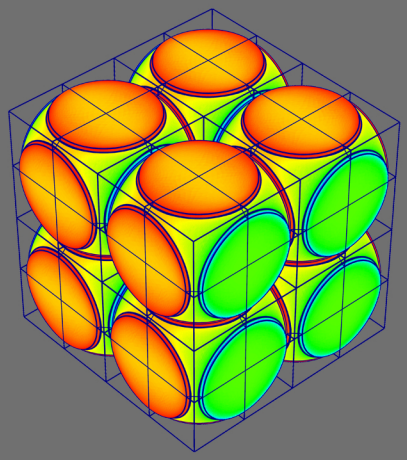
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Гущин В.А., Смирнова И.А. Математическое моделирование цепочки пятен с различными интервалами в стратифицированной жидкости. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 3, с. 80–91.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/317/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 07:56:28

УДК 519.6:532.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-3-8091

Математическое моделирование цепочки пятен с различными интервалами в стратифицированной жидкости

© В.А. Гущин, И.А. Смирнова

ИАП РАН, Москва, 117485, Россия

Проведено сравнение динамики цепочки пятен перемешанной вязкой жидкости в стратифицированной среде, с различными начальными интервалами между пятнами. Для математического моделирования используется метод расщепления для исследования течений несжимаемой жидкости (МЕРАНЖ). Конечно-разностная схема метода имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальную схемную диссипацию и дисперсию, обладает свойством монотонности. Приведены результаты сравнения динамики функции тока в зависимости от начального интервала между пятнами.

Ключевые слова: *несжимаемая вязкая жидкость, соленость, стратификация, приближение Буссинеска, метод расщепления*

Введение. В стратифицированной среде атмосферы и океана наблюдаются блиннообразные горизонтальные пятна перемешанной жидкости, возникающие при опрокидывании внутренних океанических волн [1]. Пятно перемешанной жидкости имеет повышенную соленость и давление. Пятно стремительно образуется и долгое время существует, постепенно сплющиваясь. Горизонтальный размер пятна значительно превышает его размер по вертикали [2–5]. Избыточное давление внутри пятна вызывает его коллапс в форме интрузий в окружающую океаническую среду. Мгновенное распределение гидрофизических параметров (плотности, температуры, солености) по глубине никогда не бывает гладким, а носит ступенчатый характер: участки, где гидродинамические характеристики постоянны, сменяются участками с большими их градиентами. Это связано с тем, что в турбулентном потоке с сильно устойчивой стратификацией турбулентность распространена не повсеместно, а пятнами. Неоднородный и сильно анизотропный характер турбулентности в условиях сильной устойчивой стратификации был предсказан А.Н. Колмогоровым еще в конце 40-х годов. Блиннообразные пятна оказываются резко ограниченными и долго живущими в океане. Пятна эволюционируют, постепенно сплющиваясь и внедряясь в окружающую среду языками — интрузиями. Перемешанность жидкости в пятне создает в нем избыточное по сравнению с окружающей средой давление, которое и порождает движущую силу интрузии. Под влиянием этой силы происходит расплывание (коллапс) пятна. Возникновение и развитие пятен перемешанной

жидкости в стратифицированной среде представляет существенный интерес в связи с изучением тонкой структуры океана, а также исследованием динамики следа за движущимся подводным объектом.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Рассмотрим плоскую нестационарную задачу о течении, которое возникает при коллапсе области А однородной жидкости под действием силы тяжести. Область А окружена устойчиво и непрерывно стратифицированной по плотности жидкостью (рис. 1). Плотность изменяется по линейному закону.

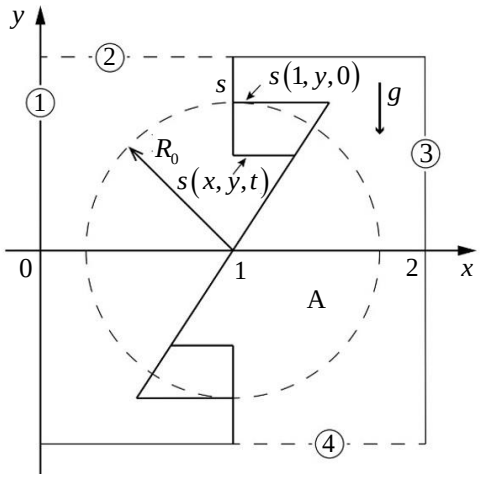


Рис. 1. Начальное $s(1, y, 0)$ и установившееся $s(x, y, t)$ поля возмущения солености

