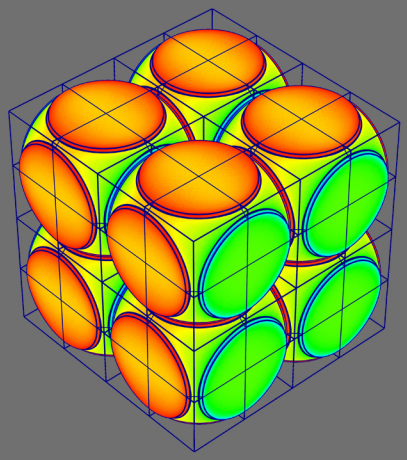
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Юрин Ю.В., Маремшаова А.А., Анохин Д. Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 1, с. 38–54.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/331/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:43

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-1-3854

Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций

© Ю.И. Димитриенко, И.О. Богданов, Ю.В. Юрин,
А.А. Маремшаова, Д.С. Анохин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача моделирования потери устойчивости конструкций из композиционных материалов вследствие нестационарных тепловых воздействий на них, с учетом температурной зависимости свойств компонентов композита. Сформулированы системы уравнений для расчета основного и варьированного состояний конструкции. Предложена классификация задач устойчивости. Описано применение метода конечных элементов для определения критической температуры и отвечающей ей формы потери устойчивости конструкции. Сформулирована локальная обобщенная задача на собственные значения и произведена верификация предложенной модели с помощью программного комплекса SMCM, разработанного в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также с помощью ПК ANSYS. Показано, что результаты расчета собственных форм и собственных значений в тестовой задаче достаточно хорошо совпадают.

Ключевые слова: *теория устойчивости, термоустойчивость, композиты, метод конечных элементов, собственные значения, собственные формы*

Введение. Расчет конструкций на устойчивость является одним из основных видов расчетов при проектировании ответственных конструкций. Методам расчета устойчивости конструкций, главным образом, аналитическим методам, посвящено большое число работ [1-11 и др.]. С появлением коммерческих программных пакетов, в которых реализованы конечно-элементные методы, широко стало применяться численное моделирование устойчивости конструкций [12,13]. При этом в этих пакетах есть возможность проводить расчеты устойчивости конструкций как в оболочечной постановке, так и в трехмерной постановке. Наиболее общий подход к выводу трехмерных уравнений теории устойчивости из уравнений геометрически нелинейной механики был разработан в [14-16]. Конечно-элементная реализация этой строгой постановки трехмерной задачи теории устойчивости реализована в [17], а в [18] представлены результаты расчетов по этой постановке.

Задача термоустойчивости конструкций заключается в определении критических значений тепловых воздействий на конструкцию, при которых происходит потеря устойчивости конструкции, обусловленное совместным воздействием механических и тепловых нагрузок.

Целью настоящей работы являлась разработка методики конечно-элементного решения задачи термоустойчивости

композитных конструкций, в рамках 3-х мерной точной постановки задачи, разработанной в работах [14-17].

Постановка математической задачи расчета термоустойчивости композитных конструкций. Следуя модели [16] рассмотрим два состояния конструкции: основное (устойчивое) и варьированное (неустойчивое).

Для определения основного состояние конструкции необходимо решить сопряженную задачу, которая состоит из задачи теплопроводности и задачи термоупругости.

3D задача нестационарной теплопроводности имеет следующий вид [16]:

$$\begin{gathered}\rho^0 c_v \frac{\partial \theta^0}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}^0, \\ \mathbf{q}^0 = -\mathbf{\Lambda} \cdot \nabla \theta^0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^0\big|_{\Sigma_q} = q_e, \quad \theta^0\big|_{\Sigma_\theta} = \lambda_2(\theta_e - \theta_0) + \theta_0, \quad t = 0:\ \theta^0 = \theta_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где θ^0 — температура, $\mathbf{q}^0$ — вектор теплового потока; ∇ — набла-оператор [19], $\cdot$ — знак скалярного умножения, ρ^0 и c_v — плотность и удельная теплоемкость композита; $\mathbf{\Lambda}$ — тензор теплопроводности композита, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, q_e — заданный тепловой поток на части поверхности $\sum_q$, θ_e — заданная температура на части поверхности Σ_θ, θ_0 — начальная температура, λ_2 — параметр задачи.

Здесь и далее индексом 0 обозначены величины, соответствующие основному состоянию.

Квазистатическая 3D задача линейной термоупругости имеет следующий вид [16]:

$$\begin{gathered}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \lambda_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}\right),\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0} = \boldsymbol{\alpha}\left(\theta - \theta_0\right), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u}^0 + \nabla \otimes \mathbf{u}^{0T}\right), \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0\big|_{\Sigma_\sigma} = \lambda_1 \mathbf{S}_e,\ \mathbf{u}^0\big|_{\Sigma_u} = \lambda_1 \mathbf{u}_e,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ — тензор малых деформаций; $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}$ — тензор тепловых деформаций; $\mathbf{u}^0$ — вектор перемещений; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор 4-го ранга модулей упругости; $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор теплового расширения; $\mathbf{S}_e$ и $\mathbf{u}_e$ — векторы внешних поверхностных сил и перемещений, соответственно; λ_1 — еще один параметр задачи.

