и волокон. Численные значения этих констант были приняты следующими:

$$\begin{aligned} &\text{для волокон: } l_1 = 100 \text{ МПа},\ l_2 = 50 \text{ МПа}, \\ &\text{для матрицы: } l_1 = 20 \text{ МПа},\ l_2 = 10 \text{ МПа}. \end{aligned} \tag{33}$$

Тензор определяющих соотношений $\overset{(n)}{\mathcal{P}}$ для полулинейных моделей An имеет вид [25]

$$\overset{(n)}{\mathcal{P}} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^{\circ} \cdot\cdot \left(l_1(\xi^j) I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2 l_2(\xi^j)\overset{(n)}{\mathbf{C}} \right). \tag{34}$$

На рис. 2-4 показаны некоторые результаты решения локальной задачи $\mathcal{L}_0$ (10) для модели $\mathcal{A}_v$ для случая продольного растяжения вдоль оси $O\xi^1$.

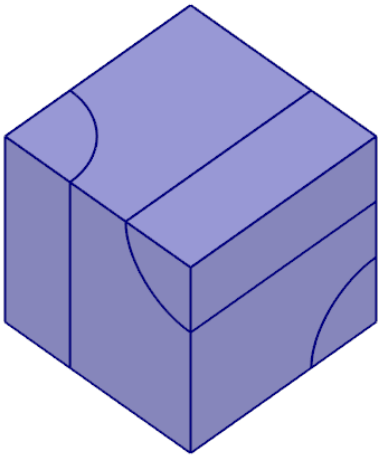
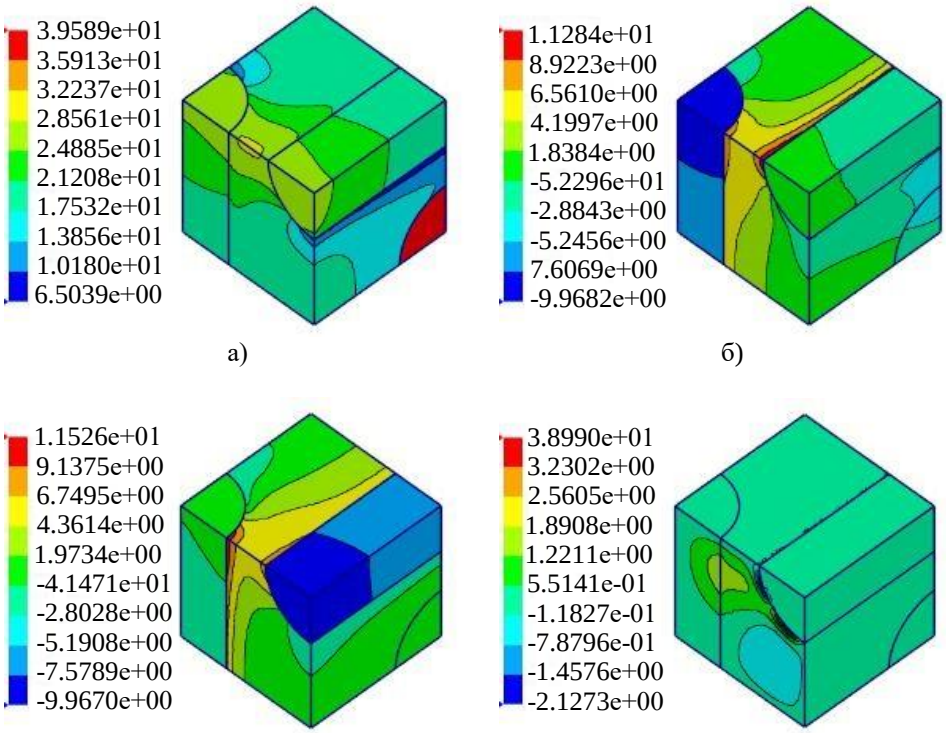
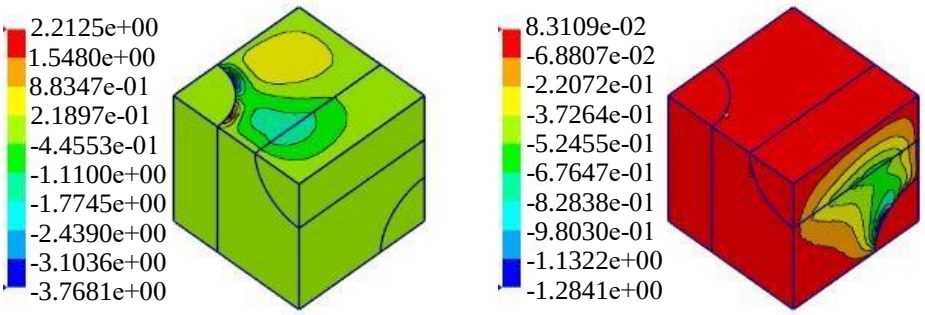