Течение развивается в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения g. Невозмущенное линейное распределение плотности:

$$\rho(x, y) = \rho_0 \left(1 - \frac{y}{\Lambda} + s(x, y) \right) \tag{1}$$

характеризуется масштабом стратификации:

$$\Lambda = \left| \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right|^{-1}, \; a = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_0 < 0,$$

где частота плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$, период плавучести $T_b = 2\pi/N$; $R_0 < 1$ — начальный радиус пятна, s — возмущение солености (стратифицирующего компонента), включающее коэффициент солевого сжатия.

Выберем в качестве характерного линейного размера радиус пятна R_0 в начальный момент времени, плотность ρ_0 в пятне в начальный

момент времени, характерное время N^{-1} и перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\rho}), \quad x = \tilde{x}R_0, \quad y = \tilde{y}R_0, \quad t = \tilde{t} / N,$$
$$u = \tilde{u}R_0 N, \quad v = \tilde{v}R_0 N, \quad p = \tilde{p}\rho_0 R_0^2 N^2, \quad \rho = \tilde{\rho}\rho_0.$$

Положим p — давление за вычетом гидростатического. Тогда уравнения Навье-Стокса, начальные и граничные условия в безразмерных переменных в приближении Буссинеска принимают следующий вид (тильда опущена) — (2), где $\mathrm{Re} = \rho_0 R_0^2 N/\mu$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Fr} = R_0 N^2/g$ — число Фруда, $\mathrm{Sc} = \mu/\rho_0 k_s$ — число Шмидта, k_s — коэффициент диффузии соли, μ — коэффициент динамической вязкости, $C = \Lambda/R_0$ — отношение масштабов:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\mathrm{Fr}} s \frac{\mathbf{g}}{g}; \\
\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)s = \frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\Delta s + \frac{\nu}{C}; \\
\nabla\cdot\mathbf{v} = 0; \\
u = v = 0, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \ t = 0; \\
\rho = 1, \qquad (x,y) \in \mathbf{A}, \ t = 0; \\
\rho = 1 - \frac{y}{C} + s, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 / \mathbf{A}, \ t = 0; \\
s = \begin{cases} \dfrac{y}{C}, (x,y) \in \mathbf{A}, \ t = 0, \\ 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{A}, \ t = 0. \end{cases}
\end{gathered} \tag{2}$$

Решение задачи будем искать в прямоугольной области $\{x, y : 0 \le x \le X, -Y \le y \le Y\}$, которая показана на рисунке 1. На левой и правой границах области (рис. 1, линии 1, 3) заданы условия периодичности течения. На верхней границе задано условие твердой крышки (рис. 1, линия 2). На нижней границе области (рис. 1, линия 4) задано состояние покоя.

Численный алгоритм решения задачи. При решении задачи использовался метод расщепления для исследования течений несжимаемой жидкости (МЕРАНЖ) [6]. Конечно-разностная схема метода обладает вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным, минимальной диссипацией и дисперсией, работоспособностью в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда и важным свойством монотонности.

Схема расщепления:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}^n}{\tau}=-(\mathbf{v}^n\cdot\nabla)\mathbf{v}^n+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}^n+\frac{1}{\mathrm{Fr}}s^n\frac{\mathbf{g}}{g}; \tag{3}$$

$$\tau\Delta p=\nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}}; \tag{4}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1}-\tilde{\mathbf{v}}}{\tau}=-\nabla p; \tag{5}$$

$$\frac{s^{n+1}-s^n}{\tau}=-\left(\mathbf{v}^{n+1}\cdot\nabla\right)s^n+\frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\Delta s^n+\frac{\nu^{n+1}}{C}. \tag{6}$$

Предварительно по начальным данным рассчитывается возмущение солености s^1 (6). Схема состоит из четырех этапов, которые повторяются на каждом временном шаге. На этапе I решаем уравнение (3) в предположении, что передача импульса осуществляется только за счет конвекции, диффузии и сил плавучести. На этапе II решаем уравнение Пуассона (4) в силу соленоидальности вектора скорости, где $\tilde{\mathbf{v}}$ — рассчитанное на этапе I промежуточное поле скорости, решение уравнения (4) получаем методом верхней релаксации. На этапе III решаем уравнение (5) в предположении, что передача импульса происходит только за счет градиента давления. На этапе IV решаем уравнение (6) и вычисляем возмущение солености s^{n+1} по найденному полю скорости $\mathbf{v}^{n+1}$.