Для композитной конструкции тензоры модулей упругости ${}^4\mathbf{C}$, теплового расширения $\boldsymbol{\alpha}$ и теплопроводности $\boldsymbol{\Lambda}$ задаются с учетом криволинейной анизотропии свойств композиционного материала, т.е. эти тензоры зависят от координат точек конструкции. Кроме того, эти свойства композита полагаются зависящими от температуры [20], т.е.

$$\Omega = \Omega(\theta, \mathbf{x}), \ \Omega = \{{}^4\mathbf{C}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Lambda}, c\}. \tag{3}$$

Общее решение системы задачи (2) является функцией от параметров λ_1 и λ_2

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0\left(\lambda_1, \lambda_2\right). \tag{4}$$

В силу линейности этой задачи зависимость (3) может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1^0 = \boldsymbol{\sigma}^0\left(1,0\right), \ \boldsymbol{\sigma}_2^0 = \boldsymbol{\sigma}^0\left(0,1\right), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0\left(1,0\right)$ — решение задачи (2) при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, а $\boldsymbol{\sigma}^0\left(0,1\right)$ — решение задачи (2) при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Третья задача — собственно задача теории термоустойчивости в общей 3D постановке — может быть записана в виде [16]:

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \left(\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}\right) = 0, \\
\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{w} + \nabla \otimes \mathbf{w}^T\right), \\
\mathbf{B} = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}, \ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\, {}^3\in \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}, \\
\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{w} - \nabla \otimes \mathbf{w}^T\right), \\
\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma} - \left(\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0\right) \cdot {}^3\in \cdot \boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \ \mathbf{w}\big|_{\Sigma_u} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; $\mathbf{w}$ — вектор перемещений в варьированном состоянии; ${}^3\in$ — тензор Леви-Чивиты [19].

Классификация задач устойчивости. Введение указанных параметров λ_1 и λ_2: позволяет дать классификацию задач устойчивости так, как показано на рис. 1.

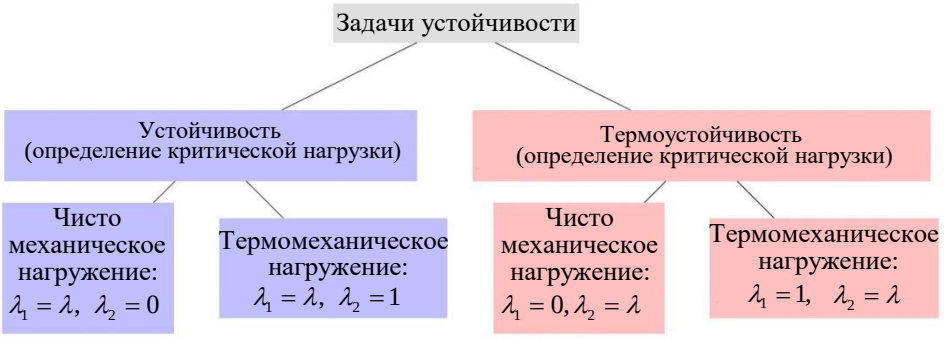


Рис. 1. Классификация задач устойчивости

В данной работе рассматривается задача термоустойчивости конструкции при чисто тепловом нагружении, т.е. полагается, что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda$, где λ — параметр задачи.

Алгоритм решения задачи термоустойчивости. Вначале решается задача (1) при $\lambda_2 = 1$ и некоторых значениях θ_e и q_e. Для простоты положим $q_e = 0$, в результате находим решение этой задачи, которое обозначим как $\theta^0(1)$. В силу линейности задачи (1) ее решение может быть представлено в виде

$$\theta^0(\lambda_2) - \theta_0 = \lambda_2(\theta^0(1) - \theta_0). \tag{8}$$

Далее решается задача (2) с известным температурным полем $\theta^0(1)$ при $\lambda_2 = 1$, в результате находим ее решение $\boldsymbol{\sigma}^0(0,1)$.

Подставляя поле тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0(0,1)$ в задачу (7), вычисляем систему собственных значений λ_2 и соответствующих им собственных функций $\mathbf{w}$ (собственных форм).

После нахождения собственного значения λ_2 по формуле аналогичной (8) находим критическое значение температуры потери устойчивости конструкции

$$\theta_e^* = \lambda_2(\theta_e - \theta_0) + \theta_0. \tag{9}$$

Конечно-элементный метод решения задачи термоустойчивости. Применяя алгоритм метода конечных элементов [21, 22] для постановки задачи (7), получаем обобщенную задачу на собственные значения в форме [16], ее локальная формулировка имеет вид:

$$\underset{12\times12}{[K]}\underset{12}{\{w\}} = \lambda \underset{12\times12}{[S]}\underset{12}{\{w\}}, \tag{10}$$

где введены обозначения:

$$\underset{12\times12}{[K]}=\int\limits_V \underset{12\times6}{[B_1]^T}\underset{6\times6}{[C]}\underset{6\times12}{[B_1]}dV,\ \underset{12\times12}{[S]}=\frac{1}{2}\int\limits_V \underset{12\times9}{[B_2]^T}\underset{9\times9}{[\tilde{\Sigma}_2^0]}\underset{9\times12}{[B_2]}dV,$$

$$\underset{9\times9}{[\tilde{\Sigma}_2^0]}=\frac{1}{2}\left(\underset{9\times9}{[\sigma_2^0]}\underset{9\times9}{[T']}+\underset{9\times9}{[T']}\underset{9\times9}{[\sigma_2^0]}\right),\ \underset{9\times9}{[T']}=\underset{9\times9}{[T]}-\underset{9\times9}{[E]}.$$

Здесь $\underset{9\times9}{[T]}$ — матрица транспонирования,

$$\underset{6\times12}{[B_1]}=\underset{6\times3}{[L_1]}\underset{3\times12}{[N]}\ \text{и}\ \underset{9\times12}{[B_2]}=\underset{9\times3}{[L_2]}\underset{3\times12}{[N]}$$

— матрицы производных функций формы, $\underset{3\times12}{[N]}$ — матрица функций формы, $\underset{6\times3}{[L_1]}$ и $\underset{9\times3}{[L_2]}$ — матрицы операторов дифференцирования, $\underset{9\times9}{[E]}$ — единичная матрица, $\underset{9\times9}{[\sigma_2^0]}$ — матрица компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}^0(0,1)$, $\underset{6\times6}{[C]}$ — матрица упругости.

Представленный конечно-элементный метод был реализован в отдельного программного модуля в составе ПК SMCM, разработанного в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана [23].

