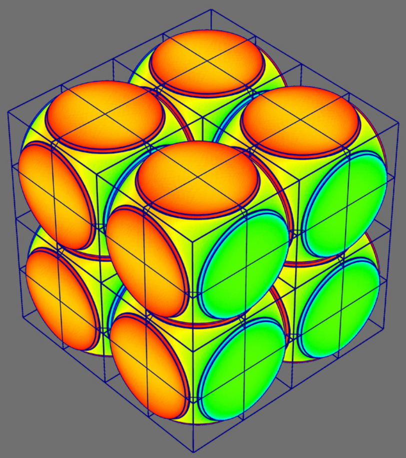
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 519.248

Сравнение прогрессивно цензурированных выборок — численные методы табулирования распределений статистик однородности и исследование оценки параметров связи их распределений методом Монте-Карло

© В.И. Тимонин, Н.Д. Тянникова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача оценки функций пересчета наработок до отказа с одного режима на другой. Данная задача возникает, например, когда имеются данные по наработкам изделий в стендовых испытаниях и требуется вычислить показатели надежности этих изделий в реальных условиях эксплуатации. Для простоты рассмотрен случай, когда наработки до отказа связаны линейным соотношением. Предложенный метод основан на минимизации статистики типа Колмогорова — Смирнова, применяемой для проверки однородности двух прогрессивно цензурированных выборок. Особенностью статистики является использование оценок Каплана — Мейера функции надежности по каждой выборке. В работе предложен метод вычисления точных распределений данной статистики при справедливости проверяемой гипотезы, которые в этом случае не зависят от вида функции распределения наработок до отказа элементов. Табулированы значения точных квантилей рассматриваемой статистики. Методами статистического моделирования показана состоятельность предложенной оценки для линейной функции связи.

Ключевые слова: *непараметрическая статистика, критерий типа Колмогорова — Смирнова, оценка Каплана — Мейера, прогрессивное цензурирование.*

Введение. Пусть имеется n_1 систем, состоящих из m_1 последовательно соединенных элементов, и n_2 систем, состоящих из m_2 последовательно соединенных аналогичных элементов. Предположим, что n_1 систем эксплуатируется в режиме ε_1, а n_2 систем — в режиме ε_2. Пусть ξ, η — наработки до отказа элементов в режимах ε_1, ε_2 соответственно. В теории надежности часто возникает задача оценки функции пересчета $\xi = \varphi(\eta)$, что используют в теории форсированных испытаний и определении ресурса. Эта задача рассмотрена, например, в [1–3].

При испытаниях последовательных систем при отказе одного из изделий в системе оставшиеся $(m_j - 1),\ j = 1, 2$, изделия цензурируются. Таким образом, по результатам испытаний двух групп систем имеются две прогрессивно цензурированные [4–7] выборки $\Theta_1 = \left(\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}\right), \Gamma_2 = \left(\gamma_2^1, ..., \gamma_2^{n_2}\right)$, где $\theta_1^i = \min\left\{\xi_1{}^i, \xi_2{}^i, ..., \xi_{m_1}{}^i\right\}, i = \overline{1, n_1}$, $\gamma_2^j = \min\left\{\eta_1{}^j, \eta_2{}^j, ..., \eta_{m_2}{}^j\right\}, j = \overline{1, n_2}$ − минимумы наработок до отказа элементов систем, работающих в режимах ε_1 и ε_2 соответственно. В дальнейшем для простоты будем считать, что пересчет осуществляют с помощью линейной функции $\xi = k\eta$, коэффициент пропорциональности k часто называют коэффициентом ускорения испытаний.

Предлагаемый метод оценки коэффициента ускорения основан на том факте, что если известен k, то цензурированные выборки $\Theta_1 = \left(\theta_1^1,...,\theta_1^{n_1}\right), \Theta_2 = \left(k\gamma_2^1,...,k\gamma_2^{n_2}\right)$ извлечены из одной и той же совокупности. Целью статьи является разработка критерия однородности двух прогрессивно цензурированных выборок и основанного на минимизации его статистики метода оценки k. Предлагаемый критерий является критерием типа Колмогорова — Смирнова [8–10], основанным на сравнении оценок Каплана — Мейера функции надежности [11, 12].