Конечно-разностная схема. Рассматриваемая область течения покрывается равномерной прямоугольной расчетной сеткой ячеек по x и y:

$$\Omega=\begin{cases}x_{i+1/2}=ih_x, & h_x>0, \quad i=0,1,\ldots,L; \quad Lh_x=X,\\ y_{j+1/2}=jh_y, & h_y>0, \quad j=0,1,\ldots,M; \quad Mh_y=2Y,\end{cases}$$

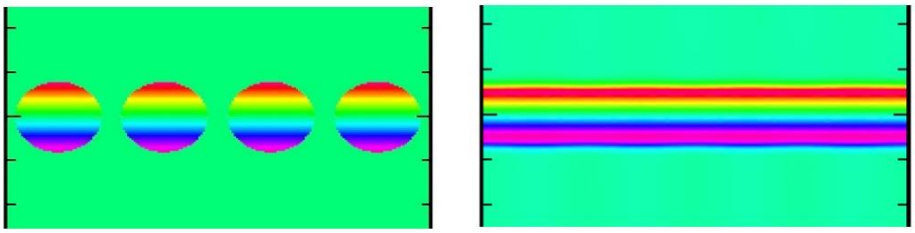
где h_x — шаг сетки по оси x, h_y — шаг сетки по оси y, L и M — количество ячеек сетки в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Точка с координатами (i,j) находится в центре ячейки. Ячейка расчетной сетки характеризуется давлением $p_{i,j}$, (и, возможно, температурой, энергией и т.д.) и дивергенцией $D_{i,j}$, которая определяет наличие источника или стока в объеме в зависимости от его знака.

В данной работе применена конечно-разностная схема задачи схлопывания пятен в стратифицированной жидкости для двумерного случая из работы [7]. Давление $p_{i,j}$ вычисляется в центре ячейки. Скорость $v_{i,j}$ вычисляется на границах ячейки. Горизонтальная составляющая скорости определяется в середине правой и левой граней

ячейки. Вертикальная составляющая скорости определяется в середине верхней и нижней граней ячейки. Знание нормальной составляющей скорости на границе ячейки позволяет напрямую рассчитать поток импульса через эту границу.

Результаты. Проведено математическое моделирование динамики цепочки пятен с различными разрывами в стратифицированной жидкости. В начальный момент времени пятно имеет форму круга радиуса $R_0 \le 1$. Пятна расположены в ряд вдоль горизонтальной оси встык или на некотором расстоянии друг от друга (рис. 2, *а*). Под действием гравитации цепочка пятен со временем преобразуется в горизонтальную полосу (рис. 2, *б*).



а *б*

Рис. 2. Состояние цепочки пятен перемешанной жидкости показано в изоклинах возмущения солености (красным показан максимум значений, а фиолетовым — минимум); показана область $0 < x < 8;\ -2,3 < y < 2,3$: *а* — начальное состояние; *б* — конечное состояние

Область расчета $0 < x < 2;\ -8 < y < 8$ покрыта прямоугольной расчетной сеткой размером 100×800 с шагом $h = 0,02$. На левой границе $x = 0$ и правой границе $x = 2$ расчетной области ставятся условия периодичности. На верхней границе выполняются условия твердой крышки. На нижней границе среда находится в состоянии покоя. Заданы коэффициенты и параметры:

$$\mu/\rho_0 = 0,01 \text{ см}^2/\text{с};\ k_s = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с};$$

$$T_b = 2\pi \text{ с};\ \Lambda = 10 \text{ см};$$

$$\text{Sc} = 709,2;\ \text{Re} = 3162;\ \text{Fr} = 1.$$

Получены цветные изображения полей функции тока. Шкала значений функции тока соответствует цветам радуги: красным показан максимум значений, а фиолетовым — минимум.

Сравним динамику цепочки пятен солености с различными разрывами, когда в начальный момент времени цепочка имеет характеристики согласно табл. 1. Вариант 1 рассматривает цепочку без разрывов. В варианте 2 радиус пятна больше расстояния между пятнами.

В варианте 3 радиус пятна меньше расстояния между пятнами, но размер пятна превышает расстояние между пятнами.

