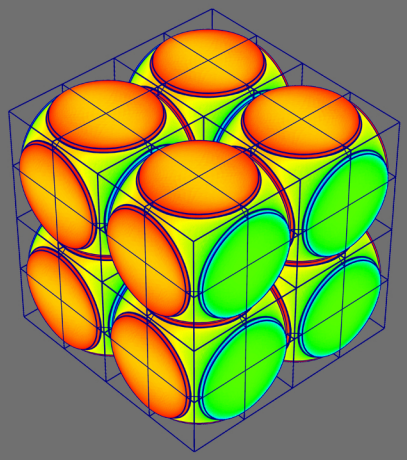
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Носов В.Н., Савин А.С. Численное исследование воздействия внутренней волны на поверхность двухслойного потока, обтекающего точечный источник. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 3, с. 92–104.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/318/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 06:28:33

УДК 532.59 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-3-92104

Численное исследование воздействия внутренней волны на поверхность двухслойного потока, обтекающего точечный источник

© В.Н. Носов[1], А.С. Савин[2]

[1]ГЕОХИ РАН, Москва, 119991, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено обтекание точечного источника, локализованного в нижнем слое двухслойной жидкости со свободной поверхностью. Получены выражения для возмущения свободной поверхности жидкости, связанного с проявлением внутренней волны. Действующий в жидкости источник представлен как суперпозиция точечных импульсных источников. Такой подход позволил найти возмущение поверхности потока как суперпозицию возмущений, вызываемых точечными импульсными источниками. Использованное приближение вполне оправдано в случаях моделирования реальных источников возмущений, находящихся на значительных глубинах, поскольку такие источники вызывают малые возмущения морской поверхности. Установлено, что проявляющиеся на поверхности потока внутренние волны образуют клиновидную структуру. Угол раствора клина выходящих на поверхность внутренних волн уменьшается с ростом скорости потока. Найдена зависимость угла раствора волнового клина от числа Фруда, определяемого по скорости потока и толщине верхнего слоя жидкости. Рассмотренная задача представляет теоретический и практический интерес, поскольку более сложные модели реальных возмущений поверхности морской среды при обтекании различных неоднородностей могут быть построены как суперпозиции модельных элементарных возмущений от точечных источников.

Ключевые слова: *поток двухслойной жидкости, точечный источник, проявление внутренней волны на поверхности жидкости*

Введение. Используемые для мониторинга морской среды радиолокаторы и лазерные системы позволяют измерять различные характеристики свободной поверхности океана. При этом процессы, протекающие в толще водной среды, на большой глубине, не доступны для непосредственного наблюдения. Изучение таких процессов по данным дистанционного зондирования морской поверхности представляет собой важную научную и практическую проблему [1]. Физически обоснованное и математически корректное исследование этой проблемы должно основываться на решениях гидродинамических задач о возмущении морской поверхности различными источниками, локализованными в водной среде. Значительный интерес представляют возмущения, возникающие при обтекании морскими течениями различных неоднородностей, например, неровностей дна. Существенное влияние на характер возмущений поверхности оказывает стратификация морской среды. В реальных условиях открытого моря наблюдаются

скачкообразные изменения плотности воды с глубиной, связанные, прежде всего, с наличием сезонного и главного термоклинов. При обтекании неоднородностей на границе слоёв жидкости с разными плотностями возникают внутренние волны [2–7]. Эти волны имеют длину порядка сотен метров, оказывают воздействие на морскую поверхность и поэтому могут быть зарегистрированы средствами дистанционного зондирования, находящимися на авиационных и космических носителях [8–11]. К развитию и усовершенствованию методов наблюдения внутренних волн по их проявлениям на морской поверхности наблюдается устойчивый интерес [12–20].

