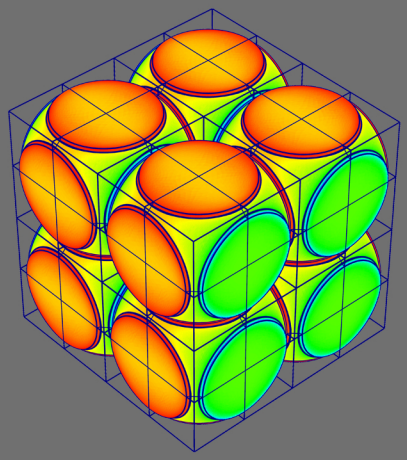
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г. Моделирование пертурбационных оболочек для гравитационных маневров в Солнечной системе.Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 4, с. 64–73.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/325/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.23
07.11.2026 00:48:39

УДК 521.19 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-4-6473

Моделирование пертурбационных оболочек для гравитационных маневров в Солнечной системе

© Г.К. Боровин[1,2], Ю.Ф. Голубев[2], А.В. Грушевский[2], А.Г. Тучин[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

Одним из видов гравитационного рассеяния в Солнечной системе в рамках модели круговой ограниченной задачи трех тел (CR3BP) являются гравитационные маневры «частиц незначительной массы» (космические аппараты, астероиды, кометы и др.). Для их описания полезна физическая аналогия с рассеянием пучков заряженных альфа-частиц в кулоновском поле. Однако, в отличие от рассеяния заряженных частиц, существуют внешние ограничения на возможность выполнения гравитационных маневров, связанные с ограниченным размером сферы влияния планеты. В то же время из литературы по CR3BP известны внутренние ограничения на возможность исполнения гравитационных маневров, оцениваемые эффективными радиусами планет (включая гравитационный захват планетой, попадающей в нее). Они зависят от асимптотической скорости частицы относительно планеты. По понятным причинам их влияние лишает возможности эффективного использования гравитационных маневров. В работе представлены обобщенные оценки размеров околопланетных областей (плоских вращающихся синхронно с малым телом «пертурбационных колец» или «пертурбационных оболочек» в трехмерном случае), попадание в которые является необходимым условием реализации гравитационных маневров. Детальный анализ показывает, что Нептун и Сатурн имеют характерные оболочки — полые сферы возмущений самых больших размеров в Солнечной системе, а Юпитер занимает в этом списке лишь четвертое место.

Ключевые слова: *гравитационное рассеяние, гравитационный манёвр, сфера действия планеты*

Введение. В астродинамике баллистический анализ полетов космических аппаратов (КА) в дальнем космосе с использованием гравитационных маневров [1–3] (с использованием гравитационного рас- сеяния массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного исследования конечного набора задач Коши и Ламберта. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеяние заряженных частиц) проводится в ином ключе — с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц — сонаправленного компактного потока однородных частиц [4]. В последние годы, при решении задач баллистического анализа и построения адаптивных сценариев проведения КА гравитационных маневров, в астродинамике также наметился тренд по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [3, 5]. Здесь уже вместо ансамбля заряженных частиц фигурирует пучок — набор виртуальных траекторий КА с почти совпадающей скоростью [3]. В этом контексте представляет интерес совместное

применение обоих подходов при решении конкретных задач баллистического анализа с гравитационным рассеянием: гравитационного [3, 5] и кулоновского [4,6].

Математическая модель. Сначала рассмотрим кулоновское рассеяние [4]. Выпишем силовую функцию $U_{Coulomb}$ кулоновского взаимодействия частиц [2]:

$$U_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha\, q_{aim}}{r},$$

где $\varepsilon_0 \approx 8{,}85418781762\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, q_α, q_{aim} — одноименно заряженные заряды частицы и рассеивающей мишени, r — расстояние между их центрами масс.

Для угла рассеяния φ (угла между исходным и отражённым векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы $\mathbf{V}_{\infty,in}$ и $\mathbf{V}_{\infty,out}$) будет верно соотношение (рис. 1, *а*):

$$tg\,\frac{|\varphi|}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m\, b\, V_\infty^2}, \qquad (1)$$

где $V_\infty = \left\|\mathbf{V}_{\infty,in}\right\| = \left\|\mathbf{V}_{\infty,out}\right\|$, m — приведённая масса, $m = \dfrac{m_\alpha m_{aim}}{m_\alpha + m_{aim}}$, b — величина прицельной дальности [2].

