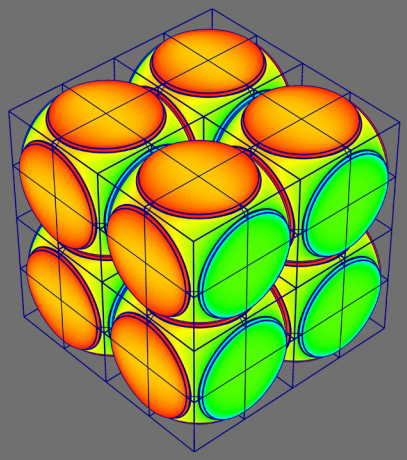
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Аксенов А.Г. Двумерная модель и метод расчета противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 4, с. 3–14.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/321/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.182
31.01.2026 10:53:03

УДК 519.634 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-4-314

Двумерная модель и метод расчета противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе

© А.Г. Аксенов

ИАП РАН, Москва, 123056, Россия

Моделируется противоточный вихрь газовой центрифуги. Математическая модель движения вязкого теплопроводного газа включает в себя уравнение для плотности, скоростей и удельной энергии в цилиндрической геометрии. После введения сетки частные производные по пространству заменяются конечными разностями, и задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Такая методика называется методом Прямых (Lines Method). Поскольку течение сверхзвуковое, а расчетная область включает в себя тонкие погранслои, то система ОДУ получается жесткой благодаря наличию разновременных процессов и затуханию. На языке математики это означает существенное различие собственных чисел матрицы Якоби и отрицательные действительные части. Поэтому для решения задачи оказалось целесообразным применение неявного метода Гира для системы ОДУ без расщепления задачи по физическим процессам и направлениям. Эффективным методом решения задачи обращения Якобина оказывается применение метода циклической редукции в варианте матричной прогонки. В качестве примера продемонстрировано противоточное течение, возникающие благодаря температурному градиенту.

Ключевые слова: *противоточная газовая центрифуга, сверхзвуковое течение вязкого теплопроводного газа, неявная консервативная схема, метод Гира*

Введение. Если газообразную смесь изотопов пропускать через высокоскоростные центрифуги, то центробежная сила разделит более легкие или тяжелые частицы на слои, где их и можно собрать. Тяжелые молекулы располагаются во внешних слоях, легкие во внутренних. Большое преимущество центрифугирования состоит в зависимости коэффициента разделения от абсолютной разницы в массе, а не от отношения масс. Степень разделения пропорциональна квадрату отношения скорости вращения к скорости молекул в газе. Отсюда очень желательно как можно быстрее раскрутить центрифугу. Типичные линейные скорости вращающихся роторов 600 м/с для стали и 1100 м/с для нейлона превышают скорость звука для разделения изотопов урана в гексофториде [1].

Элементарный эффект разделения изотопов из-за действия центробежной силы и градиента давления вдоль радиуса может быть существенно улучшен за счет наложения осевого противоточного движения в плоскости (r, z). Отдельная центрифуга становится подобна миниатюрному каскаду. Противоток может установиться благодаря следующим возбуждениям [1]: тепловое возбуждение крышками и стенками, возбуждение входящими потоками. И даже воздействие силы тяжести на молекулы с разными массами также приводит к образованию движения в плоскости (r, z).

Поскольку относительная разница в массах изотопов урана ^{235}U, ^{238}U мала, исходную задачу можно разделить на две задачи: сначала исследовать течение однокомпонентного вязкого газа, затем для полученного стационарного газодинамического течения рассмотреть задачу о диффузии легкого компонента смеси и посчитать пространственное распределение концентраций.

Целью настоящего исследования является первая задача моделирования течения в рамках неявной схемы интегрирования уравнений Навье-Стокса с учетом теплопроводности в 2D случае на нерегулярной неравномерной сетке. Первоначально планировался метод расчета на основе разделения задачи по физическим процессам и направлениям. Перенос считался по явной схеме высокого порядка точности годуновского типа, а вязкость и теплопроводность как отдельные задачи по неявной схеме [2]. Методика в принципе работоспособная, несмотря на наличие тонких погранслоев, уменьшающих временные шаги для расчета переноса по явной схеме. Однако, благодаря противотоку, разделение задачи по направлениям приводит к большим возмущениям из-за разделения на направления и очень малым временным шагам при условии сохранения точности. Выход на стационарное решение затруднен [3]. Поэтому было принято решение разработать полностью неявную конечно-разностную схему для вязкого теплопроводного газа в 2D. Частные производные по пространству заменены конечными разностями, жесткая система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) решается методом Гира [4, 5]. Похожая методика получения стационарного решения на основе итерационного процесса без расчета эволюции газовой динамики использовалась в работе [6].