Численное моделирование генерации внутренних волн может осуществляться на основе решения уравнений гидродинамики при точном соблюдении условий непротекания на границе находящейся в потоке неоднородности, например, [21, 22]. Существенное упрощение этой задачи состоит в замене моделируемых неоднородностей в жидкой среде эквивалентной системой гидродинамических особенностей [23–25]. При таком подходе расчёт волн, порождаемых неоднородностью в жидкой среде, может быть основан на определении элементарных волн от каждой из моделирующих эту неоднородность гидродинамических особенностей. Если рассматриваемая неоднородность вызывает волны небольшой амплитуды, то они представляет собой суперпозицию элементарных волн. Точечная гидродинамическая особенность характеризуется небольшим числом параметров, например, точечный источник полностью задаётся своими координатами и интенсивностью, то есть объёмом выбрасываемой в единицу времени жидкости [26, 27]. Задача о поверхностных волнах, возникающих при обтекании точечного источника в однородной жидкости, привлекла внимание многих исследователей, ее подробное решение и история вопроса содержатся в монографии [28]. Генерация внутренних волн в толще стратифицированной жидкости точечным источником рассмотрена в монографиях [6, 7]. Приведенные там решения получены в приближении «твердой крышки», то есть в предположении о том, что поверхность жидкости не движется и совпадает с горизонтальной плоскостью. Такой подход вполне оправдан, если речь идет исключительно о внутренних волнах в толще жидкой среды, поскольку он существенно упрощает математическую сторону задачи. Однако при изучении поверхностных возмущений приближение «твердой крышки» заведомо не применимо.

На свободной поверхности моря могут возникать волны двух типов: баротропные и бароклинные [5]. Волны первого типа, получившие название баротропных, в силу относительно небольшого перепада плотности морской среды, слабо зависят от ее стратификации и практически совпадают с волнами в однородной среде, порождаемыми рассматриваемыми источниками возмущений. Волны второго типа,

называемые бароклинными, существенно зависят от стратификации водной среды и, наряду с баротропными волнами, проявляются на морской поверхности. Обычно обтекаемые морским течением неоднородности находятся на достаточно большой глубине, поэтому порождают малые возмущения морской поверхности. В силу этого, полное волновое поле на морской поверхности, вызванное обтекаемой неоднородностью, представляет собой суперпозицию баротропных и бароклинных возмущений. С учетом сказанного выше, решение достаточно точно описывает баротропные волны на поверхности слабо стратифицированной жидкой среды, в частности, морской [28]. В настоящей работе рассматривается пространственная задача о генерации бароклинных волн на поверхности двухслойной жидкости, обтекающей точечный источник, локализованный в ее нижнем слое. Предлагаемый подход основан на решении задачи об импульсном точечном источнике в нижнем слое жидкости [29]. Непрерывно действующий в жидкости источник представлен как суперпозиция импульсных источников, а возникающая от непрерывно действующего источника волна — как суперпозиция волн от импульсных источников. На основе такого подхода получено весьма простое интегральное представление решения задачи о бароклинных волнах на поверхности двухслойной жидкости, позволившее провести его численное исследование.

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим сначала неподвижную тяжёлую двухслойную жидкость со свободной поверхностью. Обозначим плотность жидкости в верхнем слое через ρ_1, в нижнем — через ρ_2. Будем считать, что $\rho_1 < \rho_2$, то есть жидкость находится в состоянии устойчивого равновесия. Пусть в нижнем слое жидкости локализован неподвижный точечный источник переменной интенсивности $Q = Q(t)$. Направим ось z вверх и проведём её через рассматриваемый источник. Если жидкость не ограничена по горизонтали, а её течение вызвано исключительно источником, то задача обладает цилиндрической симметрией. То есть ни одна из величин, характеризующих поле гидродинамических возмущений от источника, не зависит от полярного угла α, отсчитываемого от любой фиксированной прямой, лежащей в горизонтальной плоскости. В силу этого обстоятельства естественно искать возмущения жидкости источником в цилиндрической системе координат (r, α, z).

Пусть в невозмущённом состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z = 0$, граница раздела жидких слоёв — с плоскостью $z = -H$, а источник находится в точке $(0, 0, -h)$. Если в некоторый момент времени источник начинает свою работу, то под его воздействием на свободной поверхности жидкости и на границе

раздела жидких слоёв возникают волны. При достаточно большом удалении источника от границы раздела слоев жидкости эти волны имеют амплитуды, много меньшие их длин. В рамках этого допущения, именуемого приближением малых волн, поле скорости жидкости является потенциальным в каждом слое [30]. Точнее, в нижнем слое это поле потенциально всюду, кроме точки локализации источника.

