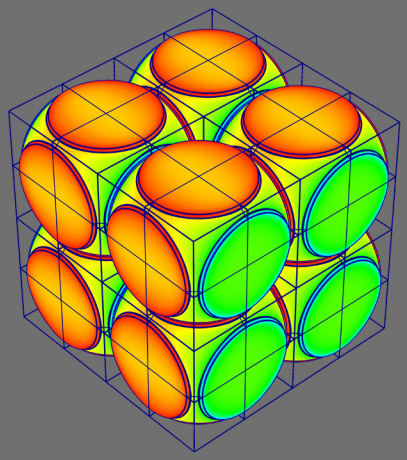
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Андрианов И.К., Чепурнова Е.К. Математическая модель условной оптимизации давления в системе обнаружения трещин лопаток газовых турбин. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 2, с. 3–16.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/337/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
28.01.2026 12:44:30

УДК 519.6, 621.4 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-2-316

Математическая модель условной оптимизации давления в системе обнаружения трещин лопаток газовых турбин

© И.К. Андрианов, Е.К. Чепурнова

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

В исследовании рассмотрена проблема оптимизации системы обнаружения трещин лопаток газовых турбин. В качестве объекта исследования рассмотрена оболочка капсулы системы обнаружения повреждений, находящаяся в контакте с телом лопатки и под действием внутреннего давления. Задача исследования была посвящена вопросу математического моделирования оптимального давления в капсулах системы обнаружения повреждений. В рамках решения проблемы исследования проведена математическая постановка задачи оптимизации нелинейной функции давления при наличии ограничений на варьируемые параметры: толщину стенки и наружный диаметр цилиндрической оболочки капсулы. Построение целевой функции оптимизации проводилось на основании условия равновесия элемента оболочки в области раскрытия трещины турбинной лопатки, критерия предельного состояния с использованием теории прочности Треска-Сен-Венана. Методика исследования строилась с использованием приближенного разложения функции напряжений в ряд Тейлора, применением метода множителей Лагранжа, теоремы Куна-Таккера. При решении задачи условной оптимизации проанализированы случаи нарушения условий регулярности ограничивающих функций. По результатам расчета минимальное значение требуемого давления для разрушения оболочки капсулы в случае раскрытия берегов трещины турбинной лопатки достигается при максимальном значении наружного диаметра оболочки и минимальной толщине ее стенки. По данным тестового расчета графически представлена область допустимых решений оптимизационной задачи, и показаны линии уровня целевой функции оптимизации давления. Построенная математическая модель и алгоритм позволят автоматизировать процесс расчета требуемого давления в капсулах системы обнаружения трещин лопаток турбин и получить оценку минимального значения давления при наличии ограничений на толщину стенки и наружный диаметр оболочки капсулы.

Ключевые слова: *нелинейное программирование, условная оптимизация, система обнаружения трещин, турбинная лопатка, оболочка, давление*

Введение. Современное развитие турбомашиностроения требует применения методов нелинейного программирования для решения различных оптимизационных задач. Исследование посвящено вопросу обнаружения трещин в лопатках газовых турбин. Авторами в работах [1-5] был предложен подход для диагностирования трещин в лопатках газовых турбин с помощью системы капсул, находящихся под действием внутреннего давления, которые помещаются в тело турбинной лопатки в продольном направлении (рис. 1). Согласно ра-

ботам [1-5] при развитии и раскрытии трещины турбинной лопатки вблизи оболочки капсулы за счет внутреннего давления должен произойти разрыв капсулы, и ионизирующее вещество, находящееся внутри капсулы, попадая в проточную часть турбины, регистрируется, что далее сигнализирует о наличие дефекта. В рамках решения данной проблемы предложены различные подходы для оценки предельного значения давления согласно трудам [6-8]. Однако нерешенным остается вопрос расчета оптимального давления при наличии ограничений на геометрические характеристики капсулы для обеспечения ее разрыва путем среза, который требует применения методов математического моделирования. Актуальность исследования обусловлена возможностью применения оптимизационной модели расчета давления для повышения эффективности работы системы обнаружения трещин лопаток газовых турбин.

Следует отметить, что задачи математического моделирования тепловой защиты лопаток турбин рассматривались в работе [9], вопросы параметризации и оптимизации конструкции лопаток турбин исследовались в трудах [10-13]. В процессе эксплуатации рабочие и сопловые лопатки газовых турбин находятся под воздействием силового и теплового нагружений, поэтому важным представляется вопрос моделирования напряженно-деформированного состояния оболочечных элементов, что отражено в работах [14,15]. Также немаловажными являются проблемы моделирования теплового состояния оболочек, которым посвящено исследование [16], вопросы оценки динамических характеристик, долговечности работы оболочечных элементов и проблема их усталостного разрушения, что отражено в работах [17-20]. Решение прикладных задач оптимизации требует применения математического инструментария, в работах [21,22] исследованы некоторые вопросы приближенной оптимизации в задачах нелинейного программирования, а также аспекты применения метода множителей Лагранжа для задач условной оптимизации.