Критерий проверки однородности двух прогрессивно цензурированных выборок. Пусть $\Theta_1 = \left(\theta_1^1,...,\theta_1^{n_1}\right), \Theta_2 = \left(\theta_2^1,...,\theta_2^{n_2}\right)$ — две прогрессивно цензурированные выборки с элементами $\theta_1^i = \min\left\{\xi_1{}^i, \xi_2{}^i,...,\xi_{m_1}{}^i\right\}, i = \overline{1, n_1}$, $\theta_2^j = \min\left\{\xi_1{}^j, \xi_2{}^j,...,\xi_{m_2}{}^j\right\}, j = \overline{1, n_2}$. Здесь $\xi_1{}^i,...,\xi_{m_1}{}^i$ имеют функцию распределения $F_1(t)$, аналогично $\xi_1{}^j,...,\xi_{m_2}{}^j$ — функцию распределения $F_2(t)$. Проверяемая гипотеза однородности двух выборок имеет вид

$$H_0 : F_1(t) = F_2(t) = F_0(t). \tag{1}$$

Функция $F_0(t)$ неизвестна.

При справедливости гипотезы (1) функция надежности $P_0(t) = 1 - F_0(t)$ по выборкам Θ_1 и Θ_2 оценивается с помощью оценок Каплана — Мейера [11, 13]:

$$\widehat{P}_{\theta_1}(t) = \begin{cases} 1, \ d_1(t) = 0; \\ \prod\limits_{i=1}^{d_1(t)} \left(1 - \dfrac{1}{m_1(n_1 - i + 1)}\right), \ 1 \le d_1(t) \le (n_1 - 1); \\ 0, \ d_1(t) = n_1; \end{cases}$$

$$\widehat{P}_{\theta_2}(t) = \begin{cases} 1, \ d_2(t) = 0; \\ \prod\limits_{j=1}^{d_2(t)} \left(1 - \dfrac{1}{m_2(n_2 - j + 1)}\right), \ 1 \le d_2(t) \le (n_2 - 1); \\ 0, \ d_2(t) = n_2. \end{cases}$$

Здесь $d_1(t), d_2(t)$ — количество элементов выборок Θ_1 и Θ_2, меньших t.

Для проверки (1) предложена статистика типа Колмогорова — Смирнова [13–15] вида

$$T = \frac{m_1 m_2 \sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{\rho m_1^2 + m_2^2}} \max_t \frac{\left(k_2\left(1-\widehat{F}^1\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\widehat{F}^2\right)^{\frac{1}{m_2}} \right)^{m_2-1}}{k_2\left(k_2\left(1-\widehat{F}^1\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\widehat{F}^2\right)^{\frac{1}{m_2}} \right)^{m_2-m_1} + k_1} \left| \widehat{P}_{\theta_1}(t) - \widehat{P}_{\theta_2}(t) \right|, \qquad (2)$$

где $\rho = \dfrac{n_1}{n_2}$; $k_1 = \dfrac{\rho m_1^2}{\rho m_1^2 + m_2^2}$; $k_2 = \dfrac{m_2^2}{\rho m_1^2 + m_2^2}$.

Без ограничения общности считаем, что $m_1 \le m_2$ и $0^0 = 1$. В формуле (2)

$$\widehat{F}^1(t) = \frac{d_1(t)}{n_1}, \quad \widehat{F}^2(t) = \frac{d_2(t)}{n_2}.$$

Метод вычисления точных распределений статистики *T*. В работе [13] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предельным распределением статистики T при справедливости (1) является стандартное распределение Колмогорова — Смирнова*

$$P\{T < x\} \xrightarrow[n_2 \to \infty]{n_1 \to \infty} K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}.$$

Данная теорема позволяет проверять гипотезу (1) при больших объемах выборок n_1, n_2. Но в реальных условиях эти объемы никогда не превышают нескольких десятков. По этой причине необходимо иметь метод вычисления точных распределений статистики (2). Предлагаемый метод является частным случаем общего метода, рассмотренного в [16], где приведена его специализация применительно к данной задаче.