Результаты верификационного численного моделирования термоустойчивости композитной цилиндрической конструкции. В качестве верификации разработанного конечно-элементного метода и его программной реализации была рассмотрена задача численного моделирования термоустойчивости модельной цилиндрической конструкции из металло-керамического композиционного тканевого композиционного материала при внешнем нестационарном нагреве. Решение задачи осуществлялось с помощью разработанного модуля в составе ПК SMCM, а также с помощью ПК ANSYS, затем производилось сравнение результатов моделирования.

Для расчетов был выбран тканевый композиционный материал полотняного плетения, вид ячейки периодичности данного материала приведен на рис. 2.

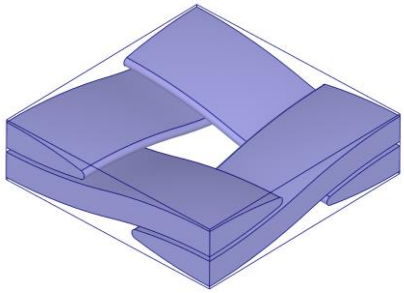


Рис. 2. Ячейка периодичности тканевого композита полотняного плетения (матрица не показана)

Матрица композита была выбрана титановой, а нити — керамическими на основе керамики SiC.

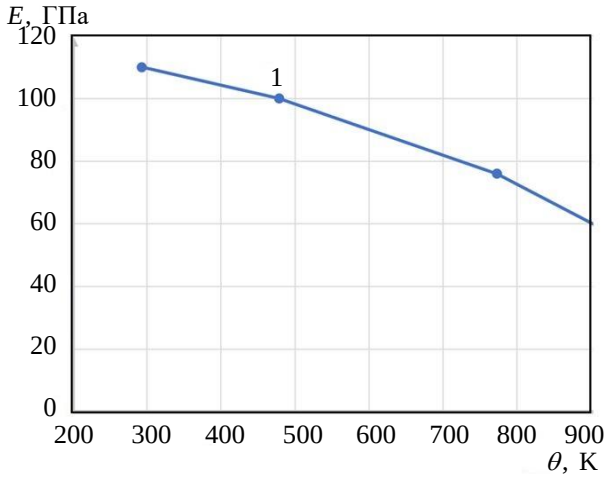
Термомеханические характеристики нитей и матрицы при нормальной температуре, использованные при расчетах эффективных характеристик тканевого композита, приведены в таблице 1.

Таблица 1

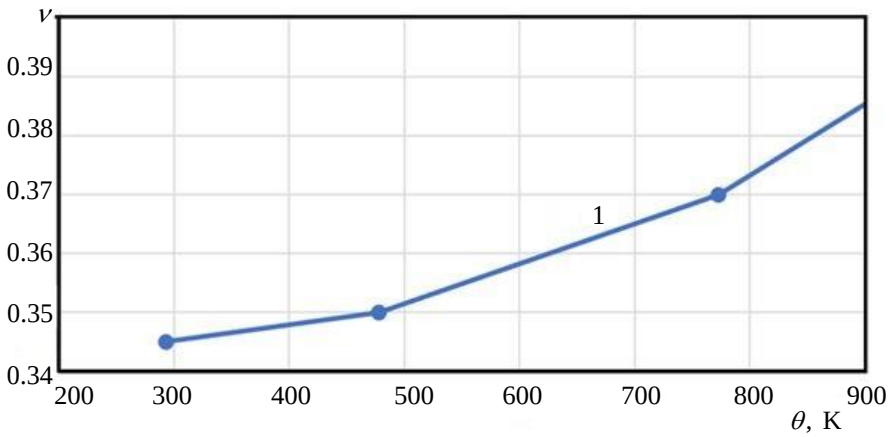
Термомеханические характеристики нитей SiC и металлической матрицы на основе Ti сплава [24], при нормальной температуре, использованные в расчетах

Характеристика	Нить SiC	Ti - матрица
Модуль упругости E, ГПа	392	110
Коэффициент Пуассона	0,25	0,345
Коэффициент теплового расширения, $10^{-6}К^{-1}$	4,2	9
Коэффициент теплопроводности $Вт/(м \cdot К)$,	30	16,76
Плотность, $кг/м^3$	4500	3200
Удельная теплоемкость, к $Дж/(кг \cdot К)$	0,76	0,54

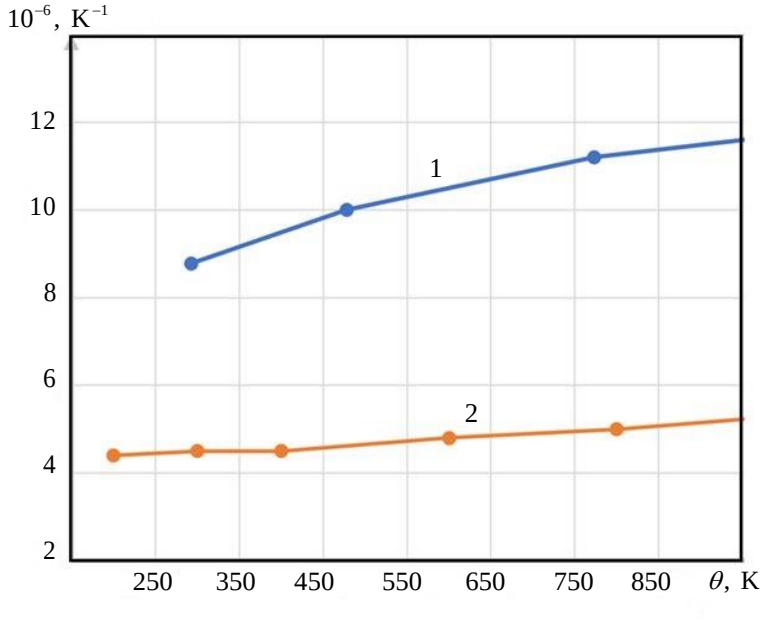
На рис. 3-5 показаны графики температурных зависимостей тех свойств матрицы и волокон, которые в расчетах полагались переменными. Данные взяты из [24]. Остальные характеристики матрицы и нитей полагались независящими от температуры.