Постановка задачи исследования. В рамках исследования требовалось построить математическую модель расчета минимального внутреннего давления p в капсуле системы обнаружения трещин в лопатках газовых турбин при наличии ограничений на геометрические характеристики капсулы. Рассмотрим цилиндрическую оболочку капсулы (рис.2), помещенную в тело турбинной лопатки с трещиной шириной Δz. На внутренней поверхности оболочки капсулы при $\rho = d/2 - \delta$ действует давление p. Наружные поверхности оболочки капсулы $\Omega_{cr}^{+}, \Omega_{cr}^{-}$ при $z > \Delta z/2,\ z < -\Delta z/2$, $\rho = d/2$ являются контактными с телом лопатки и принимаются свободными от перемещений. Наружная поверхность оболочки капсулы Ω_{cr} в области раскрытия трещины при $-\Delta z/2 \le z \le \Delta z/2$, $\rho = d/2$ свободна от нагру-

зок. Моделирование задачи условной оптимизации будем проводить при следующих допущениях и упрощениях:

– трещина турбинной лопатки распространяется перпендикулярно оси оболочки капсулы; ширина раскрытия берегов трещины Δz вблизи оболочки капсулы принимается заданной постоянной малой величиной;

– элемент оболочки капсулы (см. рис. 2), ограниченный плоскостями $z = \Delta z/2,\ z = -\Delta z/2$ работает на срез, разрушение происходит в результате сдвига; напряженное состояние элемента оболочки капсулы $-\Delta z/2 \le z \le \Delta z/2$ в системе $0\rho\theta z$ определяется касательным напряжением $\sigma_{z\rho}$;

– в качестве критерия предельного состояния элемента оболочки капсулы используется теория прочности Треска-Сен-Венана.

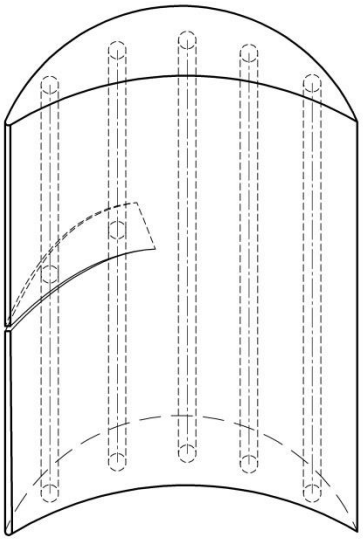


Рис. 1. Схема турбинной лопатки с системой капсул для обнаружения трещины

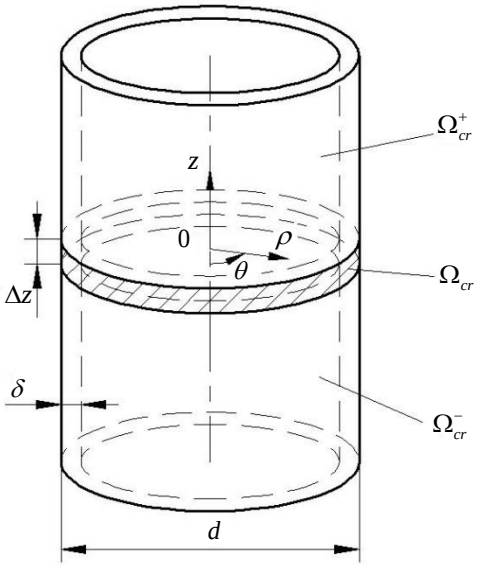


Рис. 2. Модель оболочечной капсулы системы обнаружения трещин

Таким образом, целевая функция оптимизации примет вид:

$$\min_{X \in D} p(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}^*),$$

где $\mathbf{X} = \{d; \delta\}$ — вектор варьируемых параметров, d — наружный диаметр оболочки, δ — толщина стенки оболочки, $\mathbf{X}^* = \{d^*; \delta^*\}$ — вектор оптимальных параметров, d^-, d^+ — нижняя и верхняя границы значений наружного диаметра оболочки, δ^-, δ^+ — нижняя и

верхняя границы допустимой толщины стенки оболочки, D — область допустимых решений:

$$D = \left\{ X \mid d^- \le d \le d^+, \delta^- \le \delta \le \delta^+, \delta/d \le \bar{\delta} < 0.5, d > 0, \delta > 0 \right\},$$

где $\bar{\delta}$ — заданная относительная толщина стенки оболочки.

Методика исследования. Рассмотрим элемент оболочки капсулы элемент высотой Δz в области раскрытия трещины турбинной лопатки (см.рис.2). Согласно принятым допущениям на торцах элемента действуют касательные напряжения $\sigma_{z\rho}(z)$ и $\sigma_{z\rho}(z+\Delta z)$, на внутренней поверхности оболочки при $\rho = d/2 - \delta$ действует давление *p*. Для сечений элемента, параллельных плоскости $\rho 0 \theta$, меняется координата *z*. Касательные напряжения в точке, отстоящей от нижнего торца на расстоянии Δz, могут быть представлены с помощью ряда Тейлора с точностью до бесконечно малых первого порядка:

$$\sigma_{z\rho}(z+\Delta z) = \sigma_{z\rho}(z) + \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} \Delta z .$$

Тогда условие равновесия выделенного элемента в проекции на радиальную координату ρ примет вид:

$$p\Delta z(d-2\delta) - 2\sigma_{z\rho}(d-\delta)\delta - (d-\delta)\delta \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} \Delta z = 0 . \qquad (1)$$

В виду более высокого порядка малости последним слагаемым в уравнении (1) можно пренебречь.