Таблица 1

Параметры вариантов расчета

№ варианта	Начальный радиус пятен	Начальное расстояние между пятнами
1	1,0	0
2	0,8	0,4
3	0,6	0,8

При $t = 1$ поля функции тока в трех рассматриваемых вариантах имеют схожие 4 возмущения в центральной части, диагонально симметричные (рис. 3, *а*; 4, *а*; 5, *а*). Возмущения отстоят от центра тем дальше, чем больше начальный радиус пятен. При $t = 3$ экстремумы поля функции тока варианта 1 меняются местами, на месте минимума наблюдается максимум, а на месте максимума — минимум; возмущения отодвигаются от центра (рис. 3, *б*). В варианте 2 и 3 (для цепочки с разрывами) удваивается количество возмущений. При чем в варианте 2 два вида возмущений разной интенсивности (рис. 4, *б*), а в варианте 3 их четыре вида (рис. 5, *б*). При $t = 4$ остается 4 экстремума во всех вариантах, за исключением варианта 3, где помимо основных 4 заметны менее выраженные возмущения (рис. 3, *в*; 4, *в*; 5, *в*). При $t = 5$ над возмущениями начинает образовываться еще пара возмущений, симметрично снизу тоже начинает образовываться пара возмущений (рис. 3, *г*; 4, *г*; 5, *г*). Наблюдается диагональная симметричность интенсивности в расположении возмущений. При $t = 6$ в варианте 1 возмущения попарно схлопываются и увеличиваются в размере (рис. 3, *д*). В вариантах 2 и 3 (для цепочки с разрывами) наблюдается сложная перекомпановка возмущений. В варианте 2 крупные экстремумы перемещаются на границу возмущений, оставляя в центре области большое количество небольших по размеру возмущений (рис. 4, *д*). В варианте 3 экстремумы остаются в центре, несколько уменьшаясь в размере, а остальные возмущения увеличивают свою интенсивность (рис. 5, *д*). При $t = 8$ наблюдается 4 заметных возмущения и две пары менее интенсивных возмущения рядом. В варианте 1 возмущения расходятся от центра (рис. 3, *е*). В вариантах 2 и 3 возмущения остаются в центре, их неправильная форма выдает завершающую стадию слияния соседних возмущений, при этом в окрестности начинают образовываться новые возмущения (рис. 4, *е*; рис. 5, *е*).

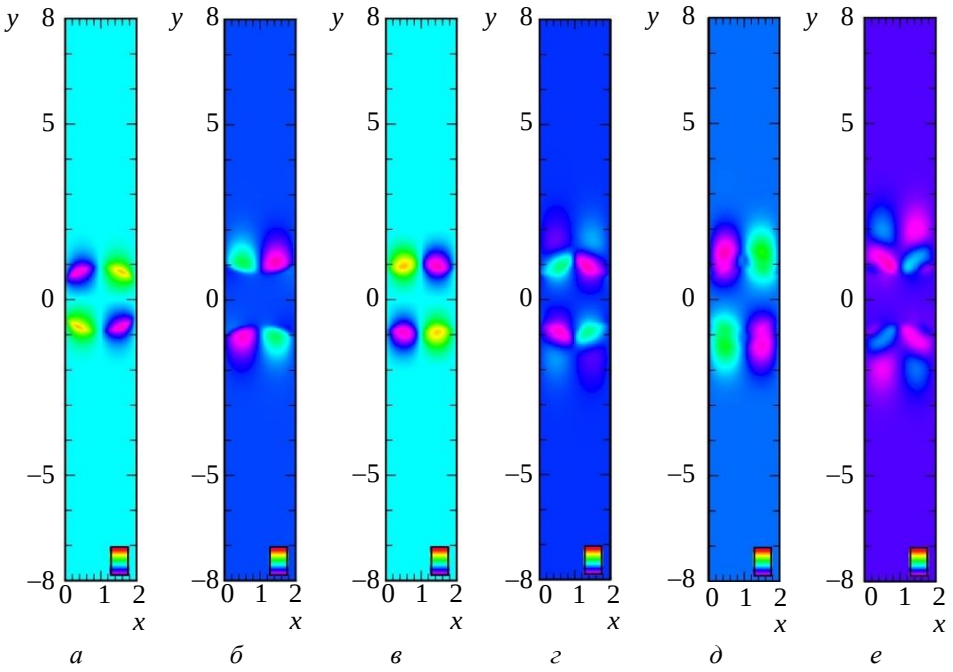


Рис. 3. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 1$; $\mu/\rho_0 = 0{,}01$ см^2/с; $k_s = 1{,}41 \cdot 10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709{,}2$; $\mathrm{Re} = 3162$; $\mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 1$; *б* — $t = 3$; *в* — $t = 4$; *г* — $t = 5$; *д* — $t = 6$; *е* — $t = 8$