а)



б)



в)

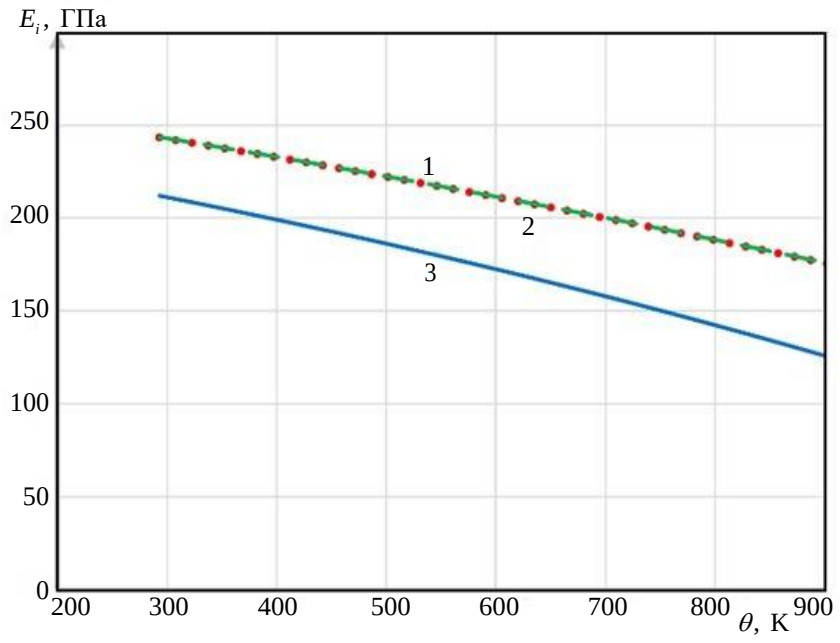
Рис. 3. Температурные зависимости:
а — модуля упругости; б — коэффициентов коэффициента Пуассона ν;
в — коэффициента теплового расширения Ti матрицы (цифра 1) и SiC нитей цифра (цифра 2)

С помощью моделей ПК SMCM для рассматриваемого композита были рассчитаны следующие свойства:

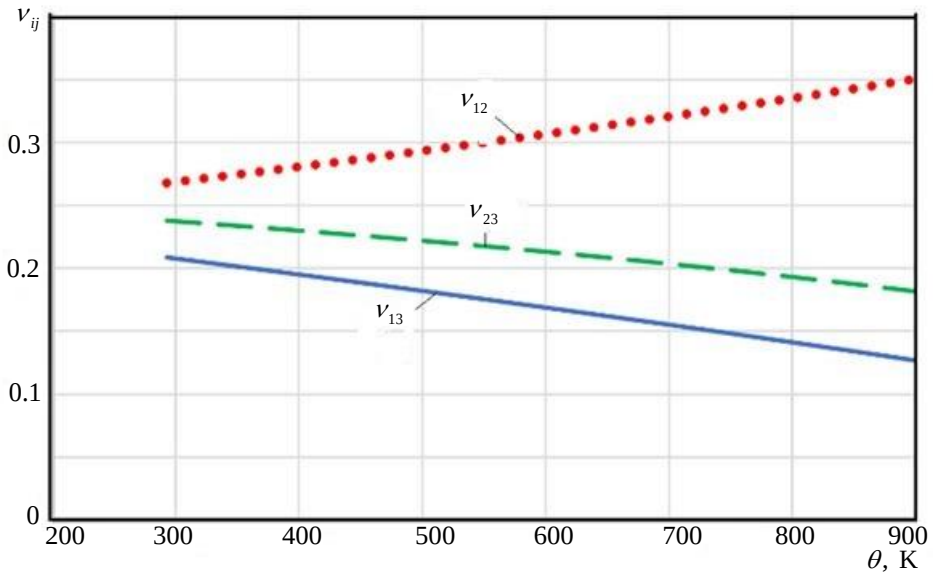
- плотность: 2815 $кг/м^3$;
- теплоемкость: 0,738 $кДж/(кг \cdot K)$;
- компоненты тензора теплопроводности, $Вт/(м \cdot K)$:

$$\lambda_1 = 6{,}356\,,\ \lambda_2 = 1{,}416\,,\ \lambda_3 = 6{,}356\,.$$

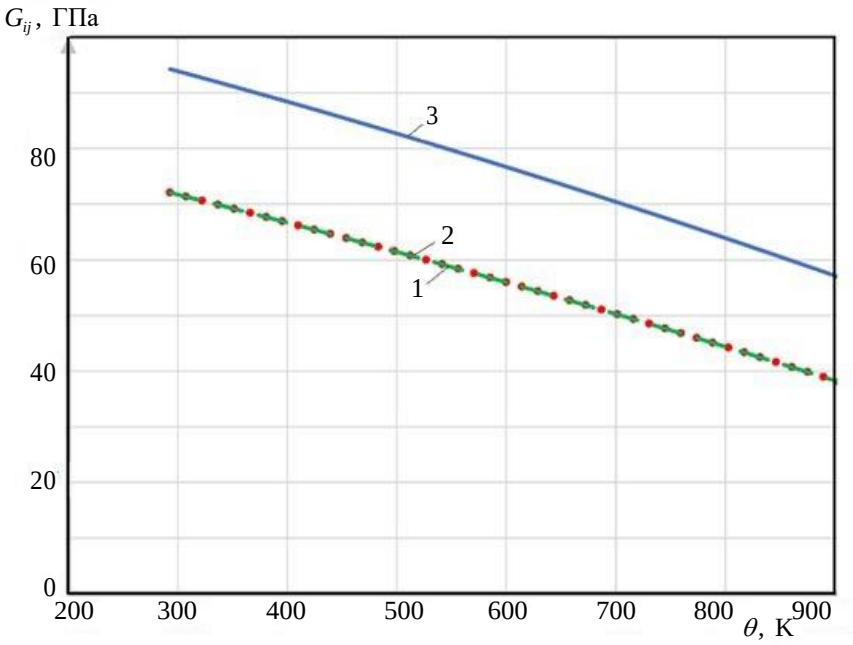
Были также рассчитаны температурные зависимости компонент тензора модулей упругости, тензора теплового расширения, тензора теплопроводности тканевого композита SiC/Ti . Графики некоторых из этих зависимостей показаны на рис. 4 и 5.