На основании теории прочности Треска-Сен-Венана, примем, что для достижения предельного состояния оболочки требуется выполнение условия: $2\sigma_{z\rho} = \sigma_s$, где σ_s — предел прочности материала оболочки. Тогда, используя соотношение (1) и приводя ограничения на варьируемые параметры к стандартному виду, представим математическую постановку задачи условной оптимизации в виде:

$$p(\mathbf{X}) = \sigma_s \left(1 + \frac{\delta}{d-2\delta} \right) \frac{\delta}{\Delta z} \to \min_{X \in D}, \qquad (2)$$

$$D = \left\{ \mathbf{X} \mid d - d^- \ge 0,\ d^+ - d \ge 0,\ \delta^+ - \delta \ge 0,\ \delta - \delta^- \ge 0,\ d\bar{\delta} - \delta \ge 0 \right\}, \qquad (3)$$

где $\bar{\delta} < 0.5,\ \delta^- > 0,\ \delta^+ > 0,\ d^- > 0,\ d^+ > 0,\ \delta^- \ne \delta^+,\ d^- \ne d^+$.

Ввиду нелинейности целевой функции (2) с ограничениями (3) будем рассматривать задачу нелинейного программирования. Для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа с применением теоремы Куна-Таккера.

Функция Лагранжа согласно (2), (3) примет вид

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_s\left(1+\frac{\delta}{d-2\delta}\right)\frac{\delta}{\Delta z} + \lambda_1\left(d-d^-\right) + \lambda_2\left(d^+-d\right) + \\ +\lambda_3\left(\delta^+-\delta\right) + \lambda_4\left(\delta-\delta^-\right) + \lambda_5\left(d\bar{\delta}-\delta\right), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}, i = \overline{1;5}$ — вектор множителей Лагранжа.

Определим градиенты функции Лагранжа (4):

$$\nabla_X L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_s}{\Delta z}\dfrac{(d-\delta)^2+\delta^2}{(d-2\delta)^2} - \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 \\ -\dfrac{\sigma_s}{\Delta z}\dfrac{\delta^2}{(d-2\delta)^2} + \lambda_1 - \lambda_2 + \bar{\delta}\lambda_5 \end{pmatrix}.$$

На основании необходимого условия минимума функции Лагранжа $\nabla_X L\left(\mathbf{X}^*,\boldsymbol{\lambda}\right) = 0$ перейдем к системе:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{(d-\delta)^2+\delta^2}{(d-2\delta)^2} - \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ &-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\delta^2}{(d-2\delta)^2} + \lambda_1 - \lambda_2 + \bar{\delta}\lambda_5 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Рассмотрим решение системы (5) при условии, что ограничения (3) являются неактивными. Примем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, тогда учитывая, что

$$\frac{(d-\delta)^2+\delta^2}{(d-2\delta)^2} > 0, \quad \frac{\delta^2}{(d-2\delta)^2} > 0, \tag{6}$$

приходим к выводу, что функция (4) не имеет стационарных точек внутри области D.

Следует отметить, что при относительных толщинах:

$$\bar{\delta} = \delta^+/d^-, \ \bar{\delta} = \delta^+/d^+, \ \bar{\delta} = \delta^-/d^+, \ \bar{\delta} = \delta^-/d^-, \tag{7}$$

в точках: $\left(d^-;\delta^+\right)$, $\left(d^+;\delta^+\right)$, $\left(d^+;\delta^-\right)$, $\left(d^-;\delta^-\right)$ — нарушается условие регулярности ограничивающих функций, поскольку в этом случае количество ограничивающих функций превышает размерность вектора варьируемых параметров.

Рассмотрим решение системы (5) при активных ограничениях (3), исключая точки в которых нарушаются условия регулярности ограничивающих функций (7). Пусть активным является ограничение $d-d^- \geq 0$, тогда примем, что $d-d^- = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, то-

гда система (5) ввиду условий (6) не имеет решения. Аналогично, если активным является только одно из ограничений (3) система (5) ввиду условия (6) не будет иметь решения. В остальных случаях:

– при активных ограничениях: $d-d^{-}\geq 0$, $\delta-\delta^{-}\geq 0$, примем, что $d-d^{-}=0$, $\delta-\delta^{-}=0$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_5=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{-};\delta^{+}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_1=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(\delta^{-}\right)^2}{\left(d^{-}-2\delta^{-}\right)^2},\ \lambda_4=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(d^{-}-\delta^{-}\right)^2+\left(\delta^{-}\right)^2}{\left(d^{-}-2\delta^{-}\right)^2}. \tag{8}$$