Учитывая, что в случае $m_{aim} >> m_\alpha$ приведённая масса

$$m = \frac{m_\alpha}{1 + m_\alpha / m_{aim}} \approx m_\alpha,\ m \approx m_\alpha,$$

для угла рассеяния φ будет выполнено:

$$tg\,\frac{|\varphi|}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha\, b\, V_\infty^2}. \qquad (2)$$

Заметим, что формулы (1), (2) остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел U_{grav} и кулоновского электрического поля для двух заряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются идентичным, появляется возможность применения аналогов формул (1) и (2) в случае гравитационного рассеяния. Аналогом альфа-частицы с зарядом q_α становится КА с массой m_{sc}, аналогом рассеивающей мишени

$$a_{aim} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{aim}}{r}$$

становится гравитационное воздействие малого тела $a_p = -\mu_p / r$ (планеты, спутника планеты или астероида) с массой m_p и гравитационным параметром $\mu_p = Gm_p$, где G — гравитационная постоянная.

Аналог формулы (2) в случае *гравитационного рассеяния* формально может быть получен из нее с помощью замены:

$$m_\alpha \to m_{sc}, \quad q_\alpha \to -m_{sc}, \quad q_{aim} \to m_p, \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to G.$$

В результате можно получить аналог (2) — выражение для угла гравитационного рассеяния φ при совершении гравитационного манёвра:

$$tg\,\frac{|\varphi|}{2} = \frac{\mu_p}{b\,V_\infty^2}, \tag{3}$$

где $\mu_p = Gm_p$.

Замечание. В астродинамике φ называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении гравитационного манёвра. При его вычислении вместо прицельной дальности b чаще используется минимальное расстояние от КА от центра планеты R_π (очевидно — расстояние перицентра пролётной гиперболы) [1–3, 5, 7], при этом вместо (3) чаще используется выражение

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1+\dfrac{R_\pi}{\mu_p}V_\infty^2}, \tag{4}$$

где e — эксцентриситет пролётной гиперболы.

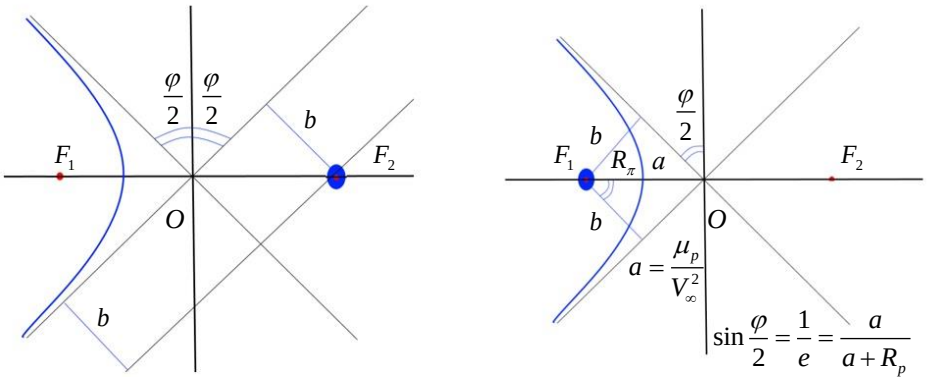
Выражение (4) не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности b, экспериментальное определение R_π для альфа-частиц труднореализуемо.

Очевидно, что R_π не может быть меньше радиуса планеты R_p [8,9]. Подставляя в (4) выражение для прицельной дальности b [9]

$$b = R_\pi\sqrt{1+2\,\frac{\mu_p}{R_\pi V_\infty^2}} \tag{5}$$

и, воспользовавшись тождеством $ctg^2\,\dfrac{\varphi}{2} = \sec^2\dfrac{\varphi}{2} - 1$, приходим к классическому «астродинамическому» результату (4), что лишний раз подтверждает эквивалентность обоих способов описания угла поворота φ: «кулоновского» и гравитационного [2, 4–6].

Отличие геометрии рассеяния заряженных частиц и гравитационного рассеяния виртуальных траекторий КА на гравитационном манёвре иллюстрируют рис. 1, *а* и рис. 1, *б*. Практически, разница заключается в инверсии номера фокуса, в котором расположено возмущающее тело. При этом прицельная дальность гравитационного рассеяния всегда больше расстояния от КА до планеты, тогда как для кулоновского рассеяния — всегда меньше расстояния от альфа-частицы до центра рассеивания.