а)



б)



в)

Рис. 4. Рассчитанные температурные зависимости упругих характеристик тканевого композита SiC/Ti:
а — модуля упругости; б — коэффициентов коэффициента Пуассона ν;
в — модули сдвига, направление 3 — ортогонально слоям ткани, направления 1 и 2 — в плоскости слоев

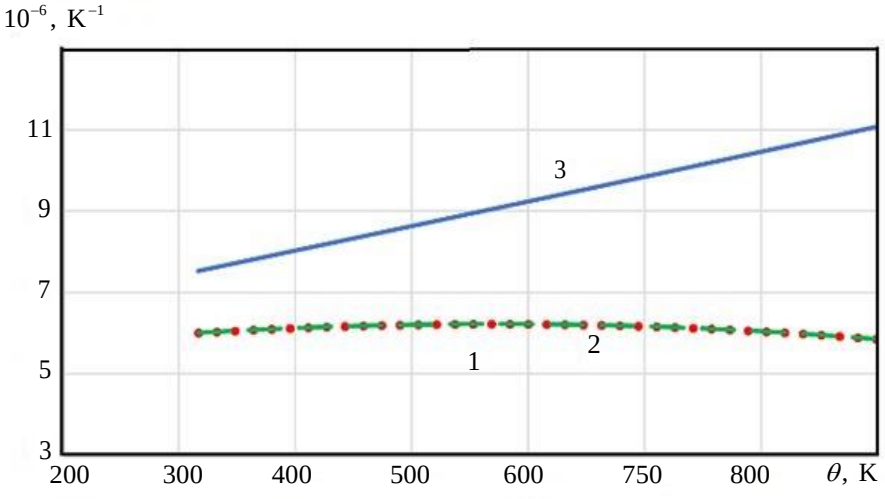


Рис. 5. Температурные зависимости
а — модуля упругости; б — коэффициентов коэффициента Пуассона ν;
в — коэффициента теплового расширения Ti матрицы (цифра 1) и SiC нитей цифра (цифра 2)

Моделирование термоустойчивости проводилось на примере композитного цилиндра с безразмерными параметрами: внешний радиус – 0,5; толщина стенки – 0,05; длина – 1. Композит в составе цилиндрической конструкции полагался криволинейно-ортотропным, локальные оси криволинейно изотропии были направлены по осям цилиндрической системы координат (рис. 6).

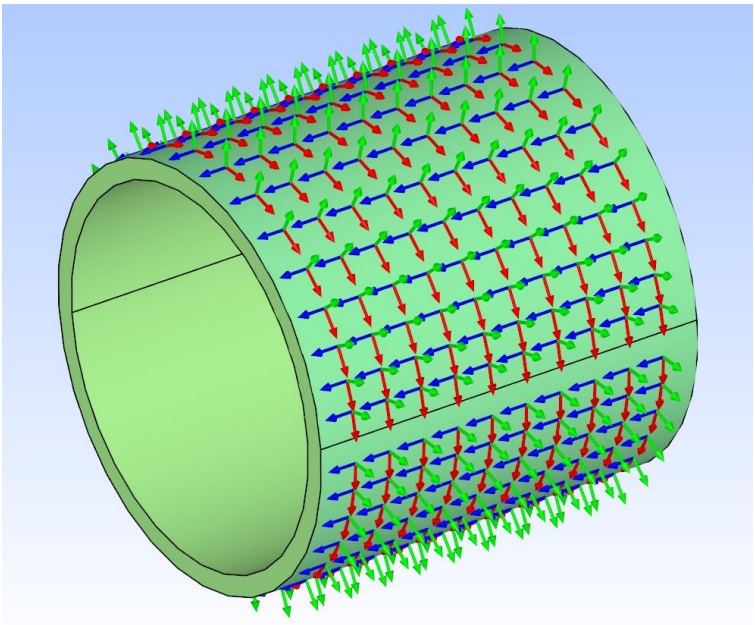


Рис. 6. Модель композитного цилиндра с заданными локальными осями криволинейной анизотропии в ПК SMCM

Торцы цилиндра полагались жестко закрепленными, на внешней поверхности была задана температура $\theta_e = 800$ K. Начальная температура составляла $\theta_0 = 300$ K, нагрев продолжался 300 с.

Рассчитывались первые три формы потери устойчивости на конечно-элементной сетке с параметрами: количество узлов – 78 307, количество КЭ – 377 413.