Введем вектор $\mathbf{Z} = \left(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1+n_2}\right)$, который состоит из n_1 единиц и n_2 нулей, причем

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{если отказ из выборки } \Theta_1; \\ 0, \text{если отказ из выборки } \Theta_2, \quad i = 1, \ldots, (n_1 + n_2). \end{cases}$$

Лемма 1. *Распределение вероятностей векторов* $\mathbf{Z} = \left(z_1, z_2, ..., z_{n_1+n_2}\right)$ *не зависит от вида функции надежности* $P_0(t)$ *и определяется следующим выражением:*

$$p(\mathbf{Z}) = \prod_{j=1}^{n_1+n_2} \left(\frac{\left(\left(n_1 - V_{j-1}\right)m_1\right)^{z_j} \left(\left(n_2 - U_{j-1}\right)m_2\right)^{1-z_j}}{\left(n_1 - V_{j-1}\right)m_1 + \left(n_2 - U_{j-1}\right)m_2} \right),$$

где $V_j = \sum_{i=1}^{j} z_i, V_0 = 0$ *— количество единиц в векторе* $\mathbf{Z}$ *до j-го места включительно;* $U_j = j - \sum_{i=1}^{j} z_i;\ U_0 = 0$ *— количество нулей в векторе* $\mathbf{Z}$ *до j-го места включительно.*

Для вычисления точных распределений статистики T рассмотрим модель случайного блуждания. Пусть $\{a_{ij}\} = A,\ i = \overline{0, n_1},\ j = \overline{0, n_2}$ — двумерный массив ячеек. Частица на первом шаге выходит из ячейки $a_{0,0}$ и на $\left(n_1 + n_2\right)$-м шаге она заканчивает блуждание в ячейке a_{n_1,n_2}, совершая n_1 скачков вниз и n_2 скачков вправо. Траектории частицы находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами $\mathbf{Z}$. Равенство $z_k = 1,\ k = 1,\ldots,\left(n_1 + n_2\right)$ в векторе $\mathbf{Z}$ соответствует скачку вниз на k-м шаге, появление $z_k = 0,\ k = 1,\ldots,\left(n_1 + n_2\right)$ — скачку вправо. При прохождении блуждания через ячейку a_{ij} функция

$$\frac{m_1 m_2 \sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{\rho m_1^2 + m_2^2}} \frac{\left(k_2\left(1-\widehat{F}^1\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\widehat{F}^2\right)^{\frac{1}{m_2}}\right)^{m_2-1}}{k_2\left(k_2\left(1-\widehat{F}^1\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\widehat{F}^2\right)^{\frac{1}{m_2}}\right)^{m_2-m_1} + k_1} \left|\widehat{P}_{\theta_1}(t) - \widehat{P}_{\theta_2}(t)\right|$$

принимает значение

$$t_{ij} = \frac{m_1 m_2 \sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{\rho m_1^2 + m_2^2}} \frac{\left(k_2\left(1-\frac{i}{n_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\frac{j}{n_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}\right)^{m_2-1}}{k_2\left(k_2\left(1-\frac{i}{n_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1\left(1-\frac{j}{n_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}\right)^{m_2-m_1} + k_1} \Delta_{ij},$$

где $\Delta_{ij} = \left| \prod_{s_1=1}^{i} \left(1 - \frac{1}{m_1(n_1 - s_1 + 1)} \right) - \prod_{s_2=1}^{j} \left(1 - \frac{1}{m_2(n_2 - s_2 + 1)} \right) \right|$. Заметим, что t_{ij} не зависит от траектории частицы. Схематически массив ячеек, по которым происходит блуждание, показан на рис. 1.

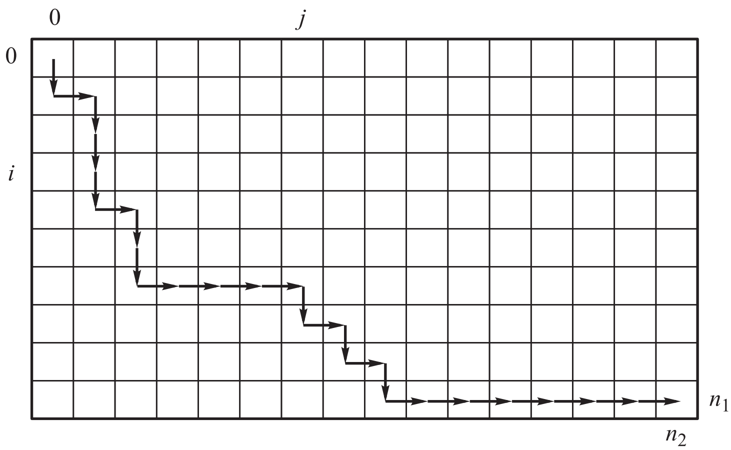


Рис. 1. Случайное блуждание частицы по массиву ячеек

Для вероятностей $P\{T < h\}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Вероятность* $P\{T < h\}$ *равна величине* $\pi_{n_1,n_2}(h)$, *которую можно получить повторным применением соотношения*