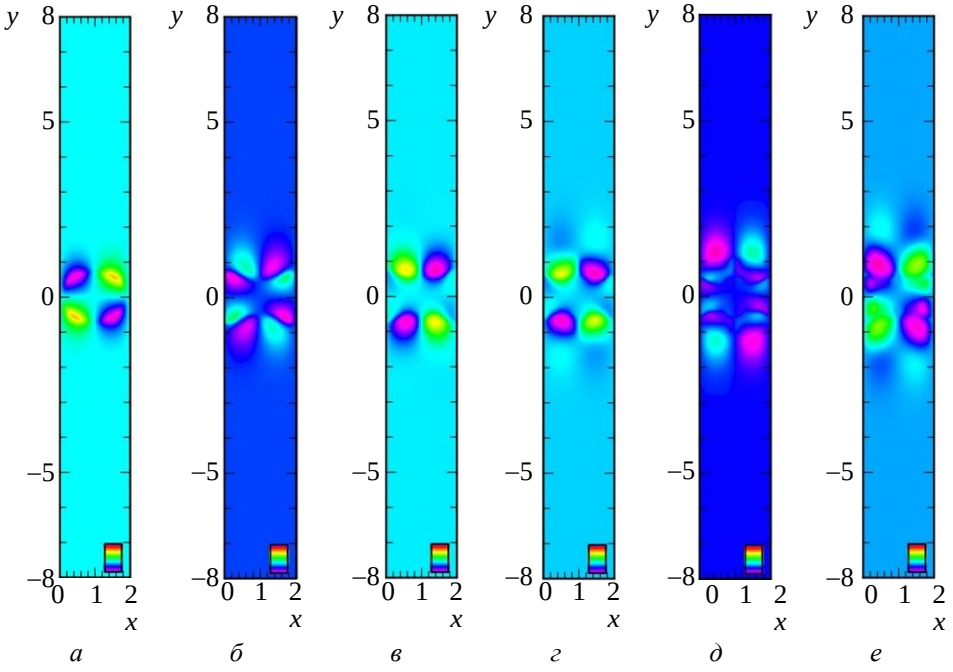


Рис. 4. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 0{,}8$; $\mu/\rho_0 = 0{,}01$ см^2/с; $k_s = 1{,}41 \cdot 10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709{,}2$; $\mathrm{Re} = 3162$; $\mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 1$; *б* — $t = 3$; *в* — $t = 4$; *г* — $t = 5$; *д* — $t = 6$; *е* — $t = 8$