Количество современных работ по моделированию течения в газовой центрифуге в открытой печати оказалось ограниченным, как в силу специфических приложений разделения изотопов урана, так и сложности задачи моделирования сверхзвукового течения с учетом вязкости, теплопроводности с необходимостью учета тонких погранслоев. Моделирование последних лет включает построение упрощенных аналитических моделей нестационарных решений для верификации численных алгоритмов [2015Bogovalov], использующих полунеявные методы решения системы уравнений в частных производных с помощью конечных разностей с заранее неизвестной устойчивостью: как в 2D постановке [2022Zeng], так и в 3D постановке [2016Borman]. Описываемая в данной работе двумерная полостью неявная методика обладает необходимой устойчивостью, для ее верификации достаточно стационарного решения. Следует также отметить метод гомотопического анализа, основанный на концепции гомотопии из топологии для генерации решения

сходящихся рядов для нелинейных систем, вероятно впервые предложенный для изучения течения в газовой центрифуге в работе [2018Gu]. Естественно целью построения моделей является проверка влияния на противоточный вихрь температурного возмущения, торможения крышек центрифуги либо ее размеров [2020Gu].

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Для вывода уравнений вязкой теплопроводной газовой динамики в криволинейных координатах используем основные определения Римановой геометрии [12, 13].

Метрический тензор в ортогональных координатах x^i имеет диагональный вид

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) = \mathbf{diag}(g_{11},\ g_{22},\ g_{33}),\quad g^{ij} = \mathbf{diag}(g_{11}^{-1},\ g_{22}^{-1},\ g_{33}^{-1}),$$

символы Кристоффеля определяются следующим образом:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2 g_{kk}} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

градиент вектора есть

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^i u^s = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2 g_{ii}} \left(\sum_s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} u^s + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} u^i - \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} u^j \right),$$

дивергенция вектора есть

$$\nabla_i u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \Gamma_{kj}^k u^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|} u^i}{\partial x^i},$$

дивергенция тензора есть

$$\nabla_i \Pi^{ij} = \sum_i \left(\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^i \Pi^{sj} + \Gamma_{is}^j \Pi^{is} \right).$$

Запишем уравнения газовой динамики с вязкостью и теплопроводностью [14, 15, 16, 17] в криволинейной системе координат:

закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho u^i) = 0,$$

закон сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho u^j}{\partial t} + \nabla_i \Pi^{ij} = 0,$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla_i (\rho E + P) u^i = \nabla_i (\Pi'^{ij} g_{jk} u^k) + \nabla_i \left(\kappa g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right),$$

От полной энергии, которая не сохраняется благодаря трению газа о стенки, удобнее перейти к уравнению для внутренней энергии (иначе в полной энергии огромная кинетическая энергия суммируется с небольшой внутренней), т.е.

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u^i \nabla_i \varepsilon \right) = -P \nabla_i u^i + \Pi'^{ij} g_{jl} \nabla_i u^l + \nabla_i \left(\kappa g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right).$$

В уравнениях обозначена удельная полная энергия

$$E = \varepsilon + u^i g_{ik} u^k / 2 ,$$

$\kappa = \kappa(\rho,\ T)$ — коэффициент теплопроводности, тензор плотности потока импульса

$$\Pi^{ij} = \rho u^i u^j + P g^{ij} - \Pi'^{ij}$$

включает вязкий тензор напряжений

$$\Pi'^{ij} = \eta \left(2 e^{ij} - \frac{2}{3} g^{ij} \nabla_m u^m \right) + \zeta g^{ij} \nabla_m u^m .$$

Уравнение состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1) \rho \varepsilon = n k_{\text{B}} T,\ \gamma = 1.065.$$

Используется только вторая вязкость, коэффициент которой η можно найти в работе [3], также как и коэффициент температуропроводности κ:

$$\kappa \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{k_{\text{B}} T}{m}},\quad \eta \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{m k_{\text{B}} T} = \frac{\sqrt{4 A m_p k T}}{3 \pi^{3/2} D_0^2},$$

$$D = 0.447 \cdot 10^{-7}\ \text{cm},\quad \kappa = \frac{1}{0.05} \frac{\eta}{A m_p}.$$