Если источник, находящийся в точке $(0,0,-h)$ нижнего слоя жидкости, выбрасывает в момент времени $t=0$ жидкость объема dV, то, как показано в [29], на поверхности жидкости, вместе с баротропной, возникает бароклинная волна

$$dS(r,t)=s(r,t)\,dV,\quad s(r,t)=\int_0^\infty G(\rho)\cos\left(\omega(\rho)t\right)J_0(r\rho)\,d\rho; \tag{1}$$

$$G(\rho)=-\frac{(1-\delta)}{2\pi}\frac{\rho th(H\rho)}{(1+\delta th(H\rho))}\frac{(1+th(H\rho))}{(1+(2\delta-1)th(H\rho))}\exp(-h\rho);$$
$$\omega(\rho)=\sqrt{\frac{(1-\delta)\rho g th(H\rho)}{1+\delta th(H\rho)}}; \tag{2}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\delta=\delta_1/\delta_2$.

Точечный источник постоянной интенсивности Q выбрасывает в момент времени τ жидкость бесконечно малого объема $dV=Qd\tau$ и, таким образом, генерирует элементарную волну

$$dS(r,t-\tau)=Qs(r,t-\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

эволюционирующую при $t>\tau$ по закону (1) – (2).

Если точечный источник находится в потоке, имеющем в неподвижной системе отсчета xOy, связанной с источником, скорость v в положительном направлении оси x, то элементарная кольцевая волна, возникшая в момент времени τ, сносится потоком и, в соответствии с (3), эволюционирует в подвижной системе отсчета XOY, связанной с центром волны, по закону

$$dS=dS(R,t-\tau),\quad R=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{4}$$

Поскольку $x=X+v(t-\tau)$, $y=Y$ в неподвижной системе отсчета xOy, связанной с источником, элементарная волна (4) эволюционирует по закону

$$dS=Qs\left(\sqrt{\left(x-v(t-\tau)\right)^2+y^2},t-\tau\right)d\tau. \tag{5}$$

Если источник начинает свою работу в момент времени $t = 0$, то в момент времени $t > 0$ на поверхности потока, в соответствии с (5), образуется волна

$$S(x, y, t) = Q\int_0^t s(\sqrt{(x - v(t-\tau))^2 + y^2}), t-\tau)d\tau$$

или, с учетом выражений (1), (2),

$$S(x, y, t) = Q\int_0^t\int_0^\infty G(\rho)\cos\left(\omega(t-\tau)\right) J_0\left(\rho\sqrt{\left(x - v(t-\tau)\right)^2 + y^2}\right)d\rho d\tau. \quad (6)$$

Изменив в формуле (6) порядок интегрирования, получим выражение

$$S(x, y, t) = Q\int_0^\infty G(\rho)\int_0^t \cos\left(\omega(t-\tau)\right) J_0\left(\rho\sqrt{\left(x - v(t-\tau)\right)^2 + y^2}\right)d\tau d\rho. \quad (7)$$

Переходя в (7) к пределу $(t \to +\infty)$, находим, что при длительной работе источника на поверхности потока устанавливается волна

$$S(x, y) = Q\int_0^\infty G(\rho)\int_0^\infty \cos(\omega\xi) J_0\left(\rho\sqrt{(x - v\xi)^2 + y^2}\right)d\xi d\rho. \quad (8)$$

Путем предельного перехода $(t \to +\infty)$ в (8) находим волну далеко вниз по потоку за источником

$$S(x, y) = \frac{Q}{v}\int_0^\infty G(\rho)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\omega}{v}(\eta + x)\right) J_0\left(\rho\sqrt{\eta^2 + y^2}\right)d\eta d\rho. \quad (9)$$

Выразив внутренний интеграл в (9) с помощью известных формул теории функций Бесселя [14], получим, что далеко за источником устанавливается бароклинная волна

$$S(x, y) = \frac{2Q}{v}\int_0^\infty G(\rho)\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right)\frac{\cos\left(y\sqrt{\rho^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}\right)}{\sqrt{\rho^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}}d\rho. \quad (10)$$

Наклон волны в каждом сечении $x = \text{const}$, находится из формулы (10)

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = -\frac{2Q}{v}\int_0^\infty G(\rho)\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right)\sin\left(y\sqrt{\rho^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}\right)d\rho. \quad (11)$$

Выражения (10), (11) справедливы при условии $\omega\nu^{-1} < \rho$, задающем область определения подынтегральных функций, в противном случае они равны нулю [31]. Нетрудно показать, что это условие выполняется при

$$\nu > \nu_{\min} = \sqrt{(1-\delta)gH}.$$

Как правило, в реальных морских условиях $\delta \geq 0{,}993$, $H \leq 30$ м. Это означает, что максимальное значение величины $\nu_{\min}$ составляет $1{,}4$ м/с. Иными словами, в условиях реального моря генерация бароклинной волны (10), (11) заведомо происходит при скорости потока, большей $1{,}4$ м/с.