Рис. 1. ЯП 3D-армированного КМ

На рис. 2 показаны распределения различных компонент $P^{(0)ij}$ тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа $\mathbf{P}^{(0)}$ в ЯП при растяжении.





д) е)

Рис. 2. Поля распределения различных компонент $P^{(0)ij}$ (МПа) тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа $\mathbf{P}^{(0)}$ в ЯП 3D-армированного КМ при растяжении в направлении оси $O\xi^1$: а) — $P^{(0)11}$, б) — $P^{(0)22}$, в) — $P^{(0)33}$, г) — $P^{(0)12}$, д) — $P^{(0)13}$, е) — $P^{(0)23}$

Продольные напряжения $P^{(0)11}$ (рис. 2а) достигают максимальных значений в волокнах, ориентированных по направлению действия нагрузки. Поперечные напряжения $P^{(0)22}$ и $P^{(0)33}$ достигают максимальных по абсолютной величине значений в зоне контакта поперечно расположенных волокон и матрицы. Величина этих напряжений сопоставима с величиной максимальных напряжений $P^{(0)11}$: они отличаются примерно в 4 раза, этот эффект является особенностью геометрически нелинейного деформирования материалов.

Касательные напряжения $P^{(0)12}$, $P^{(0)13}$ и $P^{(0)13}$ (рис. 2 г), д), е)) примерно на порядок меньше по максимальных значений напряжения $P^{(0)11}$, их максимальное значение достигается на границе раздела матрицы и волокон.

На рис. 3 показаны распределения различных компонент $u^{(1)i}$ вектора перемещений $\mathbf{u}^{(1)}$ в ЯП 3D-армированного КМ при растяжении. Распределение продольной компоненты $u^{(1)1}$ зависит, главным образом от продольной координаты ξ^1, а компонента $u^{(1)2}$ — зависит, главным образом от поперечной координаты ξ^2, ее значения являются отрицательными при растяжении ЯП по оси $O\xi^1$, вследствие эффекта Пуассона.

На рис. 4 показаны диаграммы деформирования $\bar{P}^{11} = \overset{(n)}{\bar{\mathcal{P}}}\left(\bar{\delta}_1\right)$ 3D ортогонально-армированного композита, полученные с помощью осредненных определяющих соотношений задачи (15), где $\bar{\delta}_1 = \bar{F}^{11} - 1$. Диаграммы построены для 4 различных моделей An при одних и тех же значениях констант (34). Полученные диаграммы ка-

чественно совпадают с подобными диаграммами, которые получаются при аналитическом решении задачи об одноосном растяжении бруса [25] для разных моделей An: для моделей AI, AII и AIII диаграммы деформирования имеют выпуклость вверх, а для моделей AIV и AV — выпуклость вниз. В модели AIII – используется логарифмический тензор деформации $\overset{(III)}{\mathbf{C}} = \ln \mathbf{U}$.

