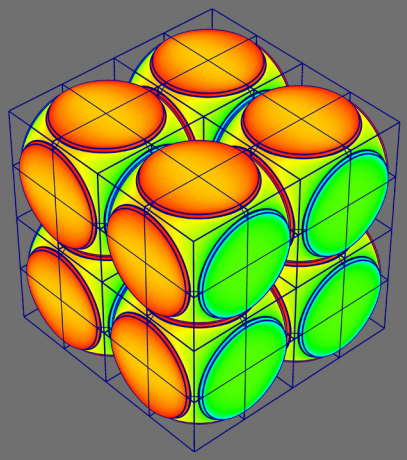
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Карпенко В.А. Математическое моделирование процесса перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе установке непрерывной разливки стали. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 3, с. 18–41.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/314/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 10:00:15

УДК 621.74.043 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-3-1841

# Математическое моделирование процесса перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе установке непрерывной разливки стали

© В.И. Одиноков, А.И. Евстигнеев,
Э.А. Дмитриев, В.А. Карпенко

ФГБОУ ВО «КнАГУ», Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

*Экспериментальные исследования течения жидкого металла в кристаллизаторе УНРС являются продолжительным, сложным и трудоемким процессом. Поэтому все шире используется для этого математическое моделирование численными методами. Предложена новая технология разливки жидкого металла в кристаллизатор. Приведена оригинальная, запатентованная конструкция устройства, состоящая из прямоточного и вращающегося глуходонного стаканов. Представлены основные результаты исследований течения расплава в объеме кристаллизатора. Объектами исследований стали гидродинамические и тепловые потоки жидкого металла нового процесса разливки стали в кристаллизатор прямоугольного сечения УНРС, а результатом – пространственная математическая модель, описывающая потоки и температуры жидкого металла в кристаллизаторе. Для моделирования процессов, протекающих при течении металла в кристаллизаторе, использован специально созданный программный комплекс. В основу теоретических расчетов положены основополагающие уравнения гидродинамики, уравнения математической физики (уравнение теплопроводности с учетом массопереноса) и апробированный численный метод. Исследуемую область разбивали на элементы конечных размеров, для каждого элемента записывали в разностном виде полученную систему уравнений. Результат решения – поля скоростей и температур потока металла в объеме кристаллизатора. По разработанным численным схемам и алгоритмам составлена программа расчета. Приведен пример расчета разливки стали в кристаллизатор прямоугольного сечения, схемы потоков жидкого металла по различным сечениям кристаллизатора. Наглядно представлены векторные потоки жидкого металла в различных сечениях кристаллизатора при различных числах оборотов рубашки с вертикальными ребрами. Выявлены области различной турбулентности. Оптимальным принимается режим перемешивания при n = 30 об/мин. При n = 50 об/мин наблюдается выброс жидкого металла в шлаковую ванну.*

***Ключевые слова:*** *непрерывная разливка, кристаллизатор, глуходонный стакан, перемешивание, математическая модель, алгоритм, скорости потоков*

**Введение.** Получение мелкого зерна в непрерывном слитке напрямую связано с интенсификацией потоков жидкого металла в кристаллизаторе УНРС. Именно там начинает формироваться твердая фаза металла и его зернистая структура. Данная проблема отражена в многочисленных публикациях, в которых описываются различные способы и устройства подачи жидкого металла в кристаллизатор УНРС [1-12]. Натурные эксперименты предлагаемых способов и устройств

довольно трудоемки и сложны в осуществлении, поэтому наиболее целесообразнее определить степень эффективности того или иного способа заполнения жидким металлом кристаллизатора, это построение математической модели. В нашем коллективе есть такой опыт исследований [13-16]. В данной работе строиться математическая модель нового способа перемешивания подающегося в кристаллизатор жидкого металла авторской технологии [17], а именно (рис. 1).

Устройство для подачи и перемешивания стали в вертикальном кристаллизаторе (4) установки непрерывной разливки содержит глуходонный погружной стакан (2) с выходными эксцентрично расположенными окнами (3), установленный на разливочном ковше (1). По наружной поверхности глуходонного погружного стакана выше его выходных окон установлена с зазором огнеупорная рубашка (5) с вертикальными ребрами (6), соединенная с механизмом (8) ее принудительного вращения. Благодаря возможности регулирования скорости вращения рубашки повышается однородность структуры непрерывного слитка.