– при активных ограничениях: $d-d^{-}\geq 0$, $\delta^{+}-\delta\geq 0$, примем, что $d-d^{-}=0$, $\delta^{+}-\delta=0$, $\lambda_2=\lambda_4=\lambda_5=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{-};\delta^{+}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_1=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(\delta^{+}\right)^2}{\left(d^{-}-2\delta^{+}\right)^2},\ \lambda_3=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(d^{-}-\delta^{+}\right)^2+\left(\delta^{+}\right)^2}{\left(d^{-}-2\delta^{+}\right)^2}. \tag{9}$$

– при активных ограничениях: $d^{+}-d\geq 0$, $\delta-\delta^{-}\geq 0$, примем, что $d^{+}-d=0$, $\delta-\delta^{-}=0$, $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{+};\delta^{-}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_2=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(\delta^{-}\right)^2}{\left(d^{+}-2\delta^{-}\right)^2},\ \lambda_4=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(d^{+}-\delta^{-}\right)^2+\left(\delta^{-}\right)^2}{\left(d^{+}-2\delta^{-}\right)^2}. \tag{10}$$

– при активных ограничениях: $d^{+}-d\geq 0$, $\delta^{+}-\delta\geq 0$, примем, что $d^{+}-d=0$, $\delta^{+}-\delta=0$, $\lambda_1=\lambda_4=\lambda_5=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{+};\delta^{+}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_2=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(\delta^{+}\right)^2}{\left(d^{+}-2\delta^{+}\right)^2},\ \lambda_3=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(d^{+}-\delta^{+}\right)^2+\left(\delta^{+}\right)^2}{\left(d^{+}-2\delta^{+}\right)^2}. \tag{11}$$

– при активных ограничениях: $d\overline{\delta}-\delta\geq 0$, $\delta-\delta^{-}\geq 0$, примем, что $d\overline{\delta}-\delta=0$, $\delta-\delta^{-}=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(\delta^{-}/\overline{\delta};\delta^{-}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_4=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{1-\overline{\delta}}{1-2\overline{\delta}},\ \lambda_5=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\overline{\delta}}{\left(1-2\overline{\delta}\right)^2}. \tag{12}$$

– при активных ограничениях: $d\bar{\delta}-\delta\geq 0$, $\delta^{+}-\delta\geq 0$, примем, что $d\bar{\delta}-\delta=0$, $\delta^{+}-\delta=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_4=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(\delta^{+}/\bar{\delta};\delta^{+}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_3=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{1-\bar{\delta}}{1-2\bar{\delta}},\ \ \lambda_5=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\bar{\delta}}{\left(1-2\bar{\delta}\right)^2}. \tag{13}$$

– при активных ограничениях: $d\bar{\delta}-\delta\geq 0$, $d-d^{-}\geq 0$, примем, что $d\bar{\delta}-\delta=0$, $d-d^{-}=0$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{-};\bar{\delta}d^{-}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_1=-\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(1-\bar{\delta}\right)\bar{\delta}}{1-2\bar{\delta}},\ \ \lambda_5=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{1-2\bar{\delta}\left(1-\bar{\delta}\right)}{\left(1-2\bar{\delta}\right)^2}. \tag{14}$$

– при активных ограничениях: $d\bar{\delta}-\delta\geq 0$, $d^{+}-d\geq 0$, примем, что $d\bar{\delta}-\delta=0$, $d^{+}-d=0$, $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0$, тогда стационарная точка имеет координаты $\left(d^{+};\bar{\delta}d^{+}\right)$, множители Лагранжа:

$$\lambda_2=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{\left(1-\bar{\delta}\right)\bar{\delta}}{1-2\bar{\delta}},\ \ \lambda_5=\frac{\sigma_s}{\Delta z}\frac{1-2\bar{\delta}\left(1-\bar{\delta}\right)}{\left(1-2\bar{\delta}\right)^2}. \tag{15}$$

Соответственно, минимальное значение целевой функции давления будет определяться из условия:

$$\begin{gathered} p\left(\mathbf{X}^{*}\right)=\min\left\{p_j\,|\left(d_j;\delta_j\right)\in p_j;\ \ p_k\,|\left(d_k;\delta_k\right)\in p_k\right\}, \\ j=\overline{1;n},\ \ k=\overline{n+1;m}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\left(d_j;\delta_j\right)$ — координаты стационарных точек согласно (8) – (15), $\left(d_k;\delta_k\right)$ — координаты точек, в которых нарушаются условия регулярности ограничивающих функций согласно (7).

При этом найденные значения варьируемых параметров $\mathbf{X}^{*}$, при которых целевая функция достигает минимальное значение, должны удовлетворять области допустимых решений согласно (3):

$$\begin{gathered} d^{*}-d^{-}\geq 0,\ \ d^{+}-d^{*}\geq 0,\ \ \delta^{+}-\delta^{*}\geq 0, \\ \delta^{*}-\delta^{-}\geq 0,\ \ d^{*}\bar{\delta}-\delta^{*}\geq 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, алгоритм решения оптимизационной задачи можно представить в виде:

1. Определение входных данных расчета:

$$d^+,\ d^-,\ \delta^+,\ \delta^-,\ \bar{\delta},\ \sigma_s,\ \Delta z.$$

2. Расчет варьируемых параметров, являющихся стационарными точками функции Лагранжа $\left(d_j;\delta_j\right)$, $j=\overline{1;n}$ согласно соотношениям (8) – (15).