Численный анализ полученных результатов. Приведем формулы (10), (11) к безразмерному виду. Положим

$$x = XH,\ y = YH,\ h = LH,\ H\rho = p.$$

Введем обозначения

$$F(p) = \sqrt{\frac{(1-\delta)\,pth(p)}{1+\delta th(p)}};$$

$$Fr = \frac{\nu}{\sqrt{gH}};$$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi\nu}}.$$

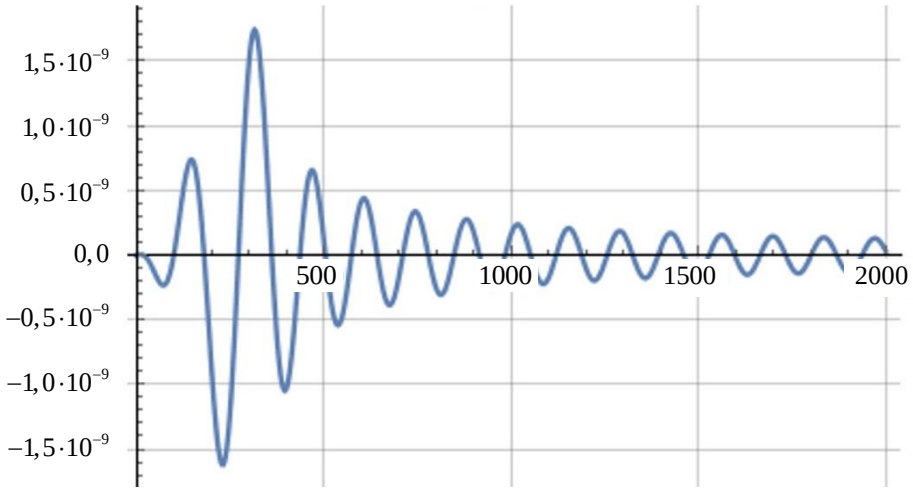
Здесь Fr — число Фруда, определенное по скорости потока и толщине верхнего слоя жидкости. Из формулы (10) следует выражение для безразмерного отклонения свободной поверхности жидкости от равновесного положения в произвольной точке с безразмерными координатами X, Y

$$D(X,Y) = -\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^\infty F^2(p)\frac{(1+th(p))}{1+(2\delta-1)th(p)}\exp(-Lp)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{XF(p)}{Fr}\right)\frac{\cos\left(Y\sqrt{p^2-\left(\frac{F(p)}{Fr}\right)^2}\right)}{\sqrt{p^2-\left(\frac{F(p)}{Fr}\right)^2}}dp. \qquad (12)$$

Вычислив частную производную выражения (12) по Y, получаем формулу для наклона волны в каждом сечении $X = \text{const}$

$$\frac{\partial D}{\partial Y}(X,Y)=\left(\frac{R}{H}\right)^2\int_0^\infty F^2(p)\frac{\left(1+th(p)\right)}{1+(2\delta-1)th(p)}\exp(-Lp)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{XF(p)}{Fr}\right)\sin\left(Y\sqrt{p^2-\left(\frac{F(p)}{Fr}\right)^2}\right)dp. \qquad (13)$$

На рис.1 в качестве примера представлены графики зависимостей наклона поверхности жидкости $D_Y = D_Y(X,Y)$ от Y в различных сечениях $X = 700,\ 1500,\ 3000$, построенные при $\delta = 0{,}997$; $L = 6$; $R/H = 0{,}2$; $Fr = 0{,}15$. Как показали численные расчеты, аналогичные картины наблюдаются и при других значениях параметров. Из полученных результатов следует, что в каждом сечении $X = \text{const}$ в направлении от оси OX распространяется волновой пакет, сосредоточенный в относительно узкой области. Прямые вычисления показали, что отношение расстояния центра волнового пакета от оси OX к координате X, определяющей сечение, остается практически постоянным. Это означает, что в системе координат, связанной с источником, волновые возмущения наиболее ярко выражены в окрестностях прямых, исходящих из точки, лежащей над источником и образующих некоторый угол α с осью OX. Зависимость этого угла от числа Фруда показана на рис. 2. Видно, что при увеличении числа Фруда угол раствора волнового клина за источником уменьшается. При фиксированной толщине верхнего слоя жидкости увеличение числа Фруда означает возрастание скорости потока.