Далее нужно сделать важное замечание о неправильной физической размерности компонент векторов скорости в Римановой геометрии u^i, связанных выражением с общепринятой физической скоростью с правильной размерностью компонент

$$v_i \equiv \sqrt{g_{ii}}\, u^i .$$

Далее в цилиндрических координатах

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z),\ g_{ij} = (1,\ r^2,\ 1),\quad \sqrt{|g|} = r,$$

для 2D ($\partial/\partial\theta = 0$) случая подробно распишем уравнения, содержащие вязкость

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho v_\theta^2}{r}$$
$$= \eta\left[\frac{2}{3r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right)\right) - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2}{3r}\frac{\partial^2 r v_z}{\partial r\partial z}\right],$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = \eta\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right],$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial P}{\partial z}$$
$$= \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_r}{\partial r\partial z}\right],$$

вязкий нагрев в уравнении для внутренней энергии

$$\Pi'^{ij} g_{jl}\nabla_i u^l = 2\eta\left\{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{v_r^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right.\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(r\frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right]\right\}.$$

Независимые переменные ρ, v_r, v_θ, v_z, ε. Расчетная область $0 \approx r_{\min} < r < 20$ cm, $0 < z < 80$ cm. На внешней границе задается температура и прилипание скорости (угловая скорость на крышках и боковой стенке задана), на внутренней границе $r_{\min} \approx 0$ непротекание (нормальная скорость ноль, тангенцальная непрерывна) и нет потока тепла $\partial T/\partial r = 0$.

Численный алгоритм решения задачи. Для расчетов вводится неравномерная сетка

$$r_i = r_{\max}\sin(\pi i/(2i_{\max})),\ 10 \le i \le i_{\max},$$

$$z_i = z_{\max}\frac{1\text{-}\cos}{2}\sin(\pi k/k_{\max})),\ 0 \le k \le k_{\max},$$

в узлах которой заданы сеточные функции независимых переменных. Все пространственные производные заменяются центральными конечными разностями, кроме того дополнительно к физической вводится искусственная вязкость

$$\zeta = \rho\Delta x\left(c_0\sqrt{\frac{P}{\rho}} - c_1\Delta x\begin{cases}\mathbf{divv}, & \text{if} \quad \mathbf{divv} < 0,\\ 0, & \text{if} \quad \mathbf{divv} \geq 0.\end{cases}\right)$$

Получающая система ОДУ для неизвестных функций во всех узлах сетки

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{y}, t\right),$$

является устойчивой, если для ее интегрирования использовать неявный метод Гира [4]. Точнее говоря, область устойчивости включает всю полуплоскость $\mathrm{Re}(\Delta t\lambda) < 0$, где λ есть собственные числа Якобина, только для неявных методов первого и второго порядков, однако есть менее жесткое определение $A(\alpha)$ устойчивости, когда область устойчивости включает конус $\arg(\Delta t\lambda) < \alpha$, которое полезно т.к. позволяет интегрировать уравнения схемой вплоть до 6-го порядка с большим временным шагом. Метод Гира это неявный метод предиктор-корректор с разностями назад для автоматического выбора порядка от 1-го до 6-го для достижения максимальных шагов интегрирования при заданной точности [4, 5].

Существенная проблема полностью неявной схемы состоит в большом ранге матрицы, составленной из единичной матрицы плюс Якобиан $\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}$, помноженный на временной шаг, который требуется обращать на каждом шаге:

$$\left(I + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}\alpha\Delta t \right)\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{G}\left(\mathbf{y}^n, \mathbf{y}^{n-1}, ..\right).$$

Ранг матрицы равен числу переменных, помноженных на число узлов сетки. Однако матрица является разреженной и представима в 3-диагональном виде

$$A_i\tilde{\mathbf{y}}_{i-1} + B_i\tilde{\mathbf{y}}_i + C_i\tilde{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{y}}_i = \left(\left\{\rho, u, v, w, \varepsilon\right\}\right)_i, 1 \leq i \leq i_{\max},$$

где $\tilde{\mathbf{y}}_i$ включает все наборы сеточных функций $\left\{\rho, v_r, v_\theta, v_z, \varepsilon\right\}$ для всех $1 \leq k \leq k_{\max}$ при фиксированном i. Таким образом задача

сводится к обращению $i_{\max}$ матриц размером $\left(5i_{\max}\right)^2$. Матричная прогонка требует порядка $\propto \left(5i_{\max}\right)^3 k_{\max}$ операций.