3. Расчет варьируемых параметров $\left(d_k;\delta_k\right)$, $k=\overline{n+1;m}$, для которых нарушаются условия регулярности ограничивающих функций согласно (7).

4. Для найденных векторов варьируемых параметров в п.2 и п.3 проверка условий (17).

5. Расчет минимального значения целевой функции давления $p\left(\mathbf{X}^*\right)$ согласно (2) и (16) на основании варьируемых параметров, удовлетворяющих п.4.

Результаты исследования. Рассмотрим решение задачи условной оптимизации давления (2), (3) при следующих числовых данных: $\sigma_S=500$ МПа, $\Delta z=1$ мм, $d^+=10$ мм, $d^-=4.2$ мм, $\delta^+=2$ мм, $\delta^-=0.1$ мм, $\bar{\delta}=1/7$. Расчет проводился в математическом пакете MathCad 15. Графическое изображение результатов расчета давления внутри оболочки капсулы для указанных числовых данных представлено на рис. 3.

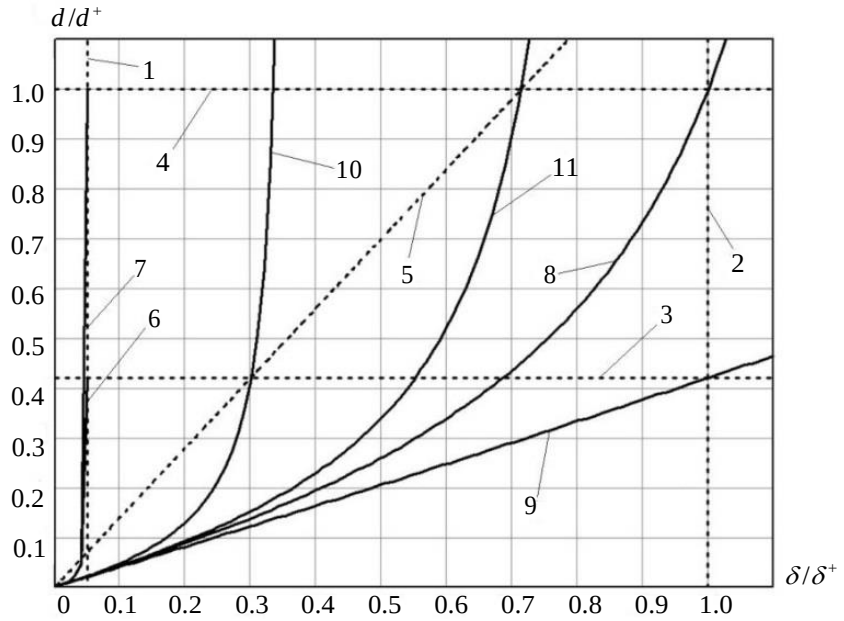


Рис. 3. Линии уровня целевой функции оптимизации

$1-\ \delta=\delta^-$, $2-\ \delta=\delta^+$, $3-\ d=d^-$, $4-\ d=d^+$, $5-\ d=\delta/\bar{\delta}$,

$6-\ p_1\,|\left(d^-;\delta^-\right)\in p_1$, $7-\ p_2\,|\left(d^+;\delta^-\right)\in p_2$, $8-\ p_3\,|\left(d^+;\delta^+\right)\in p_3$,

$9-\ p_4\,|\left(d^-;\delta^+\right)\in p_4$, $10-\ p_5\,|\left(\delta^-/\bar{\delta};\delta^-\right)\in p_5$, $11-\ p_6\,|\left(d^+;d^+\bar{\delta}\right)\in p_6$

Значения целевой функции в стационарных точках представим с использованием относительных величин: $p_1/\sigma_s = 0.103$ при $\left(d^-;\delta^-\right) \in p_1$; $p_2/\sigma_s = 0.101$ при $\left(d^+;\delta^-\right) \in p_2$; $p_3/\sigma_s = 2.667$ при $\left(d^+;\delta^+\right) \in p_3$, $\left(d^+;\delta^+\right) \notin D$; $p_4/\sigma_s = 22$ при $\left(d^-;\delta^+\right) \in p_4$, $\left(d^-;\delta^+\right) \notin D$; $p_5/\sigma_s = 0.720$ при $\left(\delta^-/\bar{\delta};\delta^-\right) \in p_5$; $p_6/\sigma_s = 1.714$ при $\left(d^+;d^+\bar{\delta}\right) \in p_6$.

Обсуждение результатов исследования. Согласно результатам расчета для указанных числовых данных условие регулярности ограничивающих функций выполняется. Наименьшее требуемое давление внутри оболочки капсулы для обеспечения разрыва достигается на границы области допустимых решений $p_2/\sigma_S = 0.101$ при активных ограничениях согласно (10), т.е. при геометрических характеристиках цилиндрической оболочки: наибольшем наружном диаметре и наименьшей толщине оболочки согласно принятым допущениям – $\mathbf{X}^* = \left\{d^+;\delta^-\right\}$.