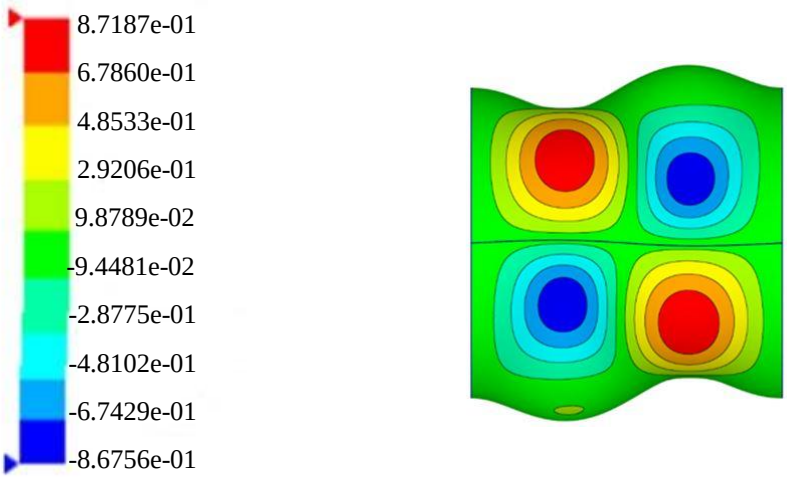
Результаты моделирования с помощью ПК SMCM сравнивались с результатами, полученными в ПК ANSYS для того же композиционного материала SiC/Ti , на одной и той же КЭ сетке. В таблице 2 приведены результаты сравнения собственных значений λ_2 задачи (7) для двух моментов времени t. Было установлено, что результаты этих 2-х вариантов расчетов хорошо совпадают, относительное отклонение не превышает 0,8 %.

На рис. 7-9 приведены поля первой, второй и третьей компоненты собственного вектора перемещений **w** для момента времени 300 с в сравнении с ПК «ANSYS».

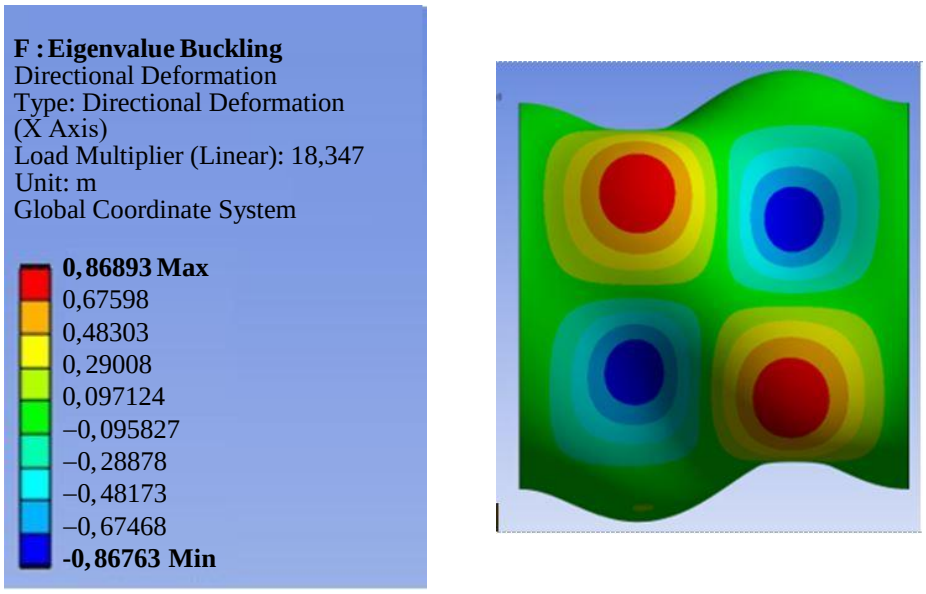
Таблица 2

Сравнение собственных значений λ_2 в задаче термоустойчивости цилиндрической конструкции, полученных в ПК «SMCM» и ПК «ANSYS»

Момент времени, с	ПК «SMCM»	ПК «ANSYS»	Относительная отклонение, %
150	22,316	22,381	0,292
300	22,324	22,389	0,288

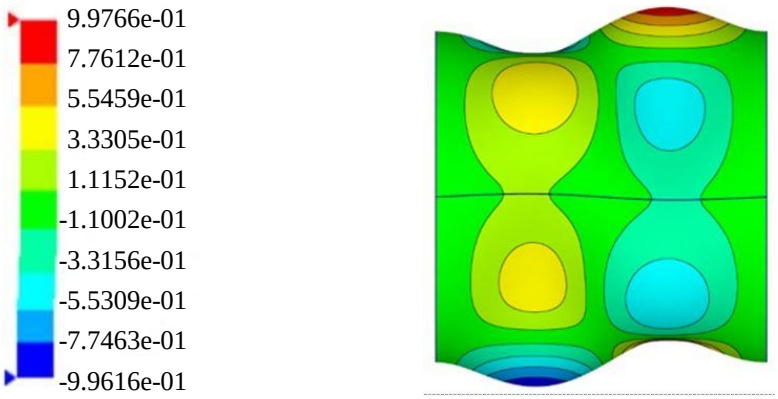


а)

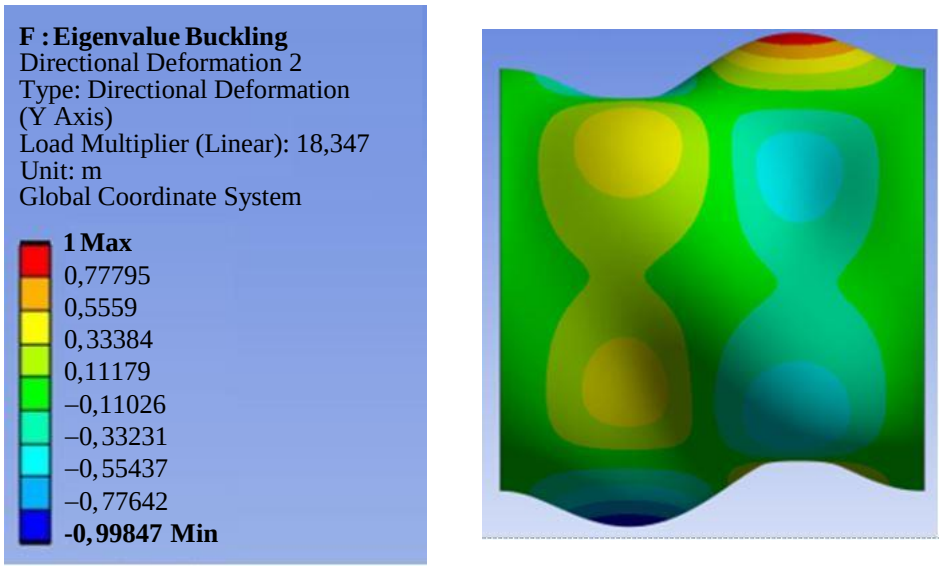


б)