Примеры численного решения задачи. Для проверки схемы выбрано стационарное двумерное решение [3]

$$\rho\left(r,\ z,\ t=0\right)=\rho_0\left(r,\ z\right)$$

$$=\rho_*\left(\frac{v_H}{v_*}\right)^{-2\hat{z}}\left(1-4\delta\left(1-\hat{r}^2\right)\ \left(1+\frac{\mathrm{Br}}{16}\left(1+\hat{r}^2\right)\right)\right)\ P\left(r\right),$$

$$v\ \ r,z,t=0\ \ =v_0\ \ r,z\ \ =v_*\hat{r}\left(\frac{v_{\text{ОТ}}}{v_*}\right)^{\hat{z}}\left(1+\frac{\boldsymbol{\delta}}{2}\ 1-\hat{r}^2\ \ \right),$$

$$\varepsilon\left(r,\ z,\ t=0\right)=\varepsilon_0\left(r,\ z\right)$$

$$=\varepsilon_*\left(\frac{v_H}{v_*}\right)^{2\hat{z}}\left(1+4\delta\left(1-\hat{r}^2\right)\ \left(1+\frac{\mathrm{Br}}{16}\left(1+\hat{r}^2\right)\right)\right),$$

где

$$P\left(r\right)=\exp\left(\left(\hat{r}^2-1\right)\ \frac{v_*^2}{2\left(\gamma-1\right)\ \varepsilon_*}\left(1-\left(3+\frac{\mathrm{Br}}{6}-\frac{\hat{r}^2+1}{2}\left(3+\frac{\mathrm{Br}}{6}\hat{r}^2\right)\right)\ \delta\right)\right),$$

$$P\left(r,\ z,\ t=0\right)=\left(\gamma-1\right)\ \rho_*\varepsilon_*P\left(r\right),\ \hat{r}=\frac{r}{r_{\max}},\ \hat{z}=\frac{z}{z_{\max}},$$

$$\delta=\left(\frac{r_{\max}}{2z_{\max}}\ln\frac{v_H}{v_*}\right)^2=3.72\cdot10^{-5},$$

$$\mathrm{Br}=\frac{\eta v_*^2}{\kappa k_{\mathrm{B}}T_*}=0.05Am_p\frac{v_*^2}{k_{\mathrm{B}}T_*}=2.559.$$

Параметры ε_*, P_* определяются из уравнения состояния, заданной комнатной температуры $T_0=300$ К и задания атмосферного давления на границе.

Рис. 1 демонстрирует сходимость метода при увеличении числа расчетных интервалов. Ошибка определяется как корень из суммы квадратов всех сеточных функций, ортонормированных на абсолютные величины (для скоростей нормировка на максимум абсолютной величины скорости или скорости звука). Интересно отметить, что данное стационарное решение с искусственным

заданием переменной угловой скорости на границе на больших временах десятки секунд также приводит к появлению небольшого противотока [3].

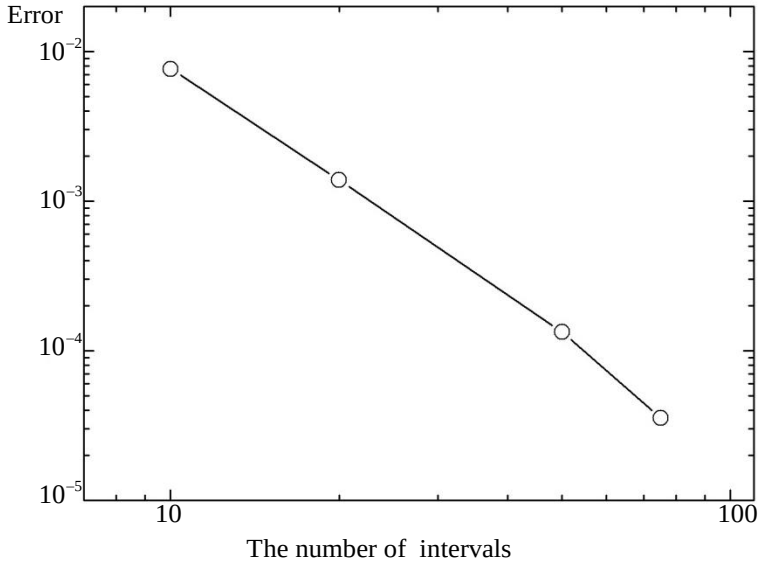


Рис. 1. Зависимость относительной ошибки решения в Эвклидовой норме всех независимых переменных во всех узлах сетки от числа интервалов $i_{\max} = k_{\max}$ в момент t = 0.01 с для тестового двумерного решения