Заключение. В рамках проведенного исследования решена задача нелинейного программирования для системы обнаружения трещин лопаток газовых турбин. Предложенная математическая модель учитывает ограничения на варьируемые параметры: толщину стенки оболочки и ее наружный диаметр, а также позволяет рассчитать минимальное значение внутреннего давления оболочки, при котором обеспечивается разрыв капсулы.

Научное исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10114 «Разработка системы диагностирования повреждений турбинных лопаток и способа оптимизации теплоотвода в условиях термической усталости» (https://rscf.ru/project/22-79-10114/).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гринкруг М.С., Мохамад К. Б., Новгородов Н. А. Система повышения безопасности авиационных газотурбинных двигателей во время эксплуатации. *Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению*: *Материалы II Международной научно-практической конференции молодых ученых, Комсомольск-на-Амуре*. *Часть 2*. Комсомольск-на-Амуре, ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022, с. 197-199.

[2] Mohamad, K.B., Grinkrug, M.S., Novgorodov, N.A., Tkacheva, J.I. Development of a system for detecting microcracks in turbine blades of aircraft engines. *AIP Conference Proceedings*, 2023, vol. 2700, art. 020027.

[3] Свидетельство № 2023610220 *Программа вычисления необходимого количества вещества для размещения в тонкостенных капсулах при создании системы обнаружения трещин в лопатках работающих газотурбинных*

двигателей: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ/ М. С. Гринкруг, Б. М. Кара, Н. А. Новгородов, Ю. И. Ткачева; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» — № 2023611350; заявл. 10.01.2023; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 19.01.2023 — [1].

[4] Мохамад К.Б., Гринкруг М.С. Технологическое исследование характеристик системы раннего обнаружения микротрещин в лопатке турбины двигателя. *Производственные технологии будущего: от создания к внедрению: Материалы V Международной научно-практической конференции*. Комсомольск-на-Амуре, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2022, с. 290-293.

[5] Кара Б.М., Гринкруг М.С., Ткачева Ю.И. Способ обнаружения микротрещин в лопатках работающих газотурбинных двигателей. *Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований*: *Материалы II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 4-х частях. Часть 3*. Комсомольск-на-Амуре, Комсомольск-на-Амуре, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2019, с. 237-240.

[6] Andrianov I., Kara Balli M., Grinkrug M., Novgorodov N. Finite Element Calculation of the Limiting Pressure for Rupture of Capsules with an Active Substance in the Crack Detection System of Gas Turbine Blades. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2023, no. 722, pp. 757–768.

[7] Andrianov I., Chepurnova E. Optimization Model of the Shell Capsules Geometry for a System for Diagnosing Damage to Gas Turbine Blades in Nonstationary. *International Journal of Mechanics*, 2023, no. 17, pp. 38–44.

[8] Andrianov I.K., Chepurnova E.K. Optimizing Crack Detection in Gas Turbine Blades Using Implanted Capsules of Ionizing Gas in Nonsteady Operation at Nonuniform Temperature. *Russian Engineering Research*, 2023, vol. 43, pp. 1361–1366.

[9] Андрианов И.К., Гринкруг М.С. Параметрическая идентификация математической модели теплообменного процесса для тонкостенных криволинейных оболочек турбомашин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 24-38.

[10] Dornberger R., Stoll P., Bueche D., Neu A.. Multidisciplinary turbomachinery blade design optimization. *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2000. URL: https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2000-838. DOI: 10.2514/6.2000-838.

[11] Agromayor, Roberto, Anand, Nitish, Mueller, Jens-Dominik, Pini, Matteo, Nord, Lars. A Unified Geometry Parametrization Method for Turbomachinery Blades. *Computer-Aided Design*, 2021, vol. 133, no. 3, art. 102987.

[12] Chen, Naixing, Zhang, Hongwu, Huang, Weiguang, Xu, Yanji. Study on Aerodynamic Design Optimization of Turbomachinery Blades. *Journal of Thermal Science*, 2005, vol. 14, no. 4, pp. 298-304.

[13] Zhang Xiao, Zheng M. Numerical Simulation of Fluid-Structure Coupling for a Multi-Blade Vertical-Axis Wind Turbine. *Applied Sciences*, 2023, vol. 13, no. 15, art. 8612.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 109-126.

[15] Mohammed, Mohammed, Sarraf, Ziad, Jamil, Sabah. Finite Element Simulation and Stress Analysis of Gas Turbine Blade Due to Centrifugal Force. *Interna-*

tional Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches, 2023, vol. 7, no. 6, pp. 250-255.

[16] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Коряков М. Н., Маремшаова А. А. Конечно-элементное моделирование температурных полей в тонкостенных многослойных анизотропных оболочках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 1, с. 43-63.

[17] Стратула Б. А. Математическое моделирование усталостного разрушения при высокочастотных изгибных колебаниях образцов из титановых сплавов. М*атематическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 45-57.

[18] Сонги П., Григорьев В.Г. Моделирование динамической устойчивости тонкостенных конструкций, частично заполненных жидкостью, при гидростатическом воздействии. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 3-17.