а *б*

Рис. 1. Геометрия рассеяния:
а — кулоновского; *б* —гравитационного

Эффективный радиус планеты. В предельном случае пролёта над планетой на нулевой высоте (случай «касательного пролёта») из (3) следует, что для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости КА $\varphi_{\max}$ выполнено:

$$\sin\frac{\varphi_{\max}}{2}=\frac{1}{1+\dfrac{V_\infty^2}{V_{pc}^2}}, \qquad (6)$$

где $V_{pc}=\sqrt{\dfrac{\mu_p}{R_p}}$ — первая космическая скорость около поверхности планеты.

Введем картинную плоскость *B-plane* планеты [4, 7–8] как плоскость, проходящую через ее центр перпендикулярно вектору асимптотической скорости КА. Тогда касание траектории КА с планетой происходит после ее прохождения картинной плоскости (рис. 2). Графики нормированной по R_p зависимости полного эффективного радиуса $R_{эф}^{полн}$ [9] от асимптотической скорости КА для Луны и некоторых планет Солнечной системы можно найти,

например, в [7,9]. Для всех планет Солнечной системы функциональная зависимость $R_{эф}^{полн} / R_p$ представлена на рис. 3.

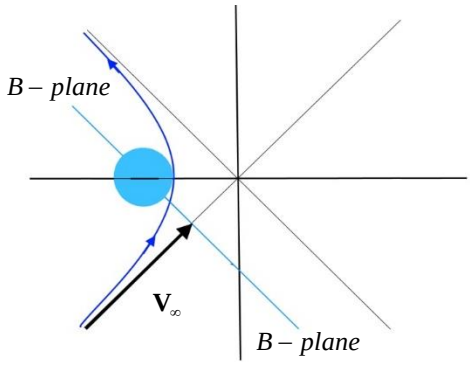


Рис. 2. Касание траектории КА с планетой после прохождения картинной плоскости *B-plane*

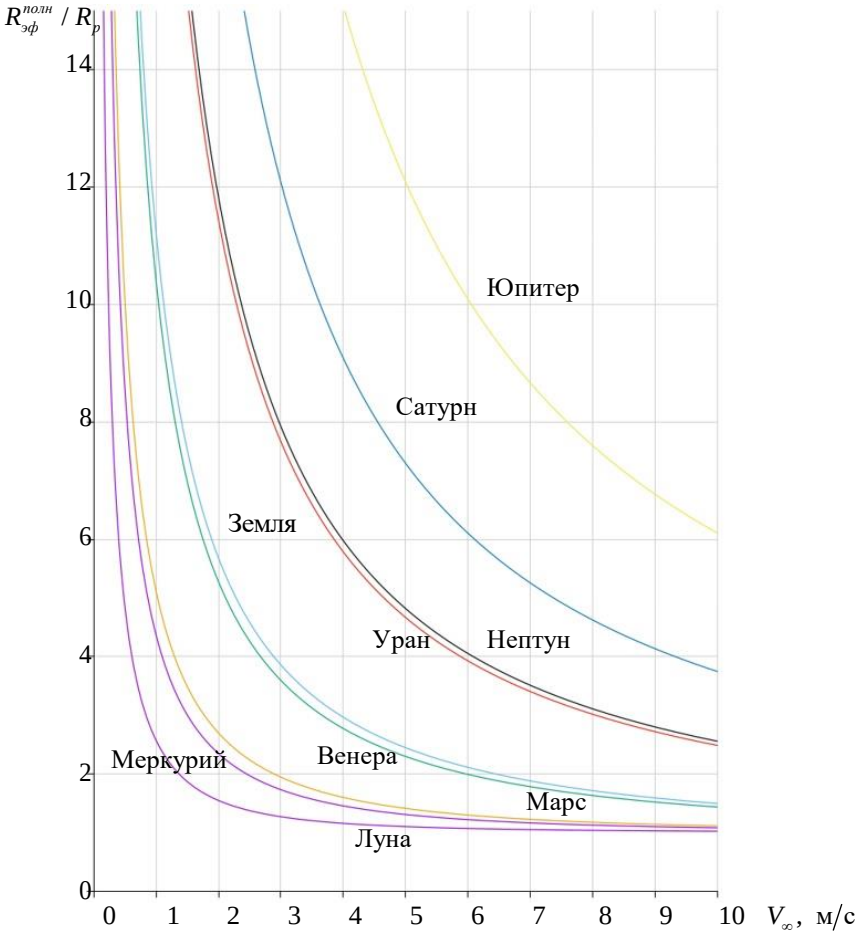


Рис. 3. Зависимости от асимптотической скорости соотношения полного эффективного $R_{эф}^{полн}$ и истинного радиусов R_p для небесных тел Солнечной системы

Утверждение «о пертурбационном кольце». Подведем итоги вышесказанному применительно к ограниченной круговой задаче трех тел (CR3BP): Солнце, планета, КА.