Рис. 7. Сравнение распределений полей комоненты ω_1 первого собственного вектора $\boldsymbol{\omega}$ для момента времени 300 с
а — ПК «SMCM»; *б* — ПК «ANSYS»

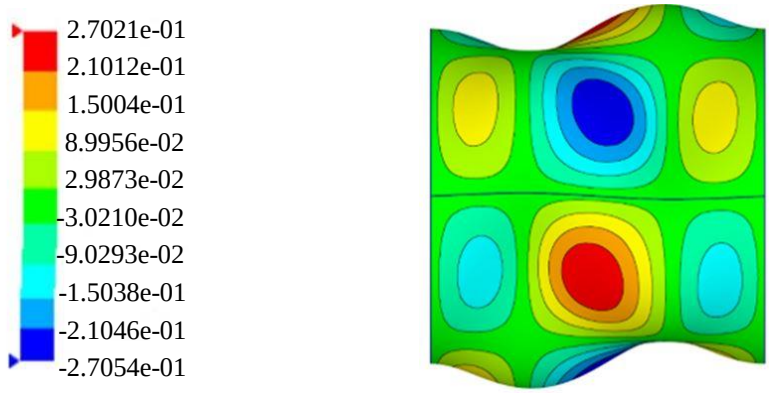


а)

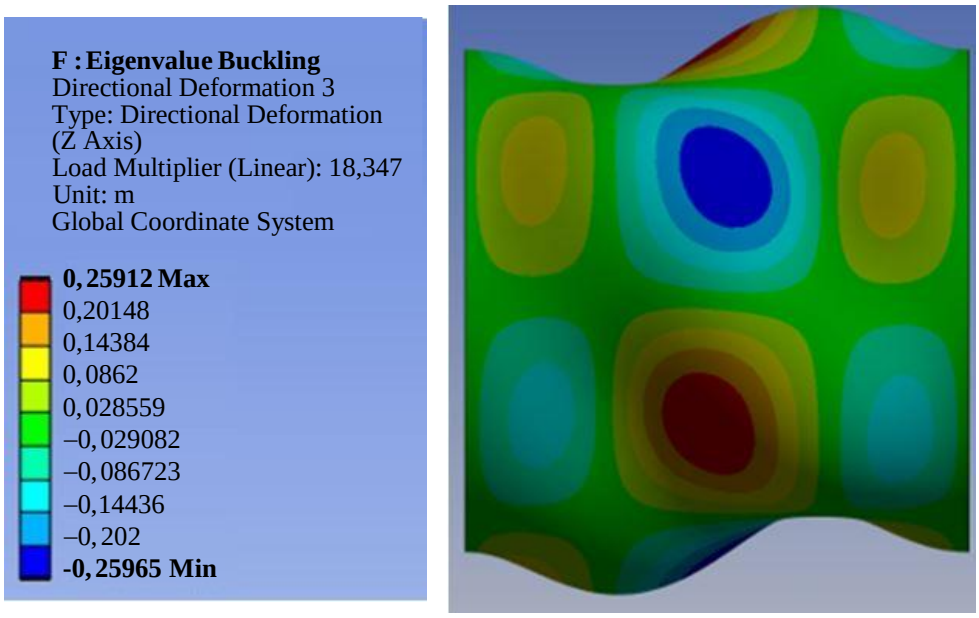


б)

Рис. 8. Сравнение распределений полей комоненты ω_2 первого собственного вектора $\boldsymbol{\omega}$ для момента времени 300 с
а — ПК «SMCM»; *б* — ПК «ANSYS»



а)



б)

Рис. 9. Сравнение распределений полей комоненты ω_3 первого собственного вектора $\boldsymbol{\omega}$ для момента времени 300 с
а — ПК «SMCM»; *б* — ПК «ANSYS»

Из анализа полученных распределений полей собственных форм, рассчитанных с помощью ПК «SMCM» и ПК «ANSYS», можно сделать вывод, что они также хорошо согласуются между собой.

Выводы. Предложена методика конечно-элементного расчета термоустойчивости композитных конструкций при нестационарном нагреве, с учетом температурного изменения свойств композита, в общей трехмерной постановке при учете анизотропии. Предложена классификация задач устойчивости. Численная реализация конечно-элементной модели осуществлена в виде специального программного модуля в составе программного комплекса SMCM [23]. Произведена верификация предложенной модели термоустойчивости на примере композитного цилиндра путем сравнения с результатами, полученными с помощью ПК Ansys. Сравнение показало хорошее согласование по собственным значениям и отвечающих им собственным формам потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Гостехтеоретиздат, 1961, 339 с.
[2] Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. New York/Toronto/London: McGraw-Hill, 1961, 356 p.

[3] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 964 с.

[4] Григолюк Э.И., Чулков П.П. *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*. Москва, Машиностроение, 1973, 215 с.

[5] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1978, 312 с.

[6] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы*. Москва, Наука, 1979, 384 с.

[7] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 271 с.

[8] Bazant Z.P., Cedolin L. *Stability of structures*. Oxford, Oxford University Press, 1990, 316 p.

[9] Ванько В.И. Очерки по теории устойчивости элементов конструкций. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 220 с.

[10] Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. Москва, *Физматлит*, 2014, 408 с.

[11] Гузь А.Н. *Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел*. Киев: Вища школа, 1986, 512 с.

[12] Kohnke P. *ANSYS. Theory references*. ANSYS, Inc., 1994, 1286 p.