а

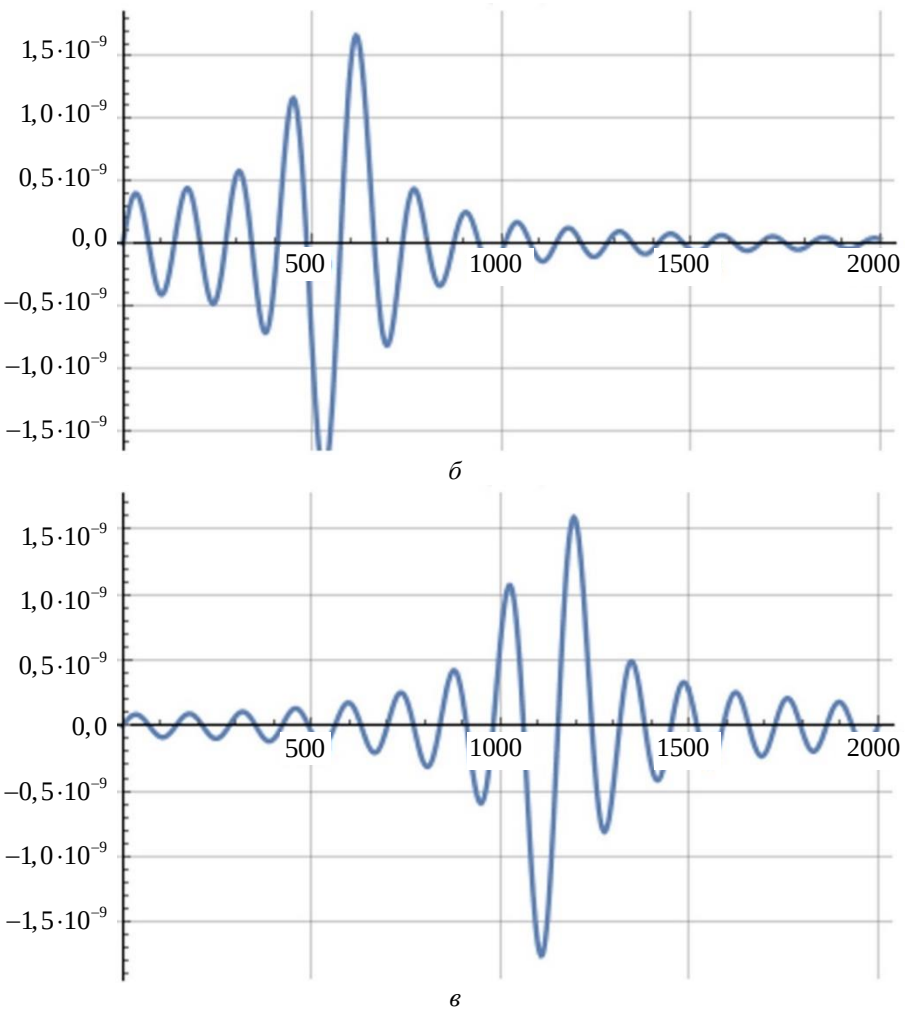


Рис. 1. Графики зависимостей наклона поверхности жидкости D_Y от Y в различных сечениях:
а — $X = 700$; *б* — $X = 1500$; *в* — $X = 3000$

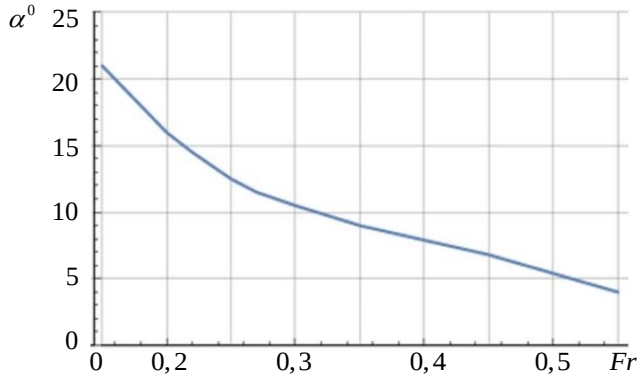


Рис. 2. График зависимости угла полураствора волнового клина от числа Фруда

Заключение. Для расчета бароклинных волн на поверхности потока двухслойной жидкости, обтекающего неподвижный точечный источник в нижнем слое, получены сравнительно простые выражения, содержащие только однократные интегралы. В результате расчетов на основе полученных выражений установлено, что далеко вниз по потоку за источником бароклинные волны на поверхности жидкости образуют характерный клин. В силу монотонного убывания угла раствора волнового клина при возрастании числа Фруда, связь между этим углом и числом Фруда является взаимно однозначной. Этот эффект может быть положен в основу определения числа Фруда и, следовательно, скорости потока, обтекающего источник возмущения, по измеренному на морской поверхности углу расхождения выходящих на поверхность внутренних волн. Кроме того, решение задачи об обтекании точечного источника дает основу для получения оценок возмущений от более сложных неоднородностей и поэтому представляет интерес при разработке требований к аппаратуре дистанционного зондирования морской поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И., ред. *Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли.* Москва, Научный мир, 1996, 272 с.

[2] Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане.* Ленинград, Гидрометеоиздат, 1981, 304 с.

[3] Черкесов Л.В. *Поверхностные и внутренние волны.* Киев, Наукова думка, 1973, 248 с.

[4] Букатов А.Е., Черкесов Л.В. *Волны в неоднородном море.* Киев, Наукова думка, 1983, 224 с.

[5] Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. *Введение в гидродинамику и теорию волн.* Санкт-Петербург, Гидрометеоиздат, 1992, 264 с.

[6] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах.* Москва, Наука, 2005, 195 с.

[7] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Волны в стратифицированных средах.* Москва, Наука, 2015, 735 с.

[8] Бондур В.Г., Мурынин А.Б. Методы восстановления спектров морского волнения по спектрам аэрокосмических изображений. *Исследование Земли из космоса*, 2015, № 6, с. 3−14.

[9] Бондур В.Г., Дулов В.А., Мурынин А.Б., Юровский Ю.Ю. Исследование спектров морского волнения в широком диапазоне длин волн по спутниковым и контактным данным. *Исследование Земли из космоса*, 2016, № 1–2, с. 7–24.

[10] Breon F.M., Henriot N. *Spaceborne observations of ocean glint reflectans and modeling of wave slope distributions. Journal of Geophysical Research*, 2006, vol.111, C06005. DOI:10.1029/2005JC003343

[11] Apel J.R., Byrne H.M., Proni J.R., Charnell R.L. Observations of oceanic internal and surface waves from the earth resources technology satellite. *Journal of Geophysical Research*, 1975, vol. 80, no. 6, pp. 865–881.

[12] Curtin T.B., Mooers C.N.K. *Observation and interpretation of a highfrecuency internal wave packet and surface slick pattern. Journal of Geophysical Research*, 1975, vol. 80, no. 6, pp. 882–894.

[13] Alpers W. Theory of radar imaging of internal waves. *Nature*, 1985, vol. 314, pp. 245–247.

[14] Craig W., Guyenne P., Sulem C. The surface signature of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, vol. 710, pp. 277–303.

[15] Hao X., Shen L. Direct simulation of surface roughness signature of internal wave with deterministic energy-conservative model. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 891, R3. DOI:10.1017/jfm.2020.200

[16] Lenain L., Pizzo N. Modulation of surface gravity waves by internal waves. *Journal of Physical Oceanography*, 2021, vol. 51, pp. 2735–2748.

[17] Басович А.Я. Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны. *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1977, т. 15, № 6, с. 655–661.

[18] Басович А.Я., Баханов В.В., Браво-Животовский Д.М., Гордеев Л.Б., Жидко Ю.М., Муякшин С.И. О корреляции изменения спектральной плотности сантиметровых и дециметровых поверхностных волн в поле внутренней волны. *Доклады АН СССР*, 1988, т. 298, № 4, с. 967–971.

[19] Ермаков С.А., Салашин С.Г. Об эффекте сильной модуляции капиллярно-гравитационной ряби внутренними волнами. *Доклады АН СССР,* 1994, т. 337, № 1, с. 108–111.

[20] Горшков К.А., Долина И.С., Соустова И.А., Троицкая Ю.И. Модуляция коротких ветровых волн в присутствии интенсивных внутренних волн. Эффект модуляции инкремента. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2003, т. 39, № 5, с. 661–672.