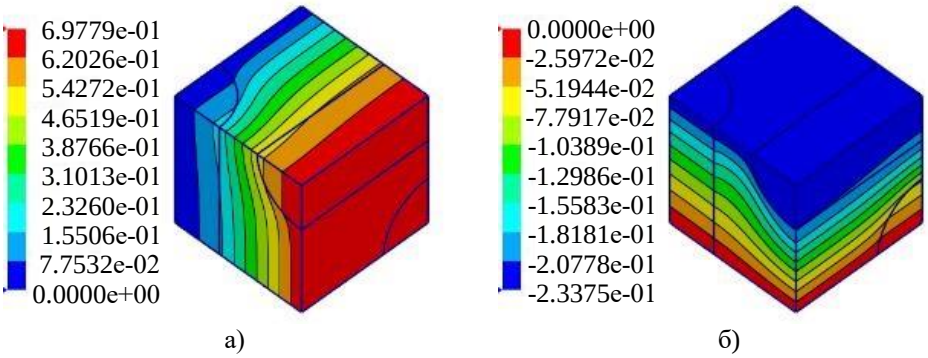


Рис. 3. Поля распределения различных компонент $u^{(1)i}$ вектора перемещений $\mathbf{u}^{(1)}$ в ЯП 3D-армированного КМ при растяжении в направлении оси $O\xi^1$:

а) — $u^{(1)1}$, б) — $u^{(1)2}$

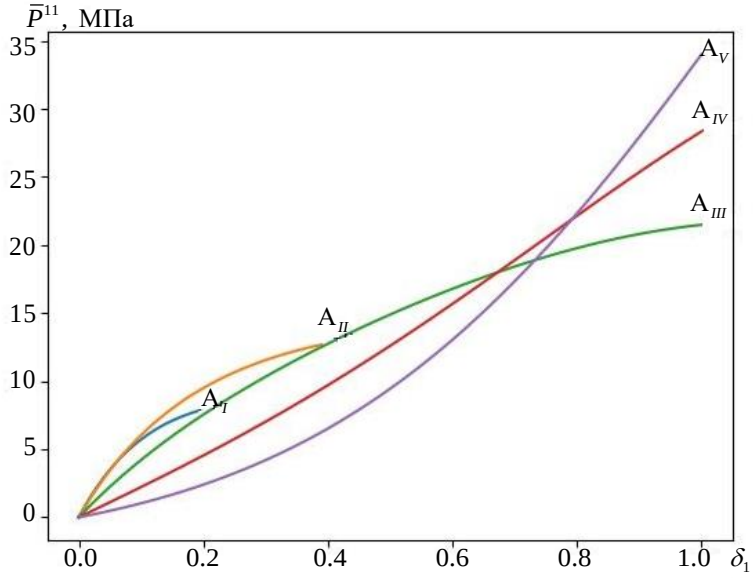


Рис. 3. Диаграммы деформирования 3D-армированного КМ при одноосном растяжении для различных моделей A_n, определяющих соотношений матрицы и волокон, вычисленные с помощью разработанного алгоритма

AI и AII диаграммы одноосного деформирования существуют только на ограниченном промежутке значений удлинения $\overline{\delta}_1 \in (-\overline{\delta}_1^{\min}, \overline{\delta}_1^{\max})$: для AI значение $\overline{\delta}_1^{\max}$ составляет примерно 0,2

(20 %), а для модели AII — примерно 0,4. При более высоких значениях $\overline{\delta}_1^{max}$ происходит потеря физической устойчивости этих моделей [25]. Для моделей AIII, AIV и AV — этот эффект отсутствует, значения $\overline{\delta}_1^{max}$ — для этих моделей ограничены только предельными значениями деформации, при которых происходит разрушение материала.