$$\pi_{ij}(h) \begin{cases} 1, \text{если } i=0, j=0; \\ \left(\frac{m_2(n_2 - j + 1)}{m_1(n_1 - i) + m_2(n_2 - j + 1)} \pi_{i,j-1}(h) \right) \chi_{ij}(h),\ i=0, 1 \le j \le n_2; \\ \left(\frac{m_1(n_1 - i + 1)}{m_1(n_1 - i + 1) + m_2(n_2 - j)} \pi_{i-1,j}(h) \right) \chi_{ij}(h),\ 1 \le i \le n_1,\ j=0; \\ \left(\begin{array}{l} \frac{m_1(n_1 - i + 1)}{m_1(n_1 - i + 1) + m_2(n_2 - j)} \pi_{i-1,j}(h) + \\ + \frac{m_2(n_2 - j + 1)}{m_1(n_1 - i) + m_2(n_2 - j + 1)} \pi_{i,j-1}(h) \end{array} \right) \chi_{ij}(h), 1 \le i \le n_1, 1 \le j \le n_2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\chi_{ij}(h) = \begin{cases} 1, & t_{ij} < h; \\ 0, & t_{ij} \ge h. \end{cases}$

В табл. 1, 2 рассчитаны вероятности точного распределения (2) для квантилей $h = 1,22$, $h = 1,36$ и $h = 1,63$, которые являются соответственно квантилями уровней 0,8901, 0,9505 и 0,9901 асимптотического распределения Колмогорова — Смирнова.

Таблица 1

Вероятности точного распределения $P(T < h)$ в случае равных объемов выборок

$n_1 = n_2$	$P(T < h)$					
	$h = 1{,}22$		$h = 1{,}36$		$h = 1{,}63$	
	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$
20	0,9206	0,8966	0,9673	0,9519	0,9960	0,9805
50	0,9322	0,9149	0,9608	0,9545	0,9942	0,9884
100	0,9218	0,9108	0,9636	0,9570	0,9939	0,9906
200	0,9122	0,9080	0,9604	0,9555	0,9915	0,9908
400	0,9065	0,9056	0,9554	0,9545	0,9921	0,9909
600	0,9082	0,9044	0,9571	0,9537	0,9911	0,9908
800	0,9006	0,9036	0,9544	0,9534	0,9914	0,9907
1000	0,9029	0,9030	0,9516	0,9532	0,9903	0,9907
1200	0,9004	0,9028	0,9526	0,9528	0,9904	0,9906
1400	0,9022	0,9023	0,9509	0,9527	0,9910	0,9906
1600	0,9065	0,9020	0,9508	0,9526	0,9910	0,9906
1800	0,9046	0,9018	0,9523	0,9525	0,9904	0,9906
2000	0,9045	0,9015	0,9546	0,9524	0,9910	0,9906
∞	0,8981	0,8981	0,9505	0,9505	0,9901	0,9901

Таблица 2

Вероятности точного распределения $P(T < h)$ в случае пропорциональных объемов выборок, $n_2 = 3n_1$

$n_2 = 3n_1$	$P(T < h)$					
	$h = 1{,}22$		$h = 1{,}36$		$h = 1{,}63$	
	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$	$m_1 = 2, m_2 = 2$	$m_1 = 2, m_2 = 3$
20	0,9227	0,8703	0,9617	0,9337	0,9909	0,9778
50	0,9139	0,8992	0,9586	0,9489	0,9912	0,9852
100	0,9099	0,9037	0,9562	0,9513	0,9911	0,9887
200	0,9065	0,9038	0,9549	0,9527	0,9909	0,9898
400	0,9041	0,9030	0,9535	0,9527	0,9908	0,9902
600	0,9030	0,9022	0,9530	0,9524	0,9907	0,9903
800	0,9023	0,9018	0,9527	0,9522	0,9906	0,9903
1000	0,9019	0,9015	0,9525	0,9521	0,9906	0,9903
1200	0,9015	0,9011	0,9523	0,9520	0,9905	0,9903
1400	0,9012	0,9010	0,9522	0,9519	0,9905	0,9902
1600	0,9011	0,9007	0,9521	0,9518	0,9905	0,9902
1800	0,9009	0,9006	0,9520	0,9518	0,9905	0,9902
2000	0,9007	0,9005	0,9520	0,9517	0,9904	0,9902
∞	0,8981	0,8981	0,9505	0,9505	0,9901	0,9901