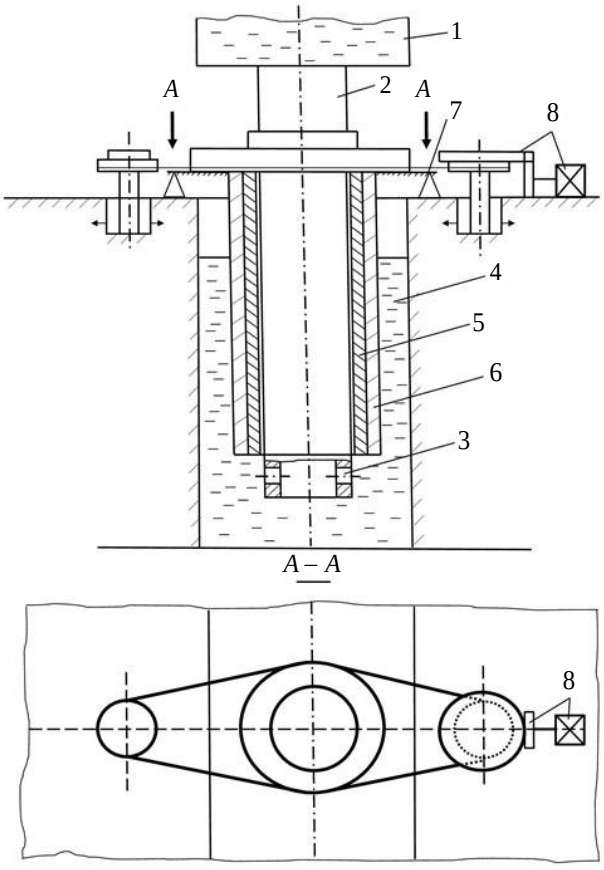



**Рис 1.** Схема устройства для подачи и перемешивания стали в кристаллизаторе с вращающимся стаканом с вертикальными ребрами

Имеем квазистационарный процесс, повторяющийся при повороте огнеупорной рубашки на 900. Математическое описание данного процесса очень сложно даже при использовании численных методов.

**Инженерная постановка задачи.** Будем полагать, что глуходонный стакан и вращающаяся огнеупорная рубашка имеют одинаковое квадратное сечение. Тогда огнеупорная рубашка при вращении будет перемешивать жидкий металл в кристаллизаторе своими гранями.

На рис. 2 отображена схема вращения рубашки квадратного поперечного сечения в плоскости ( $x_2$ $x_3$ ).

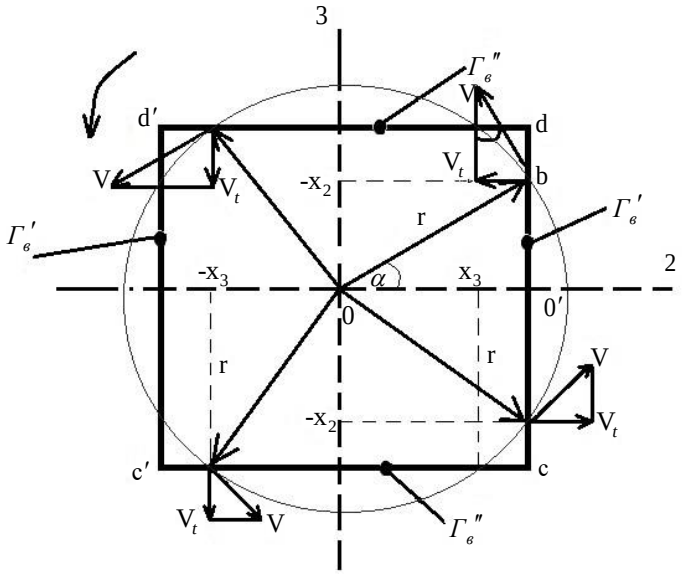



**Рис 2.** Схема вращения погружного стакана

Очевидно, что $cd = c'd' = cc' = dd' = d$. Возьмем произвольную точку $b$ на стороне квадрата $cd$ . При заданном направлении вращении квадрата со скоростью $V$ имеем:

$$V_t = -V \cdot \sin\alpha;\ \sin\alpha = \frac{o'b}{r};\ V = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{30};$$
$$V_t = -\pi n \frac{x_2}{30}. \qquad (1)$$

Здесь $n$ — число оборотов (об/мин); $x_2 = o'b$.