[21] Стурова И.В. Волновые движения, возникающие в жидкости со ступенчатой стратификацией, при обтекании погруженного тела. *Прикладная механика и техническая физика,* 1974, т. 15, № 6, с. 80–91.

[22] Рождественская Т.И. Численное исследование трехмерных течений неоднородной жидкости около кругового цилиндра. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 86–99.

[23] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия стратифицированного течения на подводный трубопровод. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 62–76.

[24] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия на горизонтальные элементы конструкций в верхнем слое стратифицированного течения. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 4, с. 74–87.

[25] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н Гидродинамические реакции в модели циркуляционного обтекания трубопровода придонным морским течением. *Математическое моделирование и численные методы,* 2015, № 3, с. 41–57.

[26] Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* Москва, Наука, 1977, 407 с.

[27] Милн-Томпсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика.* Москва, Мир, 1964, 655 с.

[28] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости.* Москва, Наука, 1977, 815 с.

[29] Носов В.Н., Савин А.С. Численное моделирование возмущения свободной поверхности двухслойной жидкости точечным источником, локализованным в нижнем слое. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 3, с. 113–124.

[30] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *ГиДроДинамика.* Москва, Наука, 1986, 736 с.
[31] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва, Наука, 1971, 1108 с.

Статья поступила в редакцию 30.05.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Носов В.Н., Савин А.С. Численное исследование воздействия внутренней волны на поверхность двухслойного потока, обтекающего точечный источник. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 3, с. 92–104.

Носов Виктор Николаевич — д-р техн. наук, зав. отделом морских исследований ГЕОХИ РАН. e-mail: viktor_nosov@mail.ru

Савин Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: assavin@list.ru

Numerical study of the effect of an internal wave on the surface of a two-layer flow flowing around a point source

© V.N. Nosov[1], A.S. Savin[2]

[1]Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The flow around a point source localized in the lower layer of a two-layer liquid with a free surface is considered. Expressions are obtained for the perturbation of the free surface of the liquid associated with the manifestation of an internal wave. The source operating in the liquid is represented as a superposition of point pulse sources. This approach made it possible to find the perturbation of the flow surface as a superposition of perturbations caused by point pulse sources. The approximation used is quite justified in cases of modeling real sources of disturbances located at considerable depths, since such sources cause small disturbances of the sea surface. It is established that the internal waves appearing on the flow surface form a wedge-shaped structure. The angle of the wedge solution of the internal waves coming to the surface decreases with increasing flow velocity. The dependence of the angle of the wave wedge solution on the Froude number determined by the flow velocity and thickness of the upper liquid layer is found. The considered problem is of theoretical and practical interest, since more complex models of real disturbances of the surface of the marine environment during the flow of various inhomogeneities can be constructed as superpositions of model elementary disturbances from point sources.

Keywords: *flow of a two-layer liquid, point source, manifestation of an internal wave on the surface of the liquid*

REFERENCES

[1] Nesterov S.V., Shamayev A.S., Shamaev S.I. *Metody, protsedury i sredstva aerkosmicheskoy komputernoy radiotomografii pripoverkhnostnykh oblastey Zemli* [Methods, procedures and tools in aerospace computer radiotomography of the Earth surficial regions]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 1996, 272 p.