Выводы. Рассмотрен вариант метода асимптотического осреднения композиционных материалов при конечных деформациях с использованием универсального представления определяющих соотношений для комплекса различных моделей сжимаемых сред;

Разработан алгоритм численного решения задач на ячейке периодичности для композиционных материалов с конечными деформациями и с использованием комплекса различных универсальных моделей для сжимаемых сред.

Предложена методика построения эффективных диаграмм деформирования для сжимаемых композитов с конечными деформациями на основе осреднения серий численного решения локальных задач.

Проведены серии численного моделирования эффективных диаграмм деформирования 3D ортогонально армированных композиционных материалов с конечными деформациями, показавшие эффективность разработанной методики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kwietniewskia M., Miedzińska D. Review of elastomeric materials for application to composites reinforced by auxetics fabrics. *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 17, pp. 154-161.

[2] Peel L.D., Mejia J., Narvaez B., Thompson K., Lingala M. Development of a simple morphing wing using elastomeric composites as skins and actuators. *Journal of Mechanical Design*, 2009, vol. 131, no. 9, pp. 839-847.

[3] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons, 1979, 324 p.

[4] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига, Зинатне, 1980, 572 с.

[5] Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. USA, Taylor&Francis Publ., 1999, 520 p.

[6] Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М. *Композиционные материалы: справочник*. Москва, Машиностроение, 1989, 510 с.

[7] Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов*. Киев, Наукова думка, 1985, 300 с.

[8] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 356 с.

[9] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.

[11] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[12] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[13] Димитриенко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015, № 11, с. 68–77. DOI 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю., Каримов С.Б. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, вып. 1 (13), с. 32–54. DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально–изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 72–92.

[16] Dimitrienko Y.I., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2019, vol. 683, art no. 012006. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012006

[17] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2020, vol. 934, art no. 012012. DOI: 10.1088/1757-899X/934/1/012012

[18] Abodi J., Arnold S.M. Micromechanical modeling of the finite deformation of thermoelastic multiphase composites. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 75-99.

[19] Costa S., Fagerström M., Olsson R. Development and validation of a finite deformation fibre kinking model for crushing of composites. *Composites Science and Technology*, 2020, vol. 197, art. 108236.

[20] Qingsheng Yang, Fang Xu. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. Frontiers of *Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, pp. 284–288.

[21] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. Int. *J. Multiscale Comput*, 2008, vol. 6 (2008), pp. 411–434.

[22] Bin Zhang, Xiaoming Yu, Boqin Gu. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polym Compos*, 2015. DOI: 10.1002/pc.23596

[23] Qi Ge, Xiaofan Luo, Christian B. Iversen, Hossein Birjandi Nejad, Patrick T. Mather, Martin L. Dunn, H. Jerry Qi. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.

[24] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[26] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[27] Оден Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*. Москва, МИР, 1976, 464 с.

[28] Свидетельство № 2018614767 *Программа MultiScale_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2018677684; заявл. 21.02.2018; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17.04.2018. — [1].

Статья поступила в редакцию 12.11.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю. Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A_n и метода асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 2, с. 17–34.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Каримов Суннат Бахтиярович — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Димитриенко Александр Юрьевич — аспирант МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Modeling of finite deformations of composite materials based on universal A_n models and the asymptotic averaging method

© Yu.I. Dimitrienko, S.B. Karimov, A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper is devoted to modeling the deformation of composite materials with finite deformations. The so-called universal models of constitutive relations for composite components are considered, defining several classes of nonlinear relationship between the Piola-Kirchhoff stress tensor and the strain gradient within different energy pairs of stress-strain tensors. The method of asymptotic averaging is applied and local problems are formulated to solve the problem of determining the averaged properties of composites with finite deformations. A variational formulation of the original deformation problem, the so-called local problems on a periodicity cell and the averaged problem for a composite is considered, which makes it possible to use FEM for the numerical solution of these

classes of problems. A software module has been developed as part of the SMCM software package, which implements the proposed numerical algorithm. An example of the numerical solution of problems on a periodicity cell for a 3D orthogonally reinforced composite is given, taking into account large deformations of the matrix and fibers, and composite deformation diagrams are calculated for various variants of universal models of constitutive relations.