Очевидно, формула (1) верна для поверхностей $Г_8'$. Для поверхностей $Г_8''$ имеем:

$$V_t = -\pi n \frac{x_3}{30}. \qquad (2)$$

В течение поворота стакана на 90° процесс будет нестационарным. При этом из окон стакана в нижней его части выходит жидкий металл со скоростью $V_M$. Будем считать, что поперечные сечения окон равны.

Квадрат в горизонтальном сечении вращается вокруг центра $O$ (рис. 2). При заданном направлении вращения одна половина грани квадрата $o'c$ как бы выталкивает жидкий металл от себя наружу, а вторая половина грани $o'd$ втягивает металл в противоположном направлении. То же самое происходит и с другими гранями квадрата. В этом смысле, можно интерпретировать данный процесс как выход металла из участка грани $o'c$ со скоростью $V_t$ по формуле (1) и вход того же объема металла в участок грани $o'd$, также со скоростью по формуле (1). Аналогичную интерпретацию движения металла можно применить и к другим граням квадрата с использованием формул (1, 2).

Таким образом, будем считать погружной стакан квадратного поперечного сечения неподвижным, а через его грани втекает и вытекает металл со скоростями $V_t$, согласно формулам (1, 2). Это не касается окон стакана, из которых жидкий металл поступает в кристаллизатор со скоростью $V_M$.

Такая идеализация позволяет рассматривать данный процесс как стационарный, что значительно облегчает его постановку и решение. Кроме того, не будем учитывать появляющуюся на гранях кристаллизатора корочку затвердевшего металла.

**Математическая постановка задачи.** Исходя из принятых допущений, рассмотрим процесс истечения жидкого металла из окон квадратного глуходонного стакана в кристаллизатор прямоугольного поперечного сечения. При этом движение металла по нормали к граням рубашки квадратного поперечного сечения соответствует формулам (1), (2).

Среду (жидкий металл) будем считать несжимаемой ($\rho = const$, где $\rho$ — плотность жидкости), линейно-вязкой (ньютоновской).

Исходя из сформулированных допущений, запишем систему законов сохранения механики жидких сред в декартовой системе координат [18].

Уравнение несжимаемости имеет вид

$$v_{i,i} = 0\,,\ i = 1,2,3\,. \tag{3}$$

Закон изменения количества движения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i^* &= I_i^*\,, \\ I_i^* &= \rho \frac{dv_i}{d\tau}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений в декартовых координатах $x_i$ $(i=1,2,3)$; $\sigma_{ij,j}=\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $F_i^*$ — компоненты удельной массовой силы, $v_i$ — компоненты вектора скорости, полагаем, что

$$F_2^*=F_3^*=0,$$

$I_i^*$ — компоненты внутренних массовых сил (сил инерции), $\tau$ — время, $\dfrac{dv_i}{d\tau}$ — полная производная по времени

$$\frac{dv_i}{d\tau}=\frac{\partial v_i}{\partial\tau}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{5}$$

Определяющее соотношение для несжимаемой ньютоновской жидкости имеет вид

$$\begin{aligned}&\sigma=\sigma_{ij}\delta_{ij}=-p,\\ &\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}=2\mu\xi_{ij},.\\ &\xi_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}).\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\xi_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций; $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. $p$ — давление в данной точке; $\sigma$ — гидростатическое напряжение; $\mu$ — коэффициент вязкости.

Уравнение теплопроводности (с учетом массопереноса жидкости) имеет вид:

$$\frac{d\theta}{d\tau}=a\nabla^2\theta, \tag{7}$$

где $\nabla^2$ — оператор Лапласа; $\theta$ — температура; $a$ — коэффициент температуропроводности $a=\lambda/(\rho c)$; $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $c$ — удельная теплоемкость; все эти величины принимаются константами.

Будем далее полагать, что движение жидкости стационарно, т.е. т.е. полагается

$$\partial v_i/\partial\tau=0,\ \partial\theta/\partial\tau=0.$$

Тогда система (3)-(7) сводится к следующей системе

$$v_{i,i}=0, \tag{8}$$

$$\sigma_{ij,j}+F_i^*=I_i, \tag{9}$$

$$I_i = \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k},\ i,k = 1,2,3,$$

$$\sigma = -p\,,$$

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\mu\xi_{ij}\,,$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})\,,$$

$$v_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} = a\nabla^2\theta\,. \qquad (10)$$

Для решения системы уравнений (8) - (10) воспользуемся апробированным численным методом, использованным в многочисленных разноплановых работах [19-24].