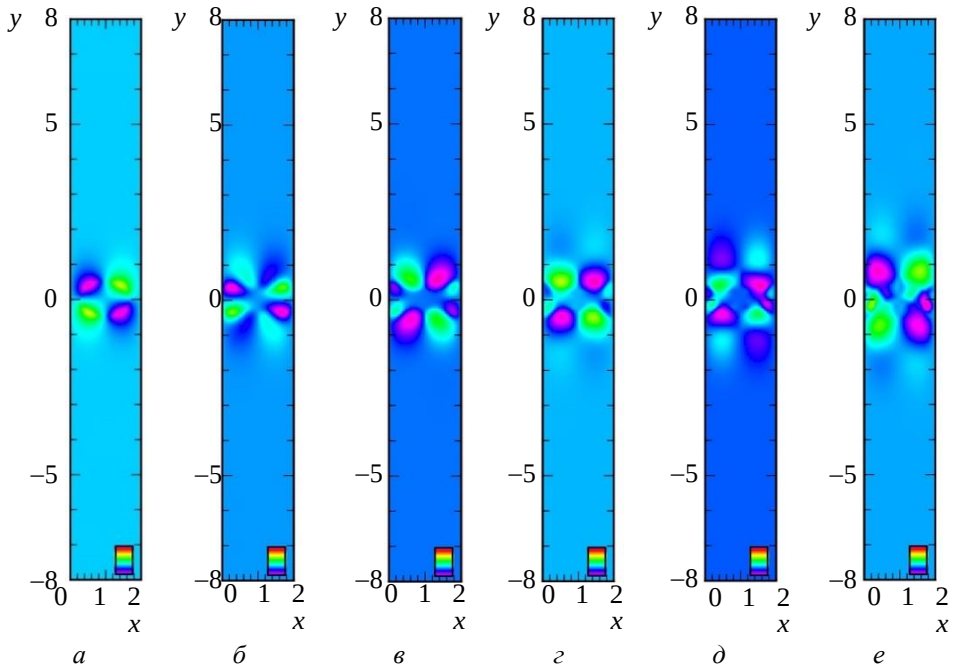


Рис. 5. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 0,6;\ \mu/\rho_0 = 0,01$ см^2/с; $k_s = 1,41\cdot10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709,2;\ \mathrm{Re} = 3162;\ \mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 1$; *б* — $t = 3$; *в* — $t = 4$; *г* — $t = 5$; *д* — $t = 6$; *е* — $t = 8$

При $t = 9$ возмущения функции тока начинают распространяться все дальше в окрестности, увеличиваются в размере за счет слияния соседних возмущений (рис. 6, *а*; 7, *а*; 8, *а*). В варианте 1 при $t = 11$ количество возмущений удваивается, и они смещаются от центра расчетной области вверх и вниз (рис. 6.b). В вариантах 2 и 3 прослеживается повторение предыдущих состояний, но с более крупными по размеру возмущениями, которые остаются в центре области (рис. 7, *б*; 8, б). При $t = 20$ возмущения распространяются в периферийную область (рис. 6, *в*; 7, *в*; 8, *в*), в вариантах 1 и 2 экстремумы группируются в центре, а в варианте 3 отстоят от центра. При t от 40 до 60 возмущения распространяются по всей области (рис. 6, *г*, *д*; 7, *г*, *д*; 8, *г*, *д*). Возмущения зарождаются в центре расчетной области и перемещаются к границе с близкой скоростью при сравнении настоящих вариантов, оставляя за собой след многочисленных, но малоинтенсивных возмущений. При $t > 20$ возмущения интенсивнее в верхней половине расчетной области $y > 0$; причем в варианте 1 разница заметна лишь в периферийных областях $y > 4$ и $y < -4$.

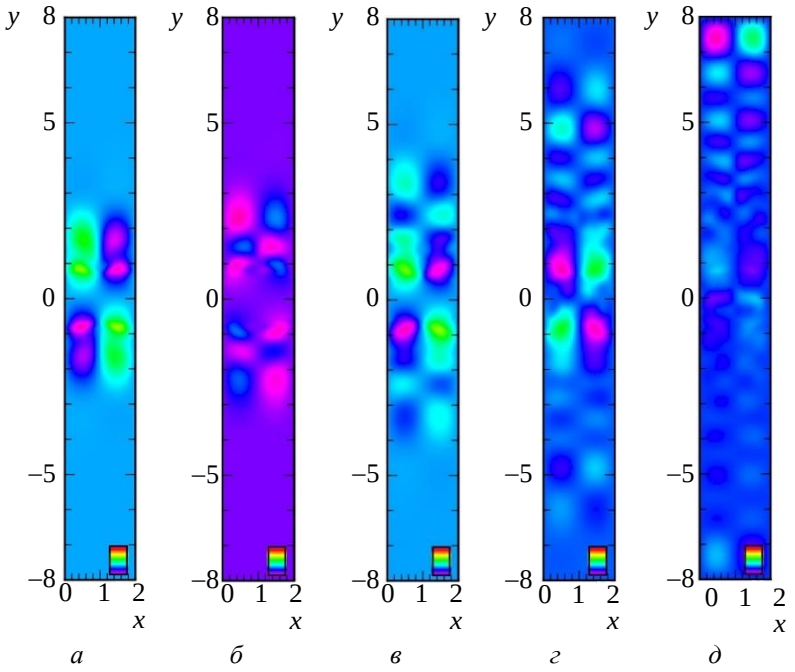


Рис. 6. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 1$; $\mu/\rho_0 = 0{,}01$ см^2/с; $k_s = 1{,}41 \cdot 10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709{,}2$; $\mathrm{Re} = 3162$; $\mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 9$; *б* — $t = 11$; *в* — $t = 20$; *г* — $t = 40$; *д* — $t = 60$