Утверждение «О пертурбационном кольце». Область возможного гравитационного рассеяния траекторий КА на граничной картинной плоскости *B-plane*, построенной на границе СДП, образуется её пересечением траекториями с одинаковыми начальными скоростями $\mathbf{V}_\infty$. Она является *«пертурбационным»* кольцом с шириной L_{disp} [7], перпендикулярным к $\mathbf{V}_\infty$, с внутренним радиусом

$$R_{эф}^{полн} = R_\pi \sqrt{1+2\frac{\mu_p}{R_p V_\infty^2}},$$

и внешним радиусом — радиусом СДП r_d, то есть максимальным расстоянием, на котором планета способна повернуть вектор $\mathbf{V}_\infty$ асимптотической скорости КА (рис. 4):

$$r_{disp} \in [R_{эф}^{полн}, r_d] = \left[R_p \sqrt{1+2\frac{V_{pc}^2}{V_\infty^2}},\ r_0 \sqrt[5]{\frac{4\mu_p^2}{\mu_\odot^2}} \right], \qquad (7)$$

где r_0 — средний радиус орбиты планеты, $\mu_\odot$ — гравитационный параметр центрального притягивающего тела (Солнца).

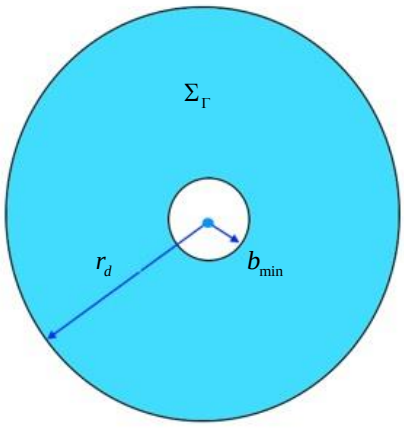


Рис. 4. «Пертурбационное кольцо» на картинной плоскости, где происходит гравитационное рассеяние (область гравитационных манёвров)

Нетрудно видеть, что при переходе к моделированию в пространственном (3D) случае пертурбационные кольца превращаются в трехмерные пертурбационные оболочки толщиной L_{disp} и характерным размером внутренней полости $R_{эф}^{полн}$.

Модельная зависимость L_{disp} от V_∞ для Луны и планет земной группы представлена на рис. 5.

Отметим, что площадь пертурбационного кольца Σ_Γ, характеризующая общее число захватываемых в ГМ траекторий в равномерной трубке траекторий, составляет величину:

$$\Sigma_{\Gamma} = \pi r_0^2 \left(\frac{2\mu_p}{\mu_{\odot}} \right)^{4/5} - \pi R_p^2 - 2\pi R_p^2 \frac{V_{pc}^2}{V_{\infty}^2}, \qquad (8)$$

Анализ (8) показывает, что Σ_{Γ} возрастает с ростом V_{∞}.