Keywords*: composites, finite deformations, asymptotic averaging method, universal An models, periodicity cell, finite element method*

REFERENCES

[1] Kwietniewskia M., Miedzińska D. Review of elastomeric materials for application to composites reinforced by auxetics fabrics. *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 17, pp. 154-161.

[2] Peel L.D., Mejia J., Narvaez B., Thompson K., Lingala M. Development of a simple morphing wing using elastomeric composites as skins and actuators. *Journal of Mechanical Design*, 2009, vol. 131, no. 9, pp. 839-847.

[3] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons, 1979, 324 p.

[4] Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov* [Resistance of polymer and composite materials]. Riga, Zinatne Publ., 1980, 572 p.

[5] Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. USA, Taylor&Francis Publ., 1999, 520 p.

[6] Vasiliev V.V., Tarnopolsky Yu.M. *Kompozicionnye materialy: spravochnik* [Composite materials: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 510 p.

[7] Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozicionnyh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 300 p.

[8] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov [*Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics*]*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.

[9] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 336 p.

[11] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. New York, Springer Publ., 1980.

[12] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. Finite element method for calculating the effective characteristics of spatially reinforced composites. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, 2002, no. 2, pp. 95–108.*

[13] Dimitrienko Yu.I. Modelling of nonlinear-elastic properties of composites with finite deformations by asymptotic homogenization method. *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedeny. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building, 2015, no. 11, pp. 68–77. DOI 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77*

[14] Dimitrienko Yu.I, Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu., Karimov S.B. *Modelirovanie neszhimaemyh sloistyh kompozitov s konechnymi deformaciyami na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya* [Modeling of incompressible layered composites with finite deformations based on the asymptotic averaging method]. Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2017, no. 1, pp. 32–54. DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

[15] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling the effective characteristics of transversely isotropic incompressible composites with finite strains. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 72–92.

[16] Dimitrienko Y.I., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2019, vol. 683, art no. 012006. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012006

[17] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2020, vol. 934, art no. 012012. DOI: 10.1088/1757-899X/934/1/012012

[18] Abodi J., Arnold S.M. Micromechanical modeling of the finite deformation of thermoelastic multiphase composites. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 75-99.

[19] Costa S., Fagerström M., Olsson R. Development and validation of a finite deformation fibre kinking model for crushing of composites. *Composites Science and Technology*, 2020, vol. 197, art. 108236.

[20] Qingsheng Yang, Fang Xu. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, pp. 284–288.

[21] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *Int. J. Multiscale Comput*, 2008, vol. 6 (2008), pp. 411–434.

[22] Bin Zhang, Xiaoming Yu, Boqin Gu. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polym Compos*, 2015. DOI: 10.1002/pc.23596

[23] Qi Ge, Xiaofan Luo, Christian B. Iversen, Hossein Birjandi Nejad, Patrick T. Mather, Martin L. Dunn, H. Jerry Qi. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. T. 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 2. Universal lows of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow. BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[26] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[27] Oden J. *Konechnye elementy v nelinejnoj mekhanike sploshnyh sred* [Finite elements in nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1976, 464 p.

[28] Certificate no. 2018614767 *Programma MultiScale_SMCM dlya mnogomasshtabnogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstrukcij iz kompozicionnyh materialov, na osnove metoda mnogourovnevoj asimptoticheskoj gomogenizacii i konechno-elementnogo resheniya trekhmernyh zadach teorii uprugosti* [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of

three-dimensional problems of elasticity theory]: certificate of ofic. registration of computer programs/ Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2018677684; application 21.02.2018; registered in the register of computer programs 17.04.2018 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Karimov S.B., Assistant Prof. of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Dimitrienko A.Yu., Postgraduate student Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru