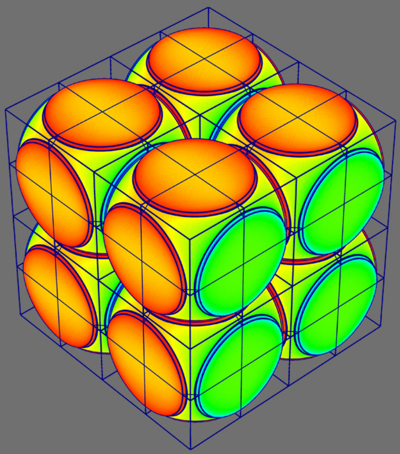
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 517.9 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-1-124142

Преобразования, редукции и точные решения широкого класса нестационарных уравнений с нелинейностью типа Монжа – Ампера

© А.Д. Полянин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

Рассматриваются достаточно общие нестационарные сильно нелинейные уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными, которые содержат первую производную по времени и квадратичную комбинацию вторых производных по пространственным переменным типа Монжа — Ампера (такие уравнения часто называют параболическими уравнениями Монжа — Ампера). Отдельные уравнения такого вида встречается в дифференциальной геометрии и электронной магнитной гидродинамике. В данной работе описаны многопараметрические преобразования, сохраняющие вид исследуемого класса нелинейных уравнений, который задается произвольной функцией. Рассмотрены также двумерные и одномерные редукции, приводящие к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Методами обобщенного разделения переменных построен ряд точных решений, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. Полученные результаты и точные решения могут быть использованы для оценки точности и анализа адекватности численных методов решения задач, описываемых сильно нелинейными уравнениями в частных производных.

Ключевые слова: *параболические уравнения Монжа — Ампера, сильно нелинейные уравнения с частными производными, одномерные и двумерные редукции, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, автомодельные решения*

Введение.

1°. Впервые конкретные нестационарные уравнения с нелинейностью типа Монжа — Ампера по пространственным переменным, по-видимому, появились в работе [1], в которой рассматривались обобщенные решения уравнений

$$u_t = \det[u_{x_i x_j}] - g(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

$$u_t \det[u_{x_i x_j}] = -g(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u$. Входящая в уравнения (1) и (2) матрица вторых производных $[u_{x_i x_j}]$ описывает локальную кривизну функции многих переменных и носит название матрицы Гессе. Определитель этой матрицы, т. е. $\det[u_{x_i x_j}]$, часто называют гессианом.

В случае двух пространственных переменных $x_1 = x$ и $x_2 = y$ в уравнениях (1) и (2) следует положить $\mathbf{x} = (x, y)$ и $\det[u_{x_i x_j}] = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$.

2°. В стационарном случае $u_t = g_t = 0$ при $n = 2$ уравнение (1) сводится к неоднородному уравнению Монжа — Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = -g(x, y). \tag{3}$$

Весьма полную информацию об этом уравнении и более сложных родственных стационарных уравнениях типа Монжа — Ампера, которые часто встречаются в дифференциальной геометрии, можно найти в книге [2]. В частных случаях при $g = 0$ (однородное уравнение Монжа — Ампера) и $g = a > 0$ общее решение уравнения (3) можно представить в параметрической форме [3, 4]. Различные преобразования и обширный список точных решений уравнений вида (3) приведены в [4-6].

Уравнение (3) является сильно нелинейным (квадратичным относительно старших производных) и имеет свойства, необычные для квазилинейных уравнений, которые линейны относительно старших производных. В частности, качественные особенности этого уравнения зависят от знака функции g, поскольку при $g > 0$ уравнение (3) является уравнением гиперболического типа, а при $g < 0$ — уравнением эллиптического типа [2, 4, 7]. Указанное обстоятельство значительно усложняет процедуру численного интегрирования подобных уравнений.

В [8-11] для численного интегрирования стационарных уравнений Монжа — Ампера (1) при $u_t = g_t = 0$ (для $n = 2$ и $n = 3$) использовались различные модификации метода установления по времени с использованием параболического уравнения Монжа — Ампера (1).

3°. Полагая в (1) $g \equiv 0$ и $n = 2$, приходим к сильно нелинейному нестационарному уравнению Монжа — Ампера

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \tag{4}$$

которое встречается в плазменной электронной магнитной гидродинамике [12-14].

В [15] были получены точные решения нестационарного уравнения (4) в виде произведения функций разных аргументов: $u = X(x)Y(y)T(t)$. В [16] описано одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения (4), а также двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа — Ампера, нестационарным уравнениям теплопроводности и уравнениям нелинейной теории фильтрации) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Кроме того, методами обобщенного разделения переменных в [16] были построены точные решения, многие из которых допускают представление в элементарных функциях.

4°. Параболические уравнения типа Монжа — Ампера вида (2) с различным числом пространственных переменных рассматривались во многих работах (см., например, [17-26]), в которых, в основном, исследовались вопросы существования и единственности решений для различных внутренних и внешних начально-краевых задач и задачи Коши, а также обсуждались геометрические приложения. В [20] было получено точное решение одной начально-краевой задачи с радиальной симметрией, которое описывалось уравнением (2) при $g(\mathbf{x},t)\equiv 1$; решение искалось в виде произведения $u=T(t)R(r)$, где r — радиальная координата.

Более общие, чем (1), параболические уравнения типа Монжа — Ампера, в которые входит суперпозиция степенной функции и гессеана, вида

$$u_t = (\det[u_{x_i x_j}])^k - g(\mathbf{x},t), \tag{5}$$

анализировались в работах [27-29]. В [30, 31] в левой части уравнения (5) при производной по времени добавлялся стационарный функциональный множитель $a(\mathbf{x})$.

В [32, 33] рассматривались параболические уравнения типа Монжа — Ампера

$$u_t = \log(\det[u_{x_i x_j}]) + g(\mathbf{x},t), \tag{6}$$

в которые входит суперпозиция логарифмической функции и гессеана.

В [34] исследовались сингулярные особенности решений широкого класса параболических уравнений с общей нелинейностью типа Монжа — Ампера

$$u_t = f(\det[u_{x_i x_j}]), \tag{7}$$

где $f(z)$ — достаточно произвольная функция. Были доказаны также некоторые теоремы о целых решениях таких уравнений.

Родственные параболические уравнения с нелинейностью типа Монжа — Ампера возникают также в теории оптимального управления (см., например, [35]). Отметим также, что в [36] изучались решения с обострением уравнения $u_t + u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = |u|^p\, u$, где $p>1$.

5°. В общем случае нестационарные уравнения с нелинейностью типа Монжа — Ампера с тремя независимыми переменными записываются так:

$$F(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 0, \tag{8}$$

где $F(\ldots)$ — некоторая функция восьми аргументов.

В данной работе будет анализироваться специальный класс уравнений вида (8), представленный в разрешенной относительно нелинейности Монжа — Ампера форме

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(u_t), \tag{9}$$

где $f(z)$ — достаточно произвольная функция. Уравнение (9) является существенным обобщением уравнения магнитной гидродинамики (4), а также уравнений (1), (2), (5), (6) при $n = 2$ и $g = \text{const}$.

6°. Методы построения решений математических уравнений, основанные на решениях более простых уравнений, обычно называются редукциями. Редукции играют ключевую роль для построения точных решений дифференциальных уравнений и обычно приводят к уравнениям более низкого порядка или уравнениям меньшей размерности. Наиболее важными для нелинейных уравнений с частными производными являются одномерные редукции, используя которые удается представить их решения в терминах решений гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В данной работе под точными решениями нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

(i) с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов,

(ii) через решения ОДУ или систем ОДУ.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности, верификации и разработки численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

Редукции и точные решения нелинейных уравнений с частными производными чаще всего строятся с использованием методов группового анализа [6, 37, 38], методов обобщенного и функционального разделения переменных [4, 39-42], метода дифференциальных связей [4, 39, 41-43] и некоторых других аналитических методов [4, 42, 44-49].

В данной работе для поиска точных решений нелинейного уравнения магнитной гидродинамики (9) использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных [4, 39-42] и приведенные в [4] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

Некоторые преобразования.

1°. Преобразование

$$\begin{aligned} &\bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad \bar{t} = kt + p, \\ &\bar{u} = ku + a_3 x + b_3 y + c_3, \quad k = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \neq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, p — произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (9) к уравнению точно такого же вида.

Десятипараметрическое инвариантное преобразование (10) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (9) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = \Phi(x, y, t)$ — решение уравнения (9), то функция

$$\begin{gathered} u = \frac{1}{k}\Phi(a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2, kt + p) + a_4 x + b_4 y + c_4, \\ k = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \neq 0, \end{gathered}$$

где $a_4 = -a_3/k$, $b_4 = -b_3/k$, $c_4 = -c_3/k$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2°. В полярных координатах r, φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, исходное уравнение (9) принимает вид

$$r^{-2} u_{rr}(u_{\phi\phi} + r u_r) - [(r^{-1} u_\phi)_r]^2 = f(u_t). \tag{11}$$

Это уравнение будет использовано далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

3°. В эллиптических координатах r, φ, где $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (a и b — положительные константы), уравнение (9) записывается так:

$$r^{-2} u_{rr}(u_{\phi\phi} + r u_r) - [(r^{-1} u_\phi)_r]^2 = (ab)^2 f(u_t). \tag{12}$$

4°. В гиперболических координатах ζ, ψ, где $x = a\zeta\psi$, $y = b\zeta\psi$ (a и b — ненулевые константы), уравнение (9) преобразуется к виду

$$\zeta^{-2} u_{\zeta\zeta}(u_{\psi\psi} + \zeta u_\zeta) - [(\zeta^{-1} u_\psi)_\zeta]^2 = -(ab)^2 f(u_t). \tag{13}$$

Видно, что уравнение (13) отличается от уравнения (12) только знаком правой части и очевидными переобозначениями.

Двумерные редукции, основанные на инвариантных преобразованиях.

1°. Переходя в (9) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi,\eta), \quad \xi = x + a_1 t, \quad \eta = y + a_2 t, \tag{14}$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа — Ампера

$$U_{\xi\eta}^2 - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} = f(a_1 U_\xi + a_2 U_\eta), \tag{15}$$

которое не зависит явно от новых переменных ξ и η.

2°. Переходя в (9) к переменным автомодельного типа

$$u = tU(\xi,\eta), \quad \xi = xt^\beta, \quad \eta = yt^{-\beta-1}, \tag{16}$$

где β — произвольная постоянная, получим двумерное уравнение типа Монжа — Ампера

$$U_{\xi\eta}^2 - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} = f(\beta\xi U_\xi - (\beta+1)\eta U_\eta + U), \tag{17}$$

которое явно зависит от новых переменных ξ и η.

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (16), взяв вместо второго аргумента произведение степеней обоих аргументов $\zeta = \xi^{\beta+1}\eta^\beta = x^{\beta+1}y^\beta$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = tU(\xi,\zeta), \quad \xi = xt^\beta, \quad \zeta = x^{\beta+1}y^\beta.$$

3°. Переходя в (9) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = U(\xi,\eta), \quad \xi = xe^{\beta t}, \quad \eta = ye^{-\beta t}, \tag{18}$$

где β — произвольная постоянная, получим другое двумерное уравнение типа Монжа — Ампера

$$U_{\xi\eta}^2 - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} = f(\beta\xi U_\xi - \beta\eta U_\eta). \tag{19}$$

которое явно зависит от новых переменных ξ и η.

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (18), взяв вместо второго аргумента произведение обоих аргументов $\zeta = \xi\eta = xy$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = U(\xi,\zeta), \quad \xi = xe^{\beta t}, \quad \zeta = xy.$$

Замечание 1. Более сложные двумерные редукции уравнения (9) можно получить, заменив в (14), (16), (18) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \Rightarrow a_1x + b_1y$ и $y \Rightarrow a_2x + b_2y$.

Редукции с аддитивным разделением переменных, приводящие к стационарным уравнениям Монжа — Ампера.

1°. Уравнение (9) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = At + w(x, y), \tag{20}$$

где A — произвольная постоянная, а функция w описывается стационарным неоднородным уравнением Монжа — Ампера с постоянной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = f(A). \tag{21}$$

2°. Нетрудно проверить, что уравнение (9) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (20), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1x^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}[f(A) + C_2^2]y^2 + C_4x + C_5y + At + C_6, \tag{22}$$

где A, C_1, …, C_5 ($C_1 \neq 0$) — произвольные постоянные.

3°. Используя результаты [4] можно получить, например, следующие точные решения вида (20) уравнения (9):

$$u = At \pm \frac{\sqrt{-f(A)}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \phi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y + C_5,$$

$$u = At + \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) + \frac{f(A)}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$u = At \pm \frac{2\sqrt{-f(A)}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, …, C_6 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

Замечание 2. При $f(A) < 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа — Ампера (21) можно представить в параметрическом виде [3, 4].

4°. Уравнение (9) допускает более сложные, чем (20), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (ax + by + c)t + w(x, y), \tag{23}$$

где a, b, c — произвольные постоянные, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа — Ампера с переменной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = f(ax+by+c). \tag{24}$$

При $b=0$ уравнение (24) имеет, например, следующие точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w = \pm y\int\sqrt{-f(ax+c)}\,dx + C_1y + \phi(x),$$

$$w = C_1y^2 + C_2xy + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 + \frac{1}{2C_1}\int_0^x (x-t)f(at+c)dt + C_3x + C_4y,$$

$$w = \frac{1}{x+C_1}(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}) + \frac{1}{2C_2}\int_0^x (x-t)(t+C_1)f(at+c)dt,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, …, C_4 — произвольные постоянные.

Редукция с аддитивным разделением переменных, приводящая к двумерному нестационарному уравнению.

1°. Уравнение (9) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \tfrac{1}{2}ax^2 + bxy + \tfrac{1}{2}cy^2 + dy + U(x,t), \tag{25}$$

где c, b, c, d — произвольные постоянные, а функция $U = U(x,t)$ описывается нелинейным уравнением

$$cU_{xx} = f(U_t) + b^2 - ac. \tag{26}$$

Для уравнения магнитной гидродинамики (4), что соответствует $f(z) = u$, уравнение (26) является линейным уравнением теплопроводности с постоянным источником.

Ниже описаны два инвариантных решения для наиболее общего случая нелинейного уравнения (26) с произвольной функцией $f(Z)$.