Оценка коэффициента ускорения. Состоятельность оценки исследуют методами статистического моделирования, часто применяемого при оценке точности предлагаемых методов [17]. Пусть значение коэффициента ускорения k неизвестно. По результатам испытаний двух групп систем имеются две прогрессивно цензурированные выборки $\Theta_1 = \left(\theta_1^1,...,\theta_1^{n_1}\right)$, $\Gamma_2 = \left(\gamma_2^1,...,\gamma_2^{n_2}\right)$, где $\theta_1^i = \min\left\{\xi_1^i, \xi_2^i,...,\xi_{m_1}^i\right\}$, $i = \overline{1,n_1}$, $\gamma_2^j = \min\left\{\eta_1^j, \eta_2^j,...,\eta_{m_2}^j\right\}$, $j = \overline{1,n_2}$ — минимумы наработок до отказа элементов систем, работающих в режимах ε_1 и ε_2 соответственно. Пусть $\tilde{k}$ — некоторое гипотетическое значение коэффициента ускорения. Тогда выборки $\Theta_1 = \left(\theta_1^1,...,\theta_1^{n_1}\right), \Theta_2(\tilde{k}) = \left(\tilde{k}\gamma_2^1,...,\tilde{k}\gamma_2^{n_2}\right)$ должны быть прогрессивно цензурированными выборками из одной совокупности, что можно проверить, вычисляя статистику $T(\tilde{k})$. В качестве оценки предложено значение $\widehat{k}$, которое минимизирует значение $T(\tilde{k})$, $\widehat{k} = \arg\min T(\tilde{k})$.

Исследование точности предложенной оценки коэффициента ускорения проведено методами статистического моделирования.

Алгоритм моделирования.

1. Моделируются $n_1 m_1$ одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^1,...,\xi_{m_1 n_1}^1$ с функцией распределения $F_0(t)$. В качестве $F_0(t)$ рассмотрены следующие функции распределения: экспоненциальная (с параметром $\beta = 0{,}001$) и Вейбулла (с параметрами $\beta = 0{,}001$, $p = 1{,}5$). Величины $\xi_1^1,...,\xi_{m_1 n_1}^1$ в дальнейшем будем также называть наработками.

2. Наработки $\left(\xi_1^1,...,\xi_{m_1 n_1}^1\right)$ случайным образом разбиваются на n_1 групп по m_1 величин в каждой. Элементы i-й группы обозначим $\left(\xi_1^{1,i},...,\xi_{m_1}^{1,i}\right), i = \overline{1,n_1}$. Определяются $\theta_1^i = \min\left(\xi_1^{1,i},...,\xi_{m_1}^{1,i}\right)$.

3. Аналогичным образом моделируются $n_2 m_2$ одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^2,...,\xi_{m_2 n_2}^2$ с функцией распределения $F_0(t)$. Задается коэффициент ускорения k и вычисляются величины $\eta_j^2 = \xi_j^2 / k$, $j = \overline{1,n_2 m_2}$. Наработки $\left(\eta_1^2,...,\eta_{m_2 n_2}^2\right)$ случайным образом разбиваются на n_2 групп по m_2 величин в каждой. Элементы i-й группы обозначаются $\left(\eta_1^{2,i},...,\eta_{m_2}^{2,i}\right), i = \overline{1,n_2}$. Определяются $\gamma_2^i = \min\left(\eta_1^{2,i},...,\eta_{m_2}^{2,i}\right)$.