[19] Xiaodong Zhang, Yiwei Xiong, Xin Huang, Bochao Fan, Zhen Zhao, Jiahao Zhu. Dynamic Characteristics Analysis of 3D Blade Tip Clearance for Turbine Blades with Typical Cracks. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2022, vol. 6, pp. 1-17.

[20] Jaeger B.E., Schmid S., Grosse C.U., Gögelein A., Elischberger F. Infrared Thermal Imaging-Based Turbine Blade Crack Classification Using Deep Learning. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 2022, vol. 41, no. 4, art. 74.

[21] Ganicheva, Antonina, Ganichev, Alexey. (2022). Approximate method of optimization of nonlinear programming problems. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, vol. 4, pp. 9-25.

[22] Onuma, K., Sato, S. Existence results on Lagrange multiplier approach for gradient flows and application to optimization. 2023, J*apan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2024, vol. 41, pp. 165-189.

Статья поступила в редакцию 26.01.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Андрианов И.К., Чепурнова Е.К. Математическая модель условной оптимизации давления в системе обнаружения трещин лопаток газовых турбин. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 2, с. 3–16.

Андрианов Иван Константинович — канд. техн. наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru

Чепурнова Елена Константиновна — лаборант-исследователь, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. e-mail: el.chep@bk.ru

Mathematical model of conditional pressure optimization in the crack detection system of gas turbine blades

© I.K. Andrianov, E.K. Chepurnova

Komsomolsk-na-Amure State Technical University,
Komsomolsk-na-Amure, 681000, Russia

The study considers the problem of optimizing the crack detection system of gas turbine blades. The shell of the capsule of the damage detection system, which is under the influ-

ence of internal pressure, is considered as an object of research. The task of the study was devoted to the mathematical modeling of optimal pressure in capsules of the damage detection system. As part of solving the research problem, a mathematical formulation of the problem of optimizing the nonlinear pressure function was carried out in the presence of restrictions on variable parameters: wall thickness and outer diameter of the cylindrical capsule shell. The construction of the optimization objective function was carried out on the basis of the equilibrium condition of the shell element in the area of crack opening of the turbine blade, the limit state criterion using the Tresk-Saint-Venant strength theory. The research methodology was based on the approximate decomposition of the function into a Taylor series, the Lagrange multiplier method, and the Kuhn-Tucker theorem. When solving the problem of conditional optimization, the cases of violation of the regularity conditions of the limiting functions are analyzed. According to the calculation results, the minimum value of the required pressure for the destruction of the capsule shell in case of opening of the crack banks of the turbine blade is achieved at the maximum value of the outer diameter of the shell and the minimum thickness of its wall. According to the test calculation data, the area of acceptable solutions to the optimization problem is graphically presented, and the lines of the level of the target function of pressure optimization are shown. The constructed mathematical model and calculation algorithm will automate the process of calculating the required pressure in the capsules of the turbine blade crack detection system and obtain an estimate of the minimum pressure value in the presence of restrictions on the absolute and relative values of the capsule shell wall thickness, the outer diameter of the capsule.

***Keywords**: nonlinear programming, conditional optimization, crack detection system, turbine blade, shell, pressure*

REFERENCES

[1] Grinkrug M.S., Mohamad K. B., Novgorodov N. A. Sistema povysheniya bezopasnosti aviacionnyh gazoturbinnyh dvigatelej vo vremya ekspluatacii [System for increasing the safety of aviation gas turbine engines during operation]. *Nauka, innovacii i tekhnologii: ot idej k vnedreniyu: Materialy II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii molodyh uchenyh, Komsomol'sk-na-Amure. CHast' 2* [Science, innovation and technology: from ideas to implementation: materials of the II International Scientific and Practical Conference of Young Scientists, Komsomolsk-on-Amur. Part 2]. Komsomolsk-na-Amure, ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022, pp. 197-199.

[2] Mohamad, K.B., Grinkrug, M.S., Novgorodov, N.A., Tkacheva, J.I. Development of a system for detecting microcracks in turbine blades of aircraft engines. *AIP Conference Proceedings*, 2023, vol. 2700, art. 020027.

[3] Certificate no. № 2023610220 *Programma vychisleniya neobhodimogo kolichestva veshchestva dlya razmeshcheniya v tonkostennyh kapsulah pri sozdanii sistemy obnaruzheniya treshchin v lopatkah rabotayushchih gazoturbinnyh dvigatelej* [The program for calculating the required amount of substance for placement in thin-walled capsules when creating a system for detecting cracks in the shoulder blades of working gas turbine movements]: Certificate of state registration of a computer program / M. S. Grinkrih, B. M. Kara, N. A. Novgorodov, Yu. I. Tkachev; applicant Komsomolsk-na-Amure State Technical University — no. 2023611350; application 10.01.2023; registered in the register of computer programs 19.01.2023 — [1].

[4] Mohamad K.B., Grinkrug M.S. Tekhnologicheskoe issledovanie harakteristik sistemy rannego obnaruzheniya mikrotreshchin v lopatke turbiny dvigatelya

[Technological study of the characteristics of the early detection system of microcracks in the engine of the engine turbine]. *Proizvodstvennye tekhnologii budushchego: ot sozdaniya k vnedreniyu: Materialy V Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* [Production technologies of the future: from creation for implementation: Materials of V International Scientific and Practical Conference]. Komsomolsk-na-Amure, Komsomolsk-na-Amure State Technical University, 2022, pp. 290-293.