Граничные условия задачи (рис. 3):

$$\sigma_{11}\Big|_{\Gamma_2} = p_1;\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})\Big|_{\Gamma_i} = 0;\ i = 1 \div 3;$$

$$(\sigma_{21} = \sigma_{23})\Big|_{\Gamma_i} = 0;\ i = 5,6,7,8;\ \sigma_{31} = \sigma_{32}\Big|_{\Gamma_i} = 0;\ i = 9,10,11;$$

$$(\sigma_{21} = \sigma_{23})\Big|_{\Gamma_8'} = 0;\ (\sigma_{31} = \sigma_{32})\Big|_{\Gamma_8''} = 0;$$

$$v_2\Big|_{\Gamma_5} = v^*;$$

$$v_3\Big|_{\Gamma_8''} = V_t \text{ - формула (2);}$$
$$v_2\Big|_{\Gamma_8'} = V_t \text{ - формула (1);} \qquad (11)$$

$$v_1\Big|_{\Gamma_1} = v_u;$$

$$v_1\Big|_{\Gamma_3} = 0;$$

$$v_2\Big|_{\Gamma_i} = 0;\ i = 6,7,8;$$

$$v_3\Big|_{\Gamma_i} = 0;\ i = 9,10,11.$$

При решении уравнения (10) использовались граничные условия:

$$\theta\Big|_{\Gamma_i} = \theta_i^*,\ i = 1 \div 10;$$
$$q\Big|_{\Gamma_i} = q_i^*,\ i = 6,7,9,10. \qquad (12)$$

Здесь $v_u$ — скорость вытягивания слитка (рис. 3); $v_2^*$ — скорость выхода жидкого металла из окон погружного стакана; $\theta_i^*$ — заданные

функции распределения температуры металла на поверхностях $\Gamma_i$; $q_i^*$ — заданные из экспериментальных данных тепловые потоки через поверхности $\Gamma_i$; $\theta_5^*$ — заданная температура выхода металла из окна $\Gamma_5$.