4. Для некоторого значения $\tilde{k}$, $1 \le \tilde{k} \le K$, определяются $\theta_2^i = \tilde{k}\gamma_2^i$, $i = \overline{1, n_2}$. По двум получаемым выборкам $\Theta_1 = \left(\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}\right)$, $\Theta_2 = \left(\theta_2^1, ..., \theta_2^{n_2}\right)$ вычисляется значение статистики Колмогорова — Смирнова $T(\tilde{k})$.

5. Методом перебора $\tilde{k}$ определяется оценка $\widehat{k}$, минимизирующая значение статистики $T(\tilde{k})$.

Для определения статистических свойств оценки $\widehat{k}$ пп. 1–5 повторялись 500 раз. По полученным значениям оценок строилась гистограмма этой выборки, а также вычислялись эмпирические средние $\widehat{k}$ и дисперсия S^2.

На рис. 2, 3 изображены гистограммы полученных оценок $\widehat{k}$ для различных наборов параметров моделирования m_1, n_1, m_2, n_2 для экспоненциального распределения с параметром $\beta = 0,001$, и для распределения Вейбулла с параметрами $\beta = 0,001,\ p = 1,5$.

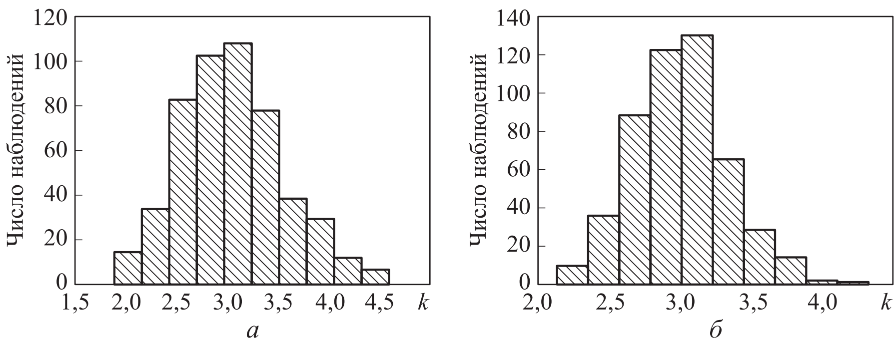


Рис. 2. Гистограммы оценок $\widehat{k}$ для экспоненциального распределения при $k = 3$:

а — $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ n_1 = n_2 = 100$; *б* — $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ n_1 = n_2 = 200$

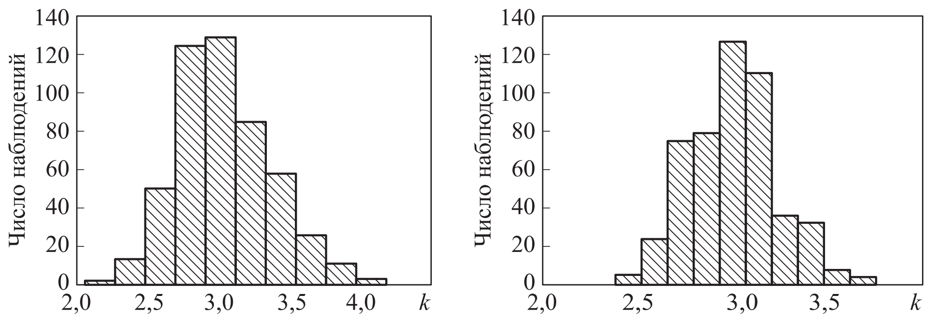


Рис. 3. Гистограммы оценок $\widehat{k}$ для распределения Вейбулла при $k = 3$:
а — $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ n_1 = n_2 = 100$; *б* — $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ n_1 = n_2 = 200$

Результаты моделирования для $n_1 = n_2 = 100$ приведены в табл.3.