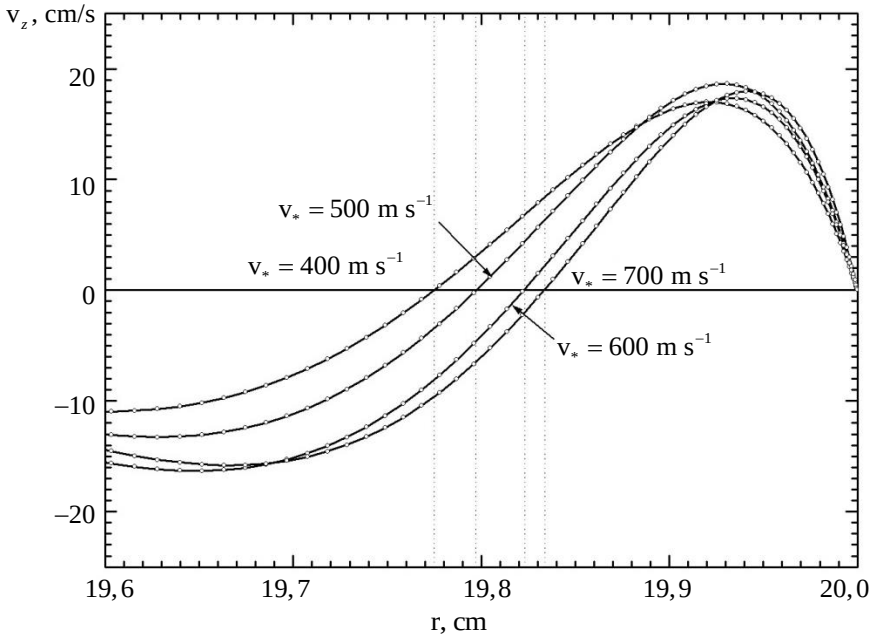


Рис. 2. Графики зависимостей аксиальных скоростей от радиуса на полувысоте цилиндра $v_z(r, z = z_{\max}/2)$ для разных скоростей вращения $v_* = 400, 500, 600, 700$ см с$^{-1}$. Вертикальные линии (точка инверсии) проведены для значений $r = 19.775$, 19.797, 19.823, 19.834 см

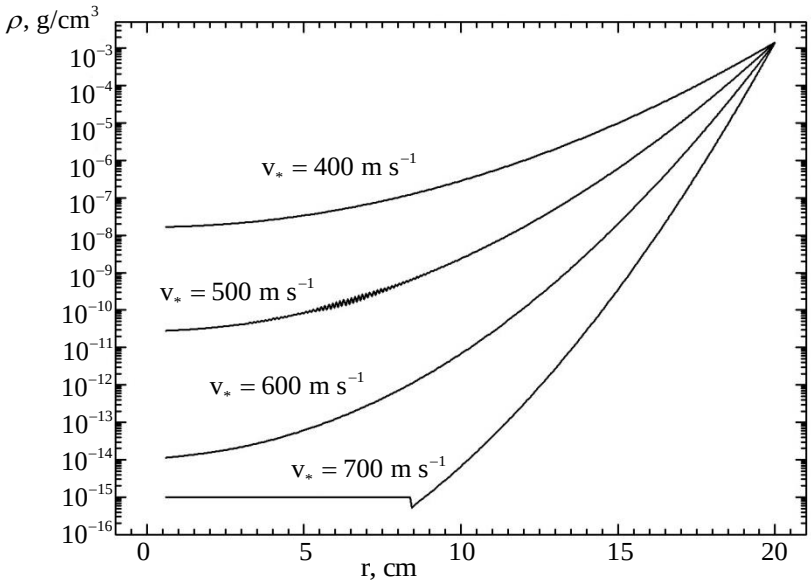


Рис. 3. Графики зависимостей плотности от радиуса на полувысоте цилиндра $v_z(r, z = z_{\max}/2)$ для разных скоростей вращения $v_* = 400, 500, 600, 700$ см с$^{-1}$ демонстрируют большие градиенты физических величин в расчетной области