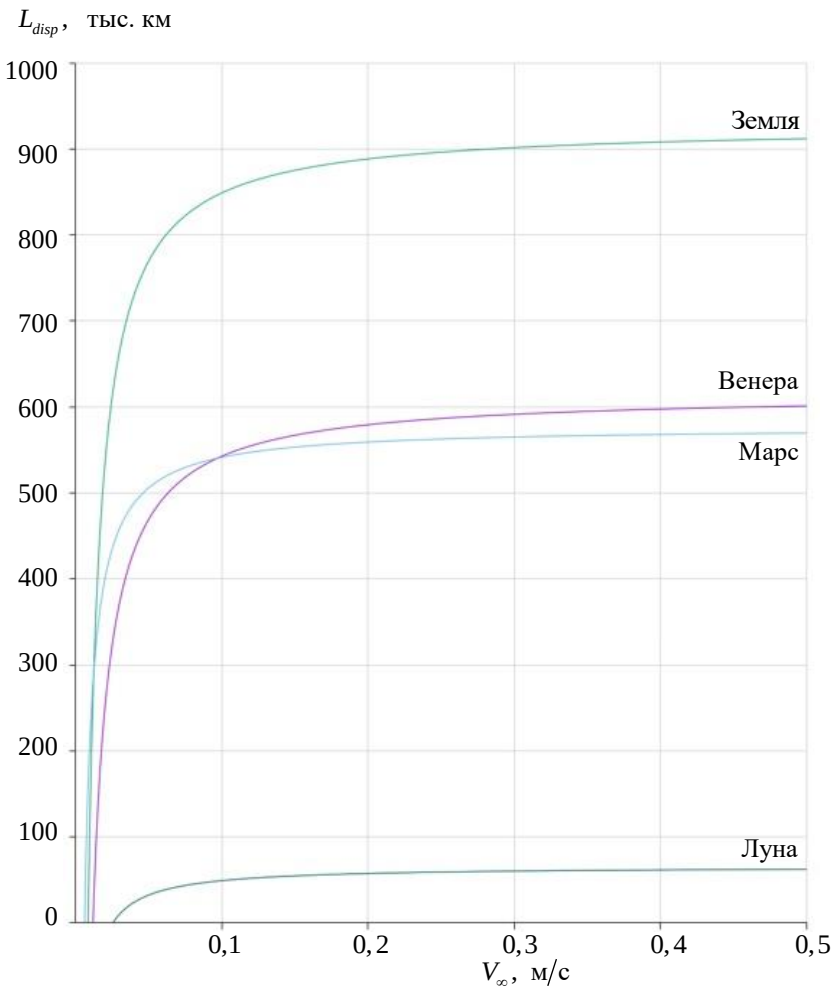


Рис. 5. Зависимость L_{disp} от V_{∞} для Луны и планет земной группы

Выводы. Гравитационные манёвры (ГМ) около планет Солнечной системы и их массивных спутников являются важнейшим инструментарием современного освоения дальнего космоса. Из классики астродинамики известны оценки полных эффективных радиусов планет, обеспечивающих гравитационный захват планетой и попадание в неё траекторий «частиц ничтожной массы» (КА, астероиды, кометы и т. д.). Гравитационные маневры для таких траекторий невозможны. Гравитационное рассеяние (одним из типов которого в рамках CR3BP представляются ГМ), является аналогом

кулоновского рассеяния заряженных α-частиц. Для кулоновского рассеяния известны оценки области пространственной локализации возмущения [2], которые могут быть описаны в рамках пучковых процедур.

В работе представлены обобщённые оценки размеров околопланетных областей («пертурбационных колец») и их пространственных аналогов («пертурбационных оболочек», гарантирующих проведение в них гравитационных маневров, и выявлены наиболее эффективные планеты Солнечной системы для их моделирования и проведения.

Установлено, что, хотя пространственные оценки пертурбационных оболочек определяются параметрами сфер действия планет в CR3BP, их толщина может значительно уменьшаться из-за расширения своей внутренней «сферы тотального захвата» в случае малых значениях характерной асимптотической скорости. При стандартных значениях асимптотической скорости пучка траекторий небесных тел более 1 км/с, характерными «пертурбационными оболочками» наибольших размеров обладают Нептун и Сатурн, в то время, как Юпитер занимает лишь четвёртое место в Солнечной системе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. *Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы*. Химки, НПО "Лавочкина", 2018, 335 с.

[2] Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. *Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories*. CRC Press, 1998, 292 p.

[3] Golubev Yu F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Gravity Assist Maneuvers of a Spacecraft in Jupiter System. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 3, pp. 445–463. DOI: 10.1134/S1064230714030083

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Краткий курс теоретической физики. Москва, Наука, 1969, 271 с.

[5] Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G., Tuchin D.A. The Rutherford Formula Generalized for the Synthesis of Gravity Assist Chains. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, iss. 12, pp. 333–335. DOI: 10.1134/S1028335821120053

[6] Rutherford E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1911, vol. 21, iss. 125, pp. 669–688. DOI: 10.1080/14786440508637080

[7] Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационное рассеяние при совершении гравитационных манёвров и пертурбационные кольца в Солнечной системе. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, 2021, № 2, с. 1–26.