Таблица 3

Результаты моделирования оценки коэффициента ускорения

$\widehat{k}$	Экспоненциальное распределение, $\beta = 0{,}001$				Распределение Вейбулла, $\beta = 0{,}001,\ p = 1{,}5$			
	$m_1 = 2,\ m_2 = 2$		$m_1 = 2,\ m_2 = 3$		$m_1 = 2,\ m_2 = 2$		$m_1 = 2,\ m_2 = 3$	
	$\widehat{k}$	S^2	$\widehat{k}$	S^2	$\widehat{k}$	S^2	$\widehat{k}$	S^2
2	2,0022	0,1202	2,0673	0,4485	2,0228	0,4567	2,0303	0,3768
3	3,1062	0,8672	3,0105	0,6127	3,0221	0,6826	3,0507	0,5984
4	4,0012	0,4544	4,0662	0,4827	4,0486	0,2003	4,0448	0,1962
5	5,0042	0,6451	5,0186	0,6462	5,0216	0,3263	5,0138	0,3292
6	5,8960	0,6597	5,9828	0,6959	5,9859	0,3733	6,0185	0,3419

Результаты моделирования показывают, что для больших объемов данных эмпирические средние очень незначительно отличаются от теоретических средних, причем дисперсии оценок также малы. Это показывает состоятельность предложенного метода.

Заключение. Представлен метод оценки функций пересчета наработок до отказа с одного имеющегося режима на другой, который не зависит от функции распределения наработок до отказа $F_0(t)$. Предложен метод вычисления точных распределений статистики типа метода Колмогорова — Смирнова, основанный на сравнении оценок Каплана — Мейера функций надежности двух прогрессивно цензурированных выборок. Методом Монте-Карло показано, что оценка коэффициента ускорения по таким цензурированным данным, получаемая минимизацией этой статистики, является состоятельной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Balakrishnan N., Tripathi R.C., Kannan N. Some nonparametric precedence type tests based on progressively censored samples and evaluation of power. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2010, no. 140, pp. 559–573.

[2] Maturi T.A., Coolen-Schrijner P., Coolen F.P. Nonparametric predictive comparison of lifetime data under progressive censoring. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2010, no. 140, pp. 515–525.

[3] Садыхов Г.С., Крапоткин В.Г., Казакова О.И. Расчет и оценка показателей ресурса изделий с использованием модели аддитивного накопления повреждений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 82–98.

[4] Balakrishnan N. Weighted precedence and maximal precedence tests and an extension to progressive censoring. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2005, no. 135, pp. 197–221.

[5] Basu P. Censored Data. *Handbook of Statistics*. New York, Elsevier Science Publishers, 1984, vol. 4, pp. 551–578.

[6] Bagdanovich V., Kruopis J., Nikulin M.S. *Nonparametric tests for censored data.* London, ISTE Ltd., 2011, 233 p.

[7] Balakrishnan N., Cramer E. *The Art of Progressive Censoring. Applications to Reliability and Quality*. New York, Springer, 2014, 645 p.

[8] McPherson J.W. *Reliability physics and engineering. Time-To-Failure modeling.* New York, Springer, 2010, 318 p.

[9] Gamiz M.L., Kulasekera K.B., Limnios N., Lindqvist B.H. *Applied Nonparametric statistics in reliability.* London, Springer, 2011, 229 p.

[10] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. *Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ.* Москва, Либроком, 2013, 584 с.

[11] Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Am Stat. Assoc.*, 1958, no. 53, pp. 57–481.

[12] Nelson W. *Accelerated Testing: Statistical Models Test Plans and Data Analyses.* John Wiley&Sons, Inc., NewYork, 1990, 515 p.

[13] Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Проверка однородности двух цензурированных выборок из наработок изделий, основанная на сравнении оценок Каплана — Мейера их функций надежности. *Физические основы приборостроения* [в печати].

[14] Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Оценки Каплана — Мейера в статистиках типа Колмогорова — Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой. *Электромагнитные волны и электронные системы*, 2010, т. 15, № 7, с. 18−26.

[15] [Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Метод вычисления точных распределений статистик типа Колмогорова — Смирнова в случае нарушения однородности и независимости анализируемых выборок. *Наука и образование*: электронное издание, 2014, № 11. doi: 10.7463/1114.0740251

[16] Тимонин В.И. Оптимизация проведения предварительных исследований в теории форсированных испытаний. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2004, № 1, с. 23−33.

[17] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

Статья поступила в редакцию 19.08.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Сравнение прогрессивно цензурированных выборок — численные методы табулирования распределений статистик однородности и исследование оценки параметров связи их распределений методом Монте-Карло. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 89–100.