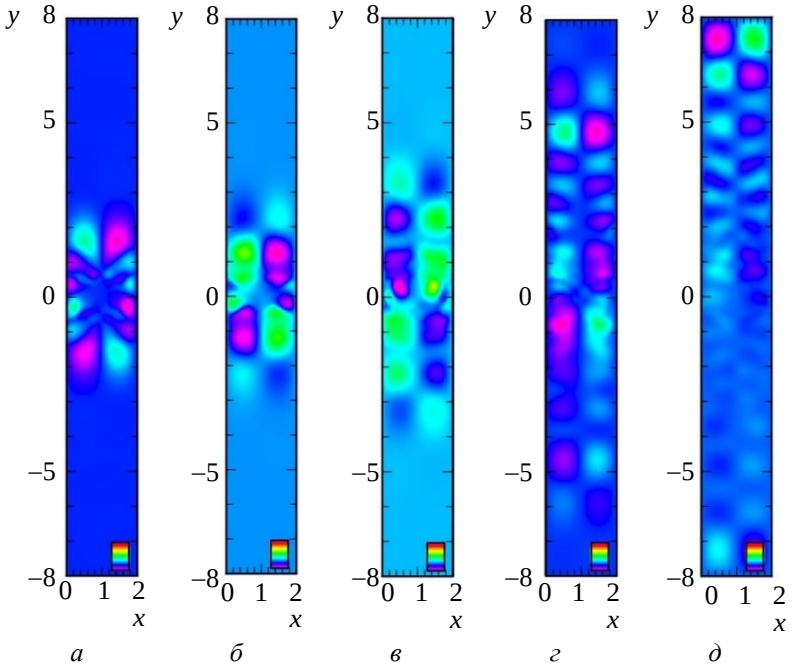


Рис. 7. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 0{,}8$; $\mu/\rho_0 = 0{,}01$ см^2/с; $k_s = 1{,}41 \cdot 10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709{,}2$; $\mathrm{Re} = 3162$; $\mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 9$; *б* — $t = 11$; *в* — $t = 20$; *г* — $t = 40$; *д* — $t = 60$

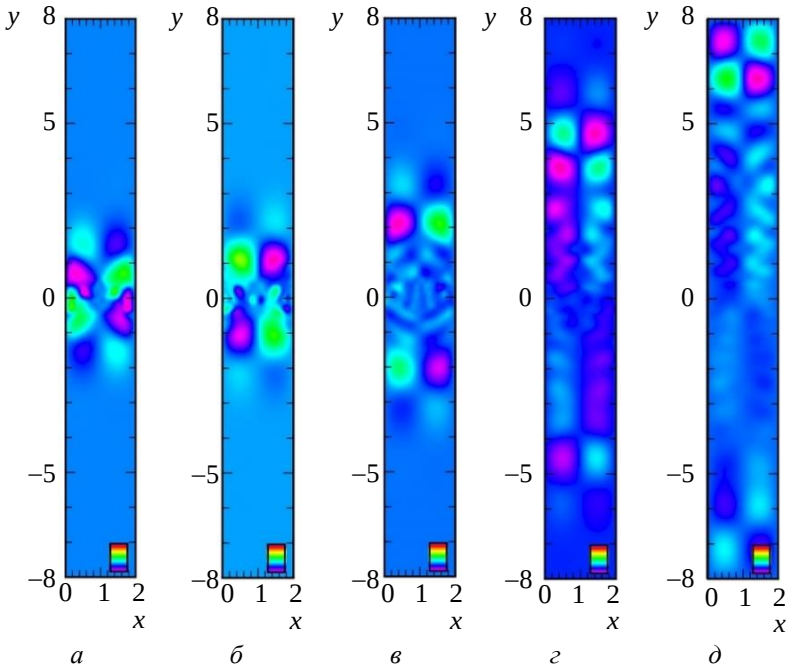


Рис. 8. Динамика поля функции тока при коллапсе цепочки пятен для параметров: $R_0 = 0,6$; $\mu/\rho_0 = 0,01$ см^2/с; $k_s = 1,41\cdot10^{-5}$ см^2/с; $\mathrm{Sc} = 709,2$; $\mathrm{Re} = 3162$; $\mathrm{Fr} = 1$: *а* — $t = 9$; *б* — $t = 11$; *в* — $t = 20$; *г* — $t = 40$; *д* — $t = 60$