[8] Боровин Г.К., Захваткин М.В., Степаньянц В.А., Усовик И.В. Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 69–90.
[9] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета*. Москва, Наука, 1990, 448 с.

Статья поступила в редакцию 26.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г. Моделирование пертурбационных оболочек для гравитационных маневров в Солнечной системе. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 4, с. 64–73.

Боровин Геннадий Константинович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
e-mail: gkborovin@mail.ru

Голубев Юрий Филиппович — д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: golubev@keldysh.ru

Грушевский Алексей Васильевич — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: grushev@keldysh.ru

Тучин Андрей Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: tag@kiam1.rssi.ru

The perturbation hollow spheres modelling for the gravity assists in the Solar system

© G.K. Borovin[1,2], Yu.F. Golubev[2], A.V. Grushevskii[2], A.G. Tuchin[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 125047, Russia

One of the types of gravitational scattering in the Solar System within the framework of the circular restricted three-body problem (CR3BP) are the gravity assist maneuvers of "particles of insignificant mass" (spacecraft, asteroids, comets, etc.). For their description, a physical analogy with the scattering of beams of charged alpha-particles in the Coulomb field is useful. However, unlike the scattering of charged particles, there are external restrictions on the ability to perform gravity assists associated with the limited size of the spheres of influence of the planet. At the same time, internal limitations on the possibility of performing gravity assists are known from the literature on CR3BP, estimated by the effective radii of planets (including gravitational capture by a planet falling into it). They depend on the asymptotic velocity of the particle relative to the planet. For obvious reasons, their influence makes it impossible to effectively use gravity assist maneuvers. The paper presents generalized estimates of the sizes of near-planetary regions (flat "perturbation rings" or "perturbation hollow spheres" rotating synchronously with a small body in the three-dimensional case), falling into which is a necessary condition for the implementation of gravity assists. A detailed analysis shows that Neptune and Saturn have characteristic of perturbation hollow spheres of the largest size in the Solar System, and Jupiter occupies only the fourth place in this list.

Keywords: *gravitational scattering, gravity assist maneuver, planetary sphere of influence*

REFERENCES

[1] Borovin G.K., Golubev Yu.F., Grushevsky A.V., Zaslavsky G.S., Za-grabkin M.V., Koryanov V.V., Lavrenov S.M., Morskoy I.M., Simonov A.V., Stepanyants V.A., Tuchin A.G., Tuchin D.A., Yaroshevsky V.S. *Ballistiko-navigacionnoe obespechenie polyotov avtomaticheskih kosmicheskih apparatov k telam Solnechnoj sistemy* [Ballistics-navigation support for flights of automatic space vehicles to the bodies of the Solar system]. Khimki, NPO Lavochkina Publ., 2018, 335 p.

[2] Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. *Multiple Gravity Assist Inter-planetary Trajectories*. CRC Press, 1998, 292 p.

[3] Golubev Yu F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Gravity Assist Maneuvers of a Spacecraft in Jupiter System. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 3, pp. 445–463. DOI: 10.1134/S1064230714030083

[4] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Mechanics. Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 1976, 197 p.

[5] Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G., Tuchin D.A. The Rutherford Formula Generalized for the Synthesis of Gravity Assist Chains. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, iss. 12, pp. 333–335. DOI: 10.1134/S1028335821120053

[6] Rutherford E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1911, vol. 21, iss. 125, pp. 669–688. DOI: 10.1080/14786440508637080

[7] Golubev Yu.F., Grushevsky A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G., Tuchin D.A. Gravity assists gravitational scattering and the perturbation rings in the solar system. *Keldysh Institute Preprints*, 2021, no. 2, pp. 1–26.

[8] Borovin G.K., Stepaniants V.A., Zahvatkin M.V., Usovik I.V. Statistical model of space objects distribution in space of orbital parameters. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 4, pp. 69–90.

[9] Okhotsimsky D.E., Sikharulidze Yu.G. *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta* [Fundamentals of space flight mechanics]. Moscow, Nauka, 1990, 448 p.

Borovin G.K., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Chief Scientific Officer, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS.
e-mail: gkborovin@mail.ru

Golubev Yu. F., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Professor, Head of the Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. e-mail: golubev@keldysh.ru

Grushevskii A.V., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Chief Scientific Officer, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. e-mail: grushev@keldysh.ru

Tuchin A.G., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Chief Scientific Officer, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. e-mail: tag@kiam1.rssi.ru