Более содержательным примером является задание постоянной угловой скорости с возбуждением противотока с помощью разницы температур 1% между верхней (горячее) и нижней (холоднее) крышками, а также линейным изменением по высоте на боковой стенке. Начальное условие выписано выше (одномерная зависимость от r без учета зависимости решения от координаты z)

$$\rho / \rho_0 = P / P_0 = \exp(\rho_0 \Omega^2 (r^2 - r_0^2) / 2P_0).$$

А далее для заданных граничных условий с небольшим температурным градиентом на внешней границе путем интегрирования уравнений газовой динамики находится стационарное решение, устанавливающееся за время порядка 1 с. Рис.2 демонстрирует зависимости аксиальных скоростей от радиуса на полувысоте цилиндра $v_z(r, z = z_{\max}/2)$ для разных скоростей вращения $v_* = 400, 500, 600, 700$ см с$^{-1}$. Точки инверсии получаются для значений $r = 19.775$, 19.797, 19.823, 19.834 см, соответственно.

Направление аксиальной скорости вихря у боковой стенки совпадает с направлением градиента температуры. Рис. 3 демонстрирует демонстрируют большие градиенты плотности по всей в расчетной области. Основной газ располагается около боковой стенки, внутри находится вакуум.

Выводы. В работе сформулированы уравнения движения вязкого теплопроводного газа в криволинейных координатах. Предложена полностью неявная схема расчета таких течений в 2D постановке в цилиндрических координатах, пригодная для расчетов тонких погранслоев и проведения длительных эволюционных расчетов плоть до получения стационарного решения при наличии в задаче процессов затухания.

В качестве интересного приложения метода рассмотрено возникновение противоточного вихря в газовой центрифуге. Метод оттестирован на 2D стационарном решении.

Продемонстрировано влияние на возникновение противотока небольшого температурного градиента. В сравнении с работами других авторов, использующих расщепление по направлениям и физическим процессам, предложенная методика совмещает расчет эволюции с получением стационарного решения в случае его существования. Т.е. позволяет решить вопрос устойчивости стационарного решения.

Ограниченность метода связна с большими затратами времени CPU на обращение матриц. Однако вычисления легко векторизуются с помощью интерфейса MPI для многопроцессорных систем с общей памятью. Кроме того существует возможность векторизации циклической редукции с помощью интерфейса MPI на параллельных компьютерах кластерной архитектуры.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Villani S. *Uranium Enrichment*. Heidelberg, Springer-Verlag, 1979, 324 p.
[2] Aksenov A.G. Computation of shock waves in plasma. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, no. 55, pp. 1752-1769.
[3] Belotserkovskii, O.M. et. al. On the theory of countercurrent flow in a rotating viscous heat-conducting gas. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, no. 51, pp. 208-221.
[4] Gear C.W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
[5] Vereshchagin G.V, Aksenov A.G. *Relativistic Kinetic Theory*. Cambridge University Press, 2017. ISBN: 9781107261365.
[6] Borisevich V.D., Morozov O.E., Godisov O.N. Numerical simulation of bellows effect on flow and separation of uranium isotopes in a supercritical gas centrifuge. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2000, no. 455, pp. 487-494.
[7] Bogovalov S.V. et al. Method of Verification of the Numerical Codes for Modeling of Flows in gas Centrifuge. *Physics Procedia*. 2015, no. 72, pp. 305-309.

[8] Zeng S. et al. Solution of the simplified fluid dynamic equation for transient processes in a gas centrifuge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, no. 2147, 012002. DOI:10.1088/1742-6596/2147/1/0120023.

[9] Borman V.D. et al. The computer simulation of 3d gas dynamics in a gas centrifuge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, no. 751, 012017. DOI:10.1088/1742-6596/751/1/012017.

[10] Gu Z.Y. et al. A homotopy algorithm to solve the problems of flows under strong rotation. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, no. 1099, 012010. DOI: 10.1088/1742-6596/1099/1/012010.

[11] Gu Z. et al. Numerical study on coupling mode of mechanical and thermal drive. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, no. 1696, 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/1696/1/012002.

[12] Raschewski P.K. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. Frankfurt am Main, Verlag Harri Deutsch, 1995, 606 p. ISBN 3-8171-1366-8.