2°. В общем случае уравнение (26) имеет решения типа бегущей волны

$$U = U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$cU''_{zz} = f(\lambda U'_z) + b^2 - ac.$$

3°. Уравнение (26) допускает также автомодельные решения вида

$$U = tV(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $V(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$cV''_{\xi\xi} = f(V - \tfrac{1}{2}\xi V'_\xi) + b^2 - ac.$$

Редукция к стационарному уравнению Монжа — Ампера с использованием переменных типа бегущей волны.

1°. Уравнение (9) допускает решения с обобщенным разделением переменных комбинированного типа

$$\begin{gathered} u = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + C_6t + U(\xi,\eta), \\ \xi = a_1x + b_1y - \lambda_1 t, \quad \eta = a_2x + b_2y - \lambda_2 t, \end{gathered} \tag{27}$$

где C_i, a_j, b_j, λ_j ($i = 1,\ldots,6$; $j = 1,2$) — произвольные постоянные, ξ и η — новые переменные типа бегущей волны, а функция $U = U(\xi,\eta)$ описывается стационарным уравнением типа Монжа — Ампера

$$\begin{gathered} (a_1b_2 - b_1a_2)^2(U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2) + \\ +2(a_1^2C_3 + b_1^2C_1 - a_1b_1C_2)U_{\xi\xi} + 2(a_2^2C_3 + b_2^2C_1 - a_2b_2C_2)U_{\eta\eta} + \\ +2[(2a_1a_2C_3 + 2b_1b_2C_1 - (a_1b_2 + b_1a_2)C_2]U_{\xi\eta} + 4C_1C_3 - C_2^2 = \\ = f(C_6 - \lambda_1U_\xi - \lambda_2U_\eta). \end{gathered} \tag{28}$$

2°. Рассмотрим специальный случай (27)–(28), положив

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad a_2 = b_2 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \eta = t,$$

что соответствует решению вида

$$\begin{gathered} u = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + C_6t + U(\xi,t), \\ \xi = ax + by - \lambda t, \end{gathered} \tag{29}$$

где C_i, a, b, λ ($i = 1,\ldots,6$) — произвольные постоянные. В этом случае функция $U = U(\xi,t)$ описывается нелинейным уравнением

$$2(a^2C_3 + b^2C_1 - abC_2)U_{\xi\xi} = f(C_6 + U_t - \lambda U_\xi) - 4C_1C_3 + C_2^2. \tag{30}$$

3°. В частности, взяв в (29)–(30) функцию U с одним аргументом ξ, приходим к нелинейному ОДУ автономного вида

$$2(a^2C_3 + b^2C_1 - abC_2)U''_{\xi\xi} = f(C_6 - \lambda U'_\xi) - 4C_1C_3 + C_2^2.$$

Подстановка $W(\xi) = U'_\xi$ приводит его к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Редукция с использованием новой переменной, параболической по пространственным координатам.

1°. В переменных, одна из которых время, а другая задается параболической функцией по пространственным переменным

$$u = U(z,t), \quad z = y + ax^2, \tag{31}$$

где a — произвольная постоянная, уравнение (9) редуцируется к двумерному уравнению

$$2aU_z U_{zz} = f(U_t). \tag{32}$$

Ниже описаны три инвариантных решения для наиболее общего случая уравнения (32) с произвольной функцией $f(Z)$.

2°. Редуцированное уравнение (32) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = C_1 t \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{f(C_1)}{a}}(z + C_2)^{3/2} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (32) имеет решения типа бегущей волны

$$U = U(\xi), \quad \xi = z + \lambda t \equiv y + ax^2 + \lambda t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$2aU'_\xi U''_{\xi\xi} = f(\lambda U'_\xi).$$

4°. Более общее, чем в п. 3°, решение уравнения (32) можно получить, если искать решение в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z - \lambda t \equiv y + ax^2 - \lambda t.$$

5°. Уравнение (32) допускает также автомодельное решение вида

$$U = tV(\zeta), \quad \zeta = zt^{-2/3},$$

где функция $V(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2aV'_\zeta V''_{\zeta\zeta} = f(V - \tfrac{2}{3}\zeta V'_\zeta).$$

Замечание 3. Более общее, чем (9), сильно нелинейное нестационарное уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(u, u_t), \tag{33}$$

где $f(u, w)$ — произвольная функция двух переменных, также допускает точные решения вида (31).

Редукция общего вида с использованием новой переменной квадратичного вида по пространственным координатам.

1°. В переменных, одна из которых время, а другая квадратична относительно пространственных переменных,

$$u = U(z,t), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy, \tag{34}$$

где a, b, c, k, s — произвольные постоянные, уравнение (9) редуцируется к двумерному нестационарному уравнению

$$\begin{gathered} 2(Az+B)U_z U_{zz} + AU_z^2 = f(U_t); \\ A = 4ac - b^2, \quad B = as^2 + ck^2 - bks. \end{gathered} \tag{35}$$

Отметим, что в зависимости от коэффициентов квадратичных слагаемых a, b, c в (34), кривая $z = \mathrm{const}$ может быть эллипсом (при $A = 4ac - b^2 > 0$), гиперболой (при $A < 0$) или параболой (при $A = 0$).

Рассмотрим некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (35).

2°. Редуцированное уравнение (35) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = Ct + \zeta(z),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$2(Az+B)\zeta_z'\zeta_{zz}'' + A(\zeta_z')^2 = f(C),$$

которое легко интегрируется, поскольку допускает понижение порядка и одновременно линеаризуется с помощью подстановки $w(z) = (\zeta_z')^2$. В результате получим

$$\zeta = \pm\int [\frac{C_1}{Az+B} + \frac{f(C)}{A}]^{1/2} dz + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные (отметим, что интеграл правой части можно выразить через элементарные функции).

Замечание 4. Более общей результат можно получить, если искать решение уравнения (35) в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z - \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная.

3°. При $4ac - b^2 \neq 0$ редуцированное уравнение (35) допускает решения квазиавтомодельного вида

$$U = tV(\eta), \quad \eta = (Az+B)t^{-1}, \tag{36}$$

где β — произвольная постоянная, а функция $V = V(\eta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\eta V_\eta' V_{\eta\eta}'' + (V_\eta')^2 = A^{-3} f(V - \eta V_\eta'), \quad A = 4ac - b^2. \tag{37}$$

4°. При $4ac - b^2 \neq 0$ преобразование

$$t = t, \quad z = \frac{\sqrt{|A|}}{2}\rho^2 - \frac{B}{A}, \quad U = W(\rho, t),$$

приводит уравнение (35) к каноническому виду

$$\operatorname{sign} A \rho^{-1} W_\rho W_{\rho\rho} = f(W_t). \qquad (38)$$

Замечание 5. Более общее, чем (9), сильно нелинейное нестационарное уравнение (33) также допускает точные решения вида (34).

Редукции и точные решения в полярных, эллиптических и гиперболических координатах.

1°. Уравнение (11), записанное в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, допускает точные решения, не зависящие от угловой переменной, которые описываются двумерным уравнением

$$r^{-1} u_r u_{rr} = f(u_t). \qquad (39)$$

Это уравнение с точностью до переобозначения независимой переменной совпадает с уравнением (38) при $A > 0$ (два его наиболее общих точных решения описаны в пп. 2° и 3° из разд. 9).

2°. Уравнение (11), записанное в эллиптических координатах $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, допускает точные решения, не зависящие от угловой переменной, которые описываются двумерным уравнением

$$r^{-1} u_r u_{rr} = (ab)^2 f(u_t). \qquad (40)$$

Это уравнение с точностью до переобозначений независимой переменной и функции f совпадает с уравнением (38) при $A > 0$.

3°. Уравнение (11), записанное в гиперболических координатах $x = a\zeta\psi$, $y = b\zeta\psi$, допускает точные решения, не зависящие от переменной ψ, которые описываются двумерным уравнением

$$\zeta^{-1} u_\zeta u_{\zeta\zeta} = -(ab)^2 f(u_t). \qquad (41)$$

Это уравнение с точностью до переобозначений независимой переменной и функции f совпадает с уравнением (38) при $A < 0$.

4°. Поскольку уравнения (39), (40), (41) отличаются от (38) лишь описанными в выше переобозначениями, то некоторые их точные решения легко можно получить, используя результаты, приведенные в разд. 8.

Выводы.

Исследовано сильно нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(u_t),$$

где $f(z)$ — произвольная функция. Описано инвариантное десятипараметрическое преобразование, сохраняющие вид этого уравнения. Рассматрены двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа — Ампера) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получен ряд решений с обобщенным разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях, а также некоторые другие точные решения. Важно отметить, что уравнения рассматриваемого типа встречаются в дифференциальной геометрии и магнитной гидродинамике.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов Н.В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения. *Сибирский математический журнал*, 1976, Т. 17, № 2, с. 290–303.

[2] Погорелов А.В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*. Москва, Наука, 1969, 760 с.

[3] Гурса Э. *Курс математического анализа. Том 3. Часть 1*. Москва, Гостехиздат, 1933, 273 с.

[4] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Boca Raton: CRC Press, 2012, 1912 p.

[5] Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа—Ампера. *Математический сборник*, 1990, Т. 181, № 12, с. 1607–1622.

[6] Ibragimov N.H. *CRC handbook of lie group analysis of differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 444 p.

[7] Курант Р. *Уравнения с частными производными*. Москва, Мир, 1964, 832 с.

[8] Sulman M.M., Williams J.F., Russell R.D. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampere equation. *Applied Numerical Mathematics*, 2011, vol. 61, no. 3, pp. 298–307.

[9] Feng X., Lewis T. Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions. *Journal of Scientific Computing*, 2018, vol. 77, no. 3, pp. 1534–1565.

[10] Liu H., Glowinski R., Leung S., Qian J. A finite element/operator-splitting method for the numerical solution of the three dimensional Monge–Ampere equation. *Journal of Scientific Computing*, 2019, vol. 81, no. 3, pp. 2271–2302.

[11] Caboussat A., Gourzoulidis D., Picasso D. An adaptive method for the numerical solution of a 2D Monge–Ampere equation. *Proceedings of the 10th International Conference on Adaptative Modeling and Simulation (ADMOS)*, Barcelona, 2021, 8 p.

[12] Smirnov V.V., Chukbar K.V. “Phonons” in two-dimensional vortex lattices. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2001, vol. 93, no. 1, pp. 126–135.

[13] Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. *Plasma Physics Reports*, 2014, vol. 30, no. 3, pp. 214–217.

[14] Ohkitani K., Sultu F. Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013, vol. 46, no. 20, pp. 205501-1–19.

[15] Dubinov A.E., Kitayev I.N. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. *Magnetohydrodynamics*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 369–375.

[16] Полянин А.Д. Преобразования, редукции и точные решения одного сильно нелинейного уравнения электронной магнитной гидродинамики. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2023, Т. 12, № 4, с. 201-210.

[17] Spiliotis J. Certain results on a parabolic type Monge–Ampere equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, vol. 163, no. 2, pp. 484–511.

[18] Spiliotis J. A complex parabolic type Monge–Ampere equation. *Applied Mathematics & Optimization*, 1997, vol. 35, pp. 265–282.

[19] Chen L., Wang G., Lian S. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 186, no. 2, pp. 558–571.

[20] Dai L. Symmetry of solutions to parabolic Monge–Ampere equations. *Boundary Value Problems*, 2013, no. 185, art no. 2557.

[21] Tang L. Regularity results on the parabolic Monge–Ampere equation with VMO type data. *Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 255, no. 7, pp. 1646–1656.

[22] Dai L. Exterior problems of parabolic Monge–Ampere equations for n=2. *Computers & Mathematics with Applications*, 2014, vol. 67, no. 8, pp. 1497–1506.

[23] Zhang W., Bao J. A Calabi theorem for solutions to the parabolic Monge–Ampere equation with periodic data. *AIHPC*, 2018, vol. 35, no. 5, pp. 1143–1173.

[24] Zhang W., Bao J., Wang B. An extension of Jorgens–Calabi–Pogorelov theorem to parabolic Monge–Ampere equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2018, vol. 57, no. 3. DOI:10.1007/s00526-018-1363-5.

[25] Dai L., Bao J. Entire solutions of Cauchy problem for parabolic Monge–Ampere equations. *Advanced Nonlinear Studies*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 769–781.

[26] Dai L., Cheng H. The first initial-boundary value problem of parabolic Monge–Ampere equations outside a bowl-shaped domain. *Boundary Value Problems*, 2021, no. 29, art no. 1300.

[27] Ивочкина Н.М., Ладыженская О.А. О параболических уравнениях, порождаемых симметрическими функциями собственных значений Гессиана или главными кривизнами искомой поверхности. Часть I: Параболические уравнения Монжа–Ампера. *Алгебра и анализ*, 1994, Т. 6, № 3, с. 141–160.

[28] Wang J., Yang J., Liu X. The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge–Ampere equation. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 1, art no. 535629.

[29] Tang L. Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 259, pp. 6399–6431.

[30] Huang Q., Lu G. On a priori and estimates for a parabolic Monge–Ampere equation in the Gauss curvature flows. *American Journal of Mathematics*, 2006, vol. 128, no. 2, pp. 453–480.

[31] Loftin J., Tsui M.P. Ancient solutions of the affine normal flow. *Journal of Differential Geometry*, 2008, vol. 78, pp. 113–162.

[32] Dai L. Exterior problems for a parabolic Monge–Ampere equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2014, vol. 100, pp. 99–110.

[33] Wang B., Bao J. Asymptotic behavior on a kind of parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 259, pp. 344–370.

[34] Xiong J., Bao J. On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampere equations. *Journal of Differential Equations*, 2011, vol. 250, pp. 367–385.

[35] Karatzas I. Adaptive control of a diffusion to a goal and a parabolic Monge–Ampere-type equation. *The Asian Journal of Mathematics*, 1997, vol. 1, no. 2, pp. 295–313.

[36] Budd C.J., Galaktionov V.A. On self-similar blow-up in evolution equations of Monge–Ampere type. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 78, no. 2, pp. 338–378.

[37] Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York, Academic Press, 1982, 416 p.

[38] Olver P.J. *Application of Lie Groups to Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 2000, 501 p.

[39] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. Москва, Физматлит, 2005, 255 с.

[40] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact *Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.

[41] Полянин А.Д., Журов А.И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Москва, ИПМех РАН, 2020, 384 с.

[42] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton–London, CRC Press, 2022, 397 p.

[43] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*. Новосибирск, Наука. Сиб. отд-ние, 1984, с. 107-114.

[44] Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005, vol. 24, no. 5, pp. 1217–1231.

[45] Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопрудный, Интеллект, 2010, 364 с.

[46] Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 65–97.

[47] Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics,* 2021, vol. 9, iss. 4, art no. 345.

[48] Полянин А.Д., Аксенов А.В. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на

использовании более простых решений. *Теоретическая и математическая физика*, 2022, Т. 211, № 2, с. 149-180.

[49] Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton, CRC Press: Taylor & Francis Group, 2023, 434 с.

Статья поступила в редакцию 08.10.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Полянин А.Д. Преобразования, редукции и точные решения широкого класса нестационарных уравнений с нелинейностью типа Монжа – Ампера. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 1, с. 124–142.

Полянин Андрей Дмитриевич — д-ор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. e-mail: polyanin@ipmnet.ru.

Transformations, reductions and exact solutions of a wide class of nonstationary equations with nonlinearity of the Monge–Ampere type

© A.D. Polyanin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia

Rather general nonstationary strongly nonlinear partial differential equations with three independent variables are investigated, which contain the first time derivative and a quadratic combination of the second derivatives with respect to spatial variables of the Monge–Ampere type (such equations are often called parabolic Monge–Ampere equations). Some equations of this type are found in differential geometry and electron magnetohydrodynamics. This paper describes multiparameter transformations that preserve the form of the considered class of nonlinear equations, which is given by an arbitrary function. Two-dimensional and one-dimensional reductions leading to simpler partial differential equations with two independent variables or ordinary differential equations are also considered. Using methods of generalized separation of variables, a number of exact solutions have been constructed, many of which can be represented in elementary functions. The obtained results and exact solutions can be used to assess the accuracy and analyze the adequacy of numerical methods for solving problems described by strongly nonlinear partial differential equations.

Keywords: *parabolic Monge–Ampere equations, highly nonlinear partial differential equations, exact solutions, one-dimensional reductions, two-dimensional reductions, generalized separable solutions, self-similar solutions*

REFERENCES

[1] Krylov N.V. Sequence of convex functions and assessing the maximum of solving the parabolic equation. *Siberian Mathematical Journal*, 1976, vol. 17, no. 2, pp. 290–303.

[2] Pogorelov A.V. *External geometry of convex surfaces*. Moscow, Nauka Publishers, 1969, 760 p.

[3] Gursa E. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 3. CHast' 1* [The course of mathematical analysis. Volume 3. Part 1]. Moscow, Gostochizdat [Gostekhizdat], 1933, 273 p.

[4] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Boca Raton: CRC Press, 2012, 1912 p.

[5] Khabirov S.V. The unearthpical one -dimensional movements of the gas built using the contact group of the heterogeneous equation of Monge - Amper. *Sbornik: Mathematics*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1607–1622.

[6] Ibragimov N.H. *CRC handbook of lie group analysis of differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 444 p.

[7] Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Equations with private derivatives]. Moscow, Mir [World], 1964, 832 c.

[8] Sulman M.M., Williams J.F., Russell R.D. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampere equation. *Applied Numerical Mathematics*, 2011, vol. 61, no. 3, pp. 298–307.

[9] Feng X., Lewis T. Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions. *Journal of Scientific Computing*, 2018, vol. 77, no. 3, pp. 1534–1565.

[10] Liu H., Glowinski R., Leung S., Qian J. A finite element/operator-splitting method for the numerical solution of the three dimensional Monge–Ampere equation. *Journal of Scientific Computing*, 2019, vol. 81, no. 3, pp. 2271–2302.

[11] Caboussat A., Gourzoulidis D., Picasso D. An adaptive method for the numerical solution of a 2D Monge–Ampere equation. *Proceedings of the 10th International Conference on Adaptative Modeling and Simulation (ADMOS)*, Barcelona, 2021, 8 p.

[12] Smirnov V.V., Chukbar K.V. “Phonons” in two-dimensional vortex lattices. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2001, vol. 93, no. 1, pp. 126–135.

[13] Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. *Plasma Physics Reports*, 2014, vol. 30, no. 3, pp. 214–217.

[14] Ohkitani K., Sultu F. Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013, vol. 46, no. 20, pp. 205501-1–19.

[15] Dubinov A.E., Kitayev I.N. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. *Magnetohydrodynamics*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 369–375.

[16] Polyanin A.D. Preobrazovaniya, redukcii i tochnye resheniya odnogo sil'no nelinejnogo uravneniya elektronnoj magnitnoj gidrodinamiki [Transformations, reduction and accurate solutions of one very nonlinear equation of electronic magnetic hydrodynamics]. *Vestnik NIYAU «MIFI» [Bulletin of NIYAU "MIFI"]*, 2023, vol. 12, no. 4, pp. 201-210.

[17] Spiliotis J. Certain results on a parabolic type Monge–Ampere equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, vol. 163, no. 2, pp. 484–511.

[18] Spiliotis J. A complex parabolic type Monge–Ampere equation. *Applied Mathematics & Optimization*, 1997, vol. 35, pp. 265–282.

[19] Chen L., Wang G., Lian S. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 186, no. 2, pp. 558–571.

[20] Dai L. Symmetry of solutions to parabolic Monge–Ampere equations. *Boundary Value Problems*, 2013, no. 185, art no. 2557.

[21] Tang L. Regularity results on the parabolic Monge–Ampere equation with VMO type data. *Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 255, no. 7, pp. 1646–1656.

[22] Dai L. Exterior problems of parabolic Monge–Ampere equations for n=2. *Computers & Mathematics with Applications*, 2014, vol. 67, no. 8, pp. 1497–1506.

[23] Zhang W., Bao J. A Calabi theorem for solutions to the parabolic Monge–Ampere equation with periodic data. *AIHPC*, 2018, vol. 35, no. 5, pp. 1143–1173.

[24] Zhang W., Bao J., Wang B. An extension of Jorgens–Calabi–Pogorelov theorem to parabolic Monge–Ampere equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2018, vol. 57, no. 3. DOI:10.1007/s00526-018-1363-5.

[25] Dai L., Bao J. Entire solutions of Cauchy problem for parabolic Monge–Ampere equations. *Advanced Nonlinear Studies*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 769–781.

[26] Dai L., Cheng H. The first initial-boundary value problem of parabolic Monge–Ampere equations outside a bowl-shaped domain. *Boundary Value Problems*, 2021, no. 29, art no. 1300.

[27] Ivochkina N.M., Ladyzhenskaya O.A. About parabolic equations generated by symmetric functions of Gessiana's own meanings or the main curvights of the desired surface. Part I: parabolic equations of the Monge -Amper. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1994, vol. 6, no. 3, pp. 141–160.

[28] Wang J., Yang J., Liu X. The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge–Ampere equation. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 1, art no. 535629.

[29] Tang L. Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 259, pp. 6399–6431.

[30] Huang Q., Lu G. On a priori and estimates for a parabolic Monge–Ampere equation in the Gauss curvature flows. *American Journal of Mathematics*, 2006, vol. 128, no. 2, pp. 453–480.

[31] Loftin J., Tsui M.P. Ancient solutions of the affine normal flow. *Journal of Differential Geometry*, 2008, vol. 78, pp. 113–162.

[32] Dai L. Exterior problems for a parabolic Monge–Ampere equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2014, vol. 100, pp. 99–110.

[33] Wang B., Bao J. Asymptotic behavior on a kind of parabolic Monge–Ampere equation. *Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 259, pp. 344–370.

[34] Xiong J., Bao J. On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampere equations. *Journal of Differential Equations*, 2011, vol. 250, pp. 367–385.

[35] Karatzas I. Adaptive control of a diffusion to a goal and a parabolic Monge–Ampere-type equation. *The Asian Journal of Mathematics*, 1997, vol. 1, no. 2, pp. 295–313.

[36] Budd C.J., Galaktionov V.A. On self-similar blow-up in evolution equations of Monge–Ampere type. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 78, no. 2, pp. 338–378.

[37] Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York, Academic Press, 1982, 416 p.

[38] Olver P.J. *Application of Lie Groups to Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 2000, 501 p.

[39] Polyanin A.D., Zajcev V.F., ZHurov A.I. *Metody resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mekhaniki* [Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit [Fizatlite], 2005, 255 p.

[40] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact *Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.

[41] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Methods of separation of variables and accurate solutions of nonlinear equations of mathematical physics. Moscow, *IPMech RAS*, 2020, 384 p.

[42] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton–London, CRC Press, 2022, 397 p.

[43] Sidorov A.F., SHapeev V.P., YAnenko N.N. *Metod differencial'nyh svyazej i ego prilozheniya v gazovoj dinamike* [The method of differential connections and its appendices in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka. Sibirskoe otdelenie [Novosibirsk, Nauka. Sibirskoe OtDelenie], 1984, pp. 107-114.

[44] Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, vol. 24, no. 5, pp. 1217–1231.

[45] Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопрудный, Интеллект, 2010, 364 с.

[46] Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their use in mathematical physics. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 1, pp. 65–97.

[47] Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, vol. 9, iss. 4, art no. 345.

[48] Polyanin A.D., Aksenov A.V. Review of the methods for constructing accurate solutions of the equations of mathematical physics based on the use of simpler solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022, vol. 211, no. 2, pp. 149-180.

[49] Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton, CRC Press: Taylor & Francis Group, 2023, 434 с.

Polyanin A.D., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Chief Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. e-mail: polyanin@ipmnet.ru