Выводы. Динамика цепочек пятен без разрывов, с небольшим и с заметным разрывами характеризуются постепенным распространением возмущений функции тока по всей области расчета, колебательным характером движения, локальными экстремумами функции тока. Цепочка пятен без разрывов имеет наиболее простую динамику и выраженное колебательное движение. Цепочки пятен с разрывами отличаются более сложным движением. Притом скорость распространения возмущений не зависит от величины разрыва в начальной цепочке пятен солености. С увеличением разрыва в цепочке пятен солености со временем проявляется несимметричность поля функции тока относительно оси абсцисс; для цепочек пятен с разрывами возмущения интенсивнее в верхней половине расчетной области, для цепочки пятен без разрывов возмущения отличаются интенсивностью в верхней и нижней четвертях расчетной области, сохраняя равнозначную интенсивность в центральной части. Таким образом функция тока характеризует характер движения, область возмущений и интенсивность динамики.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИАП РАН.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Филлипс О.М. The generation of clear-air turbulence by the degradation of internal waves. *Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн (под ред. Яглома А.М., Татарского В.И.)*, Москва, Наука, 1967, с. 130–138.

[2] Федоров К.Н. *Тонкая термохалинная структура вод океана*. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1976, 184 с.
[3] Тернер Дж. *Эффекты плавучести в жидкостях*. Москва, Мир, 1977, 432 с.
[4] Скорер Р. *Аэрогидродинамика окружающей среды.* Москва, Мир, 1980, 551 с.
[5] Монин А.С., Озмидов Р.В. *Океанская турбулентность*. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1981, 320 с.
[6] Гущин В.А., Смирнова И.А. Математическое моделирование динамики пятен в стратифицированной среде. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2020, т. 60, № 5, с. 900–916.
[7] Гущин В.А., Смирнова И.А. Критерий целостности цепочки пятен в стратифицированной жидкости. *Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (AMMAI'2022),* Москва, изд-во МАИ, 2022, с. 319–321.

Статья поступила в редакцию 18.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гущин В.А., Смирнова И.А. Математическое моделирование цепочки пятен с раз-личными интервалами в стратифицированной жидкости. *Математическое моделирование и численные методы,* 2023, № 3, с. 80–91.

Гущин Валентин Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН, главный научный сотрудник, ИАП РАН. e-mail: gushchin47@mail.ru.

Смирнова Ирина Аркадьевна — младший научный сотрудник, ИАП РАН. e-mail: o-ira@yandex.ru

The Mathematical modeling of a spots chain with different intervals in a stratified fluid

© V.A. Gushchin, I.A. Smirnova

ICAD RAS, Moscow, 117485, Russia

A comparison is made of the spots chain dynamics of mixed liquid in a stratified environment, with different initial intervals between spots. For mathematical modeling, the SMIF method (splitting method for studying incompressible fluid flows) is used. The finitedifference scheme of the method has the second order of approximation in terms of spatial variables, minimal scheme dissipation and dispersion, and has the property of monotonicity. The results of comparing the dynamics of the stream function depending on the initial interval between spots are presented for the same values of the Reynolds and Froude numbers.

Keywords*: incompressible viscous fluid, salinity, stratification, Boussinesq approximation, splitting method*

REFERENCES

[1] Phillips O.M. The generation of clear-air turbulence by the degradation of internal waves. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation (Ed. by A. Yaglom and V. Tartarski),* Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 130–138.
[2] Fedorov K.N. *Tonkaya termohalinnaya struktura vod okeana* [Thin thermohaline structure of ocean waters]. Leningrad, Hydrometeoizdat Publ., 1976, 184 p.

[3] Turner J.S. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1973, 367 p.
[4] Scorer R.S. *Environmental aerodynamics*. New York, Halsted Press, 1978, 488 p.
[5] Monin A.S., Ozmidov R.V. *Okeanskaya turbulentnost'* [Ocean turbulence]. Leningrad, Hydrometeoizdat Publ., 1981, 320 p.
[6] Gushchin V.A., Smirnova I.A. Mathematical modeling of spot dynamics in a stratified medium. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 5, pp. 879–894.
[7] Gushchin V.A., Smirnova I.A. The criterion for the integrity of a spots chain in a stratified fluid. *The Fourteenth International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2022)*, Moscow, MAI Press, pp. 319–321.

Gushchin V.A., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Corresponding member of the RAS, Chief Researcher, ICAD RAS. e-mail: gushchin47@mail.ru

Smirnova I.A., Junior researcher, ICAD RAS. e-mail: o-ira@yandex.ru