[2] Miropolsky Yu.Z. *Dinamika vnutrennih gravitacionnyh voln v okeane* [Dynamics of internal gravitational waves in the ocean]. Leningrad, Hydrometeoizdat Publ., 1981, 304 p.
[3] Cherkesov L.V. *Poverkhnostnye i vnutrennie volny* [Surface and internal waves]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1973, 248 p.
[4] Bukatov A.E., Cherkesov L.V. *Volny v neodnorodnom more* [Waves in an inhomogeneous sea]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1983, 224 p.
[5] Cherkesov L.V., Ivanov V.A., Khartiev S.M. *Vvedenie v gidrodinamiku i teoriyu voln* [Introduction to hydrodynamics and wave theory]. St. Petersburg, Hydrometeoizdat Publ., 1992, 264 p.
[6] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Vnutrennie gravitatsionnye volny v neodnorodnykh sredakh* [Internal gravitational waves in inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 195 p.
[7] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Volny v stratifitsirovannykh sredakh* [Waves in stratified media]. Moscow, Nauka Publ., 2015, 735 p.
[8] Bondur V.G., Murynin A.B. Methods for retrieval of sea wave spectra from aerospace image spectra. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2016, vol. 52, no. 9, pp. 877–887.
[9] Bondur V.G., Dulov V.A., Murynin A.B., Yurovsky Y.Y. A study of sea-wave spectra in a wide wavelength range from satellite and in-situ data. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2016, vol. 52, no. 9, pp. 888–903.
[10] Breon F.M., Henriot N. Spaceborne observations of ocean glint reflectans and modeling of wave slope distributions. *Journal of Geophysical Research*, 2006, vol. 111, C06005. DOI:10.1029/2005JC003343
[11] Apel J.R., Byrne H.M., Proni J.R., Charnell R.L. Observations of oceanic internal and surface waves from the earth resources technology satellite. *Journal of Geophysical Research*, 1975, vol. 80, no. 6, pp. 865–881.
[12] Curtin T.B., Mooers C.N.K. *Observation and interpretation of a highfrecuency internal wave packet and surface slick pattern. Journal of Geophysical Research*, 1975, vol. 80, no. 6, pp. 882–894.
[13] Alpers W. Theory of radar imaging of internal waves. *Nature*, 1985, vol. 314, pp. 245–247.
[14] Craig W., Guyenne P., Sulem C. The surface signature of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, vol. 710, pp. 277–303.
[15] Hao X., Shen L. Direct simulation of surface roughness signature of internal wave with deterministic energy-conservative model. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 891, R3. DOI:10.1017/jfm.2020.200
[16] Lenain L., Pizzo N. Modulation of surface gravity waves by internal waves. *Journal of Physical Oceanography*, 2021, vol. 51, pp. 2735–2748.
[17] Basovich A.Ya. Transformation of the surface wave spectrum under the action of an internal wave. *Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Physics of the Atmosphere and Ocean*, 1977, vol. 15, no. 6, pp. 655–661.
[18] Basovich A.Ya., Bakhanov V.V., Bravo-Zhivotovsky D.M., Gordeev L.B., Zhidko Yu.M., Muyakshin S.I. On the correlation of changes in the spectral density of centimeter and decimeter surface waves in the internal wave field. *Doklady Akademii Nauk*, 1988, vol. 298, no. 4, pp. 967–971.
[19] Ermakov S.A., Salashin S.G. Effect of strong modulation of gravity-capillary waves by internal waves. *Doklady Akademii Nauk*, 1994, vol. 337, no. 1, pp. 108–111.
[20] Gorshkov K.A., Dolina I.S., Soustova I.A., Troitskaya Yu.I. Modulation of short wind waves in the presence of strong internal waves: the effect of growth-rate modulation. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2003, vol. 39, no. 5, pp. 596–606.

[21] Sturova I.V. Wave motions produced in a stratified liquid from flow past a submerged body. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1974, vol. 15, iss. 6, pp. 796–805.

[22] Rozhdestvenskaya T.I. Numerical simulation of 3D stratified fluid flows around circular cylinder. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 1, pp. 86–99.

[23] Vladimirov I.Y., Korchagin N.N., Savin A.S. Simulation of wave influence of a stratified current on an underwater pipeline. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 62–76.

[24] Vladimirov I.Y., Korchagin N.N., Savin A.S. Simulation of wave action on horizontal structure elements in the upper layer of stratified flow. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 74–87.

[25] Vladimirov I.Y., Korchagin N.N., Savin A.S. Hydrodynamic reactions in the model of circulatory streamlining the pipeline by bottom sea currents. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 41–57.

[26] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Problemy gidrodinamiki i ikh matematicheskie modeli* [Problems of hydrodynamics and their mathematical models]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 407 p.

[27] Milne-Thompson L. M. *Theoretical hydrodynamics.* London, Macmillan Publ., 1938, 552 p.

[28] Sretensky L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [The theory of wave motion of a liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[29] Nosov V.N., Savin A.S. Numerical simulation of perturbation of two-layer liquid free surface by a point source localized in the lower layer. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 3, pp. 113–124.

[30] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Gidrodynamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.

[31] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 1108 p.

Nosov V.N., Dr. Sc. (Eng.), Head of the Department of Maritime Research, Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of Russian Academy of Sciences. e-mail: viktor_nosov@mail.ru

Savin A.S., Dr. Sc. (Phys. —Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: assavin@list.ru