[13] Abaqus. Theories_Manual. www.cadfamily.com

[14] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 1: конечные деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2013, № 4, с.79–95.

[15] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 2: малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2014, № 1, с. 17–26.

[16] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[17] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Конечно-элементный метод решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2016, № 6, с. 73-92.

[18] Dimitrienko Yu. I., Bogdanov I. O. Numerical simulation of the stability of three-dimensional elastic composite structures based on the finite element method. *IOP Conference Series: Material Science and Engeneering*, 2020, vol. 934, no. 012011. DOI:10.1088/1757-899X/934/1/012011

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

[20] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Конечно-элементное моделирование упругих свойств тканевых полимерных композитов при высоких температурах. *Математическое моделирование и численные методы*. 2020, № 1, с. 3–27

[21] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 542 с.

[22] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва, Мир, 1979, 392 с.

[23] Свидетельство № 2022682614 Программа Stability_3D_Manipula для конечно-элементного расчета устойчивости конструкций из полимерных композиционных материалов, с учетом криволинейной анизотропии: свидетельство о офиц. регистрации программы для ЭВМ

/Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В., Богданов И.О.; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2022682614; заявл. от 23.11.2022.

[24] http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/keramika-i-steklo/svojstva-karbida-kremniya-sic

Статья поступила в редакцию 15.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Юрин Ю.В., Маремшаова А.А., Анохин Д. Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 1, с. 38–54.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@mail.ru

Богданов Илья Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Маремшаова Анастасия Александровна — инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru

Анохин Даниил Сергеевич — инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: danokhin@bmstu.ru

Finite element modeling of non-stationary thermal buckling of composite structures

© Yu.I. Dimitrienko, I.O. Bogdanov, Yu.V. Yurin,
A.A. Maremshaova, D.S. Anokhin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of modeling for buckling analysis of the composite structures due to non-stationary thermal effects on them, taking into account the temperature dependence of the

properties of the composite components, is considered. Systems of equations are formulated for calculating the basic and varied states of the structure. A classification of buckling analysis problems is proposed. The application of the finite element method to determine the critical temperature and the corresponding buckling mode of a structure is described. A local generalized eigenvalue problem was formulated and the proposed model was verified using the SMCM software package developed at the Simplex Research Center of Bauman Moscow State Technical University. as well as using the ANSYS. It is shown that the results of calculating the eigenforms and eigenvalues in the test problem coincide quite well.

Keywords: *problem of buckling theory, thermal buckling, finite element method, critical temperature, eigenform*

REFERENCES

[1] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoj ustojchivosti [Nonconservative problems of the theory of elastic stability]*. Moscow, Gostekhteoretizdat Publ., 1961, 339 p.

[2] Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. New York/Toronto/London: McGraw-Hill, 1961, 356 p.

[3] Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 964 p.

[4] Grigolyuk EH.,I,. *Chulkov P.P. Ustojchivost i kolebaniya trekhslojnyh obolochek [Stability and fluctuations of three-layer covers]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973, 215 p.

[5] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh system [Fundamentals of stability calculations for elastic systems]*. Moscow, Mashinostroyenie Publ., 1978, 312 p.

[6] Panovko Y.A., Gubanova I.I. *Ustojchivost i kolebaniya uprugih sistem. Sovremennye koncepcii oshibki i paradoksy [Stability and fluctuations of elastic systems: Modern concepts, mistakes and paradoxes]*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 384 p.

[7] Vasil'ev V.V. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1984, 272 p.

[8] Bazant Z.P., Cedolin L. *Stability of structures*. Oxford, Oxford University Press, 1990, 316 p.

[9] Van'ko V.I. *Ocherki po teorii ustojchivosti ehlementov konstrukcij [Sketches according to the theory of stability of elements of designs.]*. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 220 p.

[10] Solomonov YU.S., Georgievskij V.P, Nedbaj A.YA., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnyh cilindricheskih obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical covers]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 408 p.

[11] Guz' A.N. *Osnovy trekhmernoj teorii ustojchivosti deformiruemyh tel [Bases of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies]*. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1986, 512 p.

[12] Kohnke P. *ANSYS. Theory references*. ANSYS, Inc., 1994, 1286 p.

[13] Abaqus. Theories_Manual. www.cadfamily.com

[14] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 3. theory of shell stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 2, pp. 77–89.

[15] Димитриенко Ю.И. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 2. Small deformations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 1, pp.17-26.

[16] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[17] Dimitrienko Yu. I., Bogdanov I. O. Finite element method for three-dimensional problems of elastic structures stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2016, iss. 6, pp.73-92.

[18] Dimitrienko Yu. I., Bogdanov I. O. Numerical simulation of the stability of three-dimensional elastic composite structures based on the finite element method. *IOP Conference Series: Material Science and Engeneering*, 2020, vol. 934, no. 012011. DOI:10.1088/1757-899X/934/1/012011

[19] Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Tensorniy Analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.

[20] Dimitrienko Y. I, Yurin Y. V., S V Sborschikov , Yakhnovskiy A. D., Baymurzin R. R. Finite element modeling of elastic properties of textile polymer composites at high temperatures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 3, pp. 22-46.

[21] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, 1967, 648 p.

[22] Segerlind L. *Applied Finite Element Analysis*. J.WILLEY and SONS. 1984, 392 p.

[23] Certificate no. 22022682614 *Programma Stability_3D_Manipula dlya konechno-elementnogo rascheta ustojchivosti konstrukcij iz polimernyh kompozicionnyh materialov, s uchetom krivolinejnoj anizotropii* [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of three-dimensional problems of elasticity theory] / Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin, I O Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 22022682614; application 23.11.2022.

[24] http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/keramika-i-steklo/svojstva-karbida-kremniya-sic

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@mail.ru

Bogdanov I.O., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Yurin Y.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Maremshaova A.A., engineer of the Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru

Anokhin D.S., engineer of the Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: danokhin@bmstu.ru