[5] Kara B.M., Grinkrug M.S., Tkacheva Yu.I. Sposob obnaruzheniya mikrotreshchin v lopatkah rabotayushchih gazoturbinnyh dvigatelej [Methods of detecting microcracks in the shoulder blades of operating gas turbine engines]. *Molodezh' i nauka: aktual'nye problemy fundamental'nyh i priklad-nyh issledovanij: Materialy II Vserossijskoj nacional'noj nauchnoj konferencii studentov, aspirantov i molodyh uchenyh. V 4-h chastyah. CHast' 3* [Youth and science: Actual problems of fundamental and applied research: Materials of the II All-Russian National Scientific Conference of Students, graduate students and young scientists. In 4 parts. Part 3]. Komsomolsk-na-Amure, Komsomolsk-na-Amure State Technical University, 2019, pp. 237-240.

[6] Andrianov I., Kara Balli M., Grinkrug M., Novgorodov N. Finite Element Calculation of the Limiting Pressure for Rupture of Capsules with an Active Substance in the Crack Detection System of Gas Turbine Blades. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2023, no. 722, pp. 757–768.

[7] Andrianov I., Chepurnova E. Optimization Model of the Shell Capsules Geometry for a System for Diagnosing Damage to Gas Turbine Blades in Nonstationary. *International Journal of Mechanics*, 2023, no. 17, pp. 38–44.

[8] Andrianov I.K., Chepurnova E.K. Optimizing Crack Detection in Gas Turbine Blades Using Implanted Capsules of Ionizing Gas in Nonsteady Operation at Nonuniform Temperature. *Russian Engineering Research*, 2023, vol. 43, pp. 1361–1366.

[9] Andrianov I.K., Гринкруг M.C. he parametric identification of the mathematical model of the heat-expanded process for thin -walled curvilineous membranes of turbines. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 24-38.

[10] Dornberger R., Stoll P., Bueche D., Neu A.. Multidisciplinary turbomachinery blade design optimization. *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2000. URL: https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2000-838. DOI: 10.2514/6.2000-838.

[11] Agromayor, Roberto, Anand, Nitish, Mueller, Jens-Dominik, Pini, Matteo, Nord, Lars. A Unified Geometry Parametrization Method for Turbomachinery Blades. *Computer-Aided Design*, 2021, vol. 133, no. 3, art. 102987.

[12] Chen, Naixing, Zhang, Hongwu, Huang, Weiguang, Xu, Yanji. Study on Aerodynamic Design Optimization of Turbomachinery Blades. *Journal of Thermal Science*, 2005, vol. 14, no. 4, pp. 298-304.

[13] Zhang Xiao, Zheng M. Numerical Simulation of Fluid-Structure Coupling for a Multi-Blade Vertical-Axis Wind Turbine. *Applied Sciences*, 2023, vol. 13, no. 15, art. 8612.

[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E. Thin composite cylindrical shells stress modeling based on the asymptotic theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 109-126.

[15] Mohammed, Mohammed, Sarraf, Ziad, Jamil, Sabah. Finite Element Simulation and Stress Analysis of Gas Turbine Blade Due to Centrifugal Force. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 2023, vol. 7, no. 6, pp. 250-255.

[16] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Koryakov M.N., Maremshaova A. A. Finite el-

ement modeling of temperature fields in thin-walled multilayer anisotropic shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2023, no. 1, pp. 43-63.

[17] Stratula B. A. Mathematical modeling of fatigue failure during high -frequency bending vibrations of titanium alloy specimens. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 45-57.

[18] Songyi P., Grigoryev V.G. Modeling of dynamic stability of thin-walled structures partially filled with liquid under hydrostatic action. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 3, pp. 3-17.

[19] Xiaodong Zhang, Yiwei Xiong, Xin Huang, Bochao Fan, Zhen Zhao, Jiahao Zhu. Dynamic Characteristics Analysis of 3D Blade Tip Clearance for Turbine Blades with Typical Cracks. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2022, vol. 6, pp. 1-17.

[20] Jaeger B.E., Schmid S., Grosse C.U., Gögelein A., Elischberger F. Infrared Thermal Imaging-Based Turbine Blade Crack Classification Using Deep Learning. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 2022, vol. 41, no. 4, art. 74.

[21] Ganicheva, Antonina, Ganichev, Alexey. (2022). Approximate method of optimization of nonlinear programming problems. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, vol. 4, pp. 9-25.

[22] Onuma, K., Sato, S. Existence results on Lagrange multiplier approach for gradient flows and application to optimization. 2023, J*apan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2024, vol. 41, pp. 165-189.

Andrianov I.K., Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor, Komsomolsk-na-Amure State Technical University. e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru

Chepurnova E.K., Research Assistant Abbreviation, Komsomolsk-na-Amure State Technical University. e-mail: el.chep@bk.ru