Тимонин Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ по теории надежности и математической статистике. e-mail: timoninmgtu52@mail.ru

Тянникова Нина Дмитриевна окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2007 г. Аспирант, ассистент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: теория надежности, математическая статистика. e-mail: tiannikova@yandex.ru

Comparison of progressively censored samples — numerical methods for tabulating distribution of homogeneity statistics and study of estimation of relation parameters of their distribution by Monte Carlo method

© V.I. Timonin, N.D. Tyannikova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the task of estimating the functions for translating mean lifetime from one mode to another. This problem arises, for example, when the product mean lifetime data in bench tests are available and it is required to calculate reliability of the same product under real operating conditions. For simplicity, the case when the mean lifetimes are linearly related is considered. The proposed method is based on minimization of the Kolmogorov — Smirnov statistics, used for testing the homogeneity of the two progressively censored samples. A special statistics feature is the use of Kaplan – Meyer estimates of the reliability function for each sample. The paper presents a method for calculating the exact distributions of these statistics when the tested hypothesis is valid. In this case statistics does not depend on the form of the element mean lifetime distribution function. Tables of accurate quantile values for considered statistics are presented. The viability of the proposed assessment for a linear relation function is shown by the methods of statistical modeling.

Keywords: *non-parametric statistics, Kolmogorov — Smirnov test, Kaplan — Meyer estimate, progressive censoring.*

REFERENCES

[1] Balakrishnan N., Tripathi R.C., Kannan N. Some nonparametric precedence type tests based on progressively censored samples and evaluation of power. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2010, no. 140, pp. 559–573.

[2] Maturi T.A., Coolen-Schrijner P., Coolen F.P. Nonparametric predictive comparison of lifetime data under progressive censoring. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2010, no. 140, pp. 515–525.

[3] Sadykhov G.S, Krapotkin V.G., Kazakov O.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical modeling and Numerical Methods,* 2014, no. 1, pp. 82–98.

[4] [Balakrishnan N. Weighted precedence and maximal precedence tests and an extension to progressive censoring. *J Stat Plan Infer*, 2005, no. 135, pp. 197–221.

[5] Basu P. Censored Data. *Handbook of Statistics*, Vol. 4. NewYork, Elsevier Science Publishers, 1984, p. 551–578.

[6] Bagdanovich V., Kruopis J. Nikulin M.S. *Nonparametric tests for censored data*. London, ISTE Ltd, 2011, 233 p.

[7] Balakrishnan N., Cramer E. *The Art of Progressive Censoring. Applications to Reliability and Quality*. New York, Springer, 2014, 645 p.

[8] McPherson J.W. *Reliability physics and engineering. Time-To-Failure modeling*. New York, Springer, 2010, 318 p.

[9] Gamiz M.L., Kulasekera K.B., Limnios N., Lindqvist B.H. *Applied Nonparametric statistics in reliability*. London, Springer, 2011, 229 p.

[10] GnedenkoB.V., Belyaev Y.K., Soloviev D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti. Osnovnye harakteristiki nadezhnosti i ih statisticheskij analiz* [Mathematical Methods in Reliability Theory. The Basic Characteristics of Reliability and Their Statistical Analysis] Moscow, Librokom, 2013, 584 p.
[11] Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Am. Stat. Assoc*., 1958, no. 53, pp. 57–481.
[12] Nelson W. *Accelerated Testing: Statistical Models Test Plans and Data Analyses*. JohnWiley&Sons, Inc., NewYork, 1990. 515 p.
[13] Timonin V.I., Tyannikova N.D. *Fizicheskie osnovy priborostroeniya – Principal Physics of Instrument Engineering,* [the article is in the printing process].
[14] Timonin V.I., Yermolaeva M.A. *Electromagnitnye volny i Elektronnye sistemy – Electromagnetic waves and electronic systems*, 2010, vol. 15, no. 7, pp. 18–26.
[15] Timonin V.I., Tyannikova N.D. *Nauka i obrazovanie: electronnyy nauchno-tekhnicheskoe izdanie – Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2014, no. 11. Doi: 10.7463/1114.0740251
[16] Timonin V.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria: Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2004, no. 1, pp. 23–33.
[17] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

Timonin V.I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Department of Higher Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 research publications in the field of reliability theory and mathematical statistics. e-mail: timoninmgtu52@mail.ru

Tyannikova N.D. graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2007. She is a post-graduate student, assistant lecturer of the Department of Higher Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests in the field of reliability theory, mathematical statistics. e-mail: tiannikova@yandex.ru