[13] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Том 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

[14] Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical theory of fields*. Course of theoretical physics - Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Oxford: Pergamon Press, 1975, 4th rev.engl.ed..

[15] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа. Учебник для вузов. — 7-е изд., испр*. Москва: Дрофа, 2003, 840 с.

[16] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Том 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[17] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.

Статья поступила в редакцию 19.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Аксенов А.Г. Двумерная модель и метод расчета противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе. *Математическое моделирование и численные методы,* 2023, № 4, с. 3–14.

Аксенов Алексей Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, с.н.с. ИАП РАН. e-mail: aksenov@fastmail.fm.

2D model and the numerical method of countercurrent flow in a rotating viscous heat-conducting gas

© A.G. Aksenov

ICAD RAS, Moscow, 123056, Russia

A countercurrent vortex of a gas centrifuge is simulated. The mathematical model of the motion of a viscous heat-conducting gas includes an equation for density, velocities and specific energy in cylindrical geometry. After the introduction of the grid, the partial derivatives over the space are replaced by finite differences, and the problem is reduced to a system of ordinary differential equations (ODES). This technique is called the Lines Method. Since the flow is supersonic, and the design area includes thin boundary layers, the ODE system is stiff due to the presence of different-time scales and a decay. In the

language of mathematics, this means a significant difference between the eigenvalues of the Jacobi matrix and the negative real parts. Therefore, to solve the problem, it is useful to use the implicit Geer method for the ODE system without splitting the problem into physical processes and directions. An effective method for solving the Jacobin matrix inversion is the use of the cyclic reduction method in the matrix variant. As an example, the countercurrent flow arising due to the temperature gradient is demonstrated.
***Keywords**: countercurrent flow in a gas centrifuge, supersonic flow in viscous heat-conducting gas, implicit conservative scheme, Gear's method*

REFERENCES

[1] Villani S. *Uranium Enrichment*. Heidelberg, Springer-Verlag, 1979, 324 p.
[2] Aksenov A.G. Computation of shock waves in plasma. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, no. 55, pp. 1752-1769.
[3] Belotserkovskii, O.M. et. al. On the theory of countercurrent flow in a rotating viscous heat-conducting gas. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, no. 51, pp. 208-221.
[4] Gear C.W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
[5] Vereshchagin G.V, Aksenov A.G. *Relativistic Kinetic Theory*. Cambridge University Press, 2017. ISBN: 9781107261365.
[6] Borisevich V.D., Morozov O.E., Godisov O.N. Numerical simulation of bellows effect on flow and separation of uranium isotopes in a supercritical gas centrifuge. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2000, no. 455, pp. 487-494.
[7] Bogovalov S.V. et al. Method of Verification of the Numerical Codes for Modeling of Flows in gas Centrifuge. *Physics Procedia*. 2015, no. 72, pp. 305-309.
[8] Zeng S. et al. Solution of the simplified fluid dynamic equation for transient processes in a gas centrifuge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, no. 2147, 012002. DOI:10.1088/1742-6596/2147/1/0120023.
[9] Borman V.D. et al. The computer simulation of 3d gas dynamics in a gas centrifuge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, no. 751, 012017. DOI:10.1088/1742-6596/751/1/012017.
[10] Gu Z.Y. et al. A homotopy algorithm to solve the problems of flows under strong rotation. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, no. 1099, 012010. DOI: 10.1088/1742-6596/1099/1/012010.
[11] Gu Z. et al. Numerical study on coupling mode of mechanical and thermal drive. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, no. 1696, 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/1696/1/012002.
[12] Raschewski P.K. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. Frankfurt am Main, Verlag Harri Deutsch, 1995, 606 p. ISBN 3-8171-1366-8.
[13] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. Tom 1. Tenzornyj analiz [Continuum mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]*. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
[14] Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical theory of fields*. Course of theoretical physics - Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Oxford: Pergamon Press, 1975, 4th rev.engl.ed..
[15] Loytsyansky L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquids and gases]*. Moscow: Drofa [Bustard], 2003, 840 p.
[16] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. Tom 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy [Solid medium mechanics. Vol. 2.*

Universal Laws of Mechanics and solid-medium electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[17] Dimitrienko Yu.I. *Nelinejnaya mekhanika sploshnoj sredy [Nonlinear solid medium mechanics]*. Moscow, Fizmatlit, 2009, 610 p.

Aksenov A.G., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researher ICAD RAS. e-mail: aksenov@fastmail.fm.