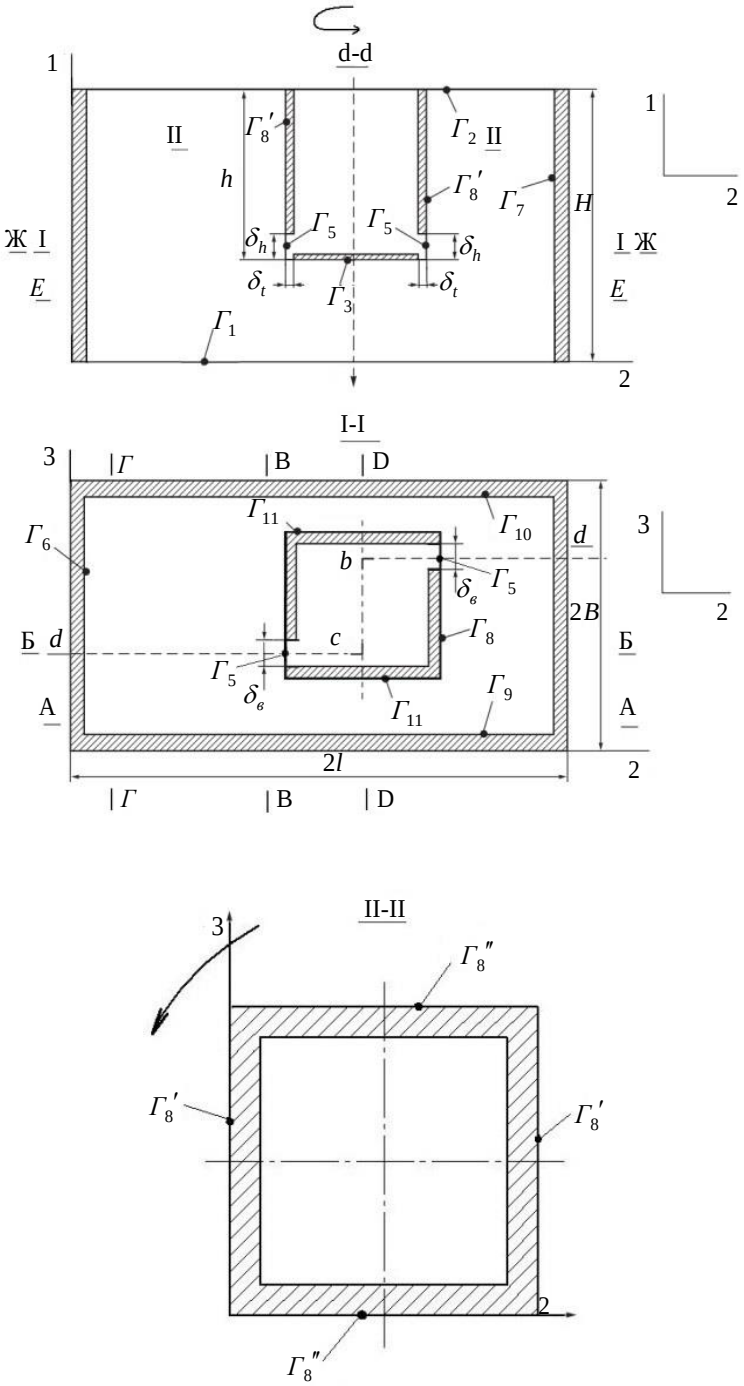



**Рис 3.** Формализованная расчетная схема процесса разливки металла в кристаллизатор

**Численный метод решения задачи.** Для решения системы уравнений (8) - (10) используем численный метод, в соответствии с которым уравнения (9) для элемента, ограниченного произвольной системой ортогональных поверхностей (рис. 4) будут иметь вид:

$$\begin{gathered} S_{ik}\Delta S_{ij}(\sigma_{ii}-\sigma_{jj})+S_{ij}\Delta S_{ik}(\sigma_{ii}-\sigma_{kk})+0.5\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ik}+ \\ +0.5\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj}+0.5\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk}+(S_{ji}\Delta S_{jk}+2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij}+ \\ +(S_{ki}\Delta S_{kj}+2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik}+2V(F_i-I_i)=0; \\ i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь суммирование по индексам $i$, $j$, $k$ — отсутствует, а также введены обозначения

$$\sigma_{ij}=0,5(\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^2);\ \Delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^2-\sigma_{ij}^1,\ (i,j=1,2,3);$$

где $\sigma_{ii}^d(i=1,2,3;\ d=1,2)$ — нормальное напряжение, действующее на криволинейной поверхности «d» элемента (m), нормалью к которой является касательная к координате $a_i$; $\sigma_{ij}^d$; $(i\neq j)$ — касательное напряжение в направлении $x_j$ по криволинейной поверхности «d» элемента (m), нормалью к которой является касательная к координате $a_i$;

$$S_{ij}=S_{ij}^1+S_{ij}^2;\ \Delta S_{ij}=S_{ij}^2-S_{ij}^1.$$

Значения $S_{ik}^j$ вычисляются как среднее от значений длин дуг границы граней (ребер).

Для нормальных компонент тензора скоростей деформаций используем следующие формулы

$$\xi_{ii}=\frac{2\Delta v_i}{S_{ji}}+\frac{2v_j}{S_{ji}}\cdot\frac{\Delta S_{ji}}{S_{ij}}+\frac{2\Delta v_k}{S_{ki}}\cdot\frac{\Delta S_{ki}}{S_{ik}};\ i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k; \tag{14}$$

где $v_i=v_i^1+v_i^2;\ \Delta v_i=v_i^2-v_i^1.$

Сдвиговые скорости деформаций $\xi_{ij}(i\neq j)$ по элементу (m) определяются как средние от значений $\xi_{ij}$ в узлах элемента

$$(\xi_{ij})_m=\frac{1}{8}d_0(\xi_{ij}^{a_0}+\xi_{ij}^{b_0}+\xi_{ij}^{c_0}+\xi_{ij}^{d_0}+\xi_{ij}^{a_1}+\xi_{ij}^{b_1}+\xi_{ij}^{c_1}+\xi_{ij}^{d_1}). \tag{15}$$

Значение $\xi_{ij}^0$ в узле (рис. 4,б) согласно [2,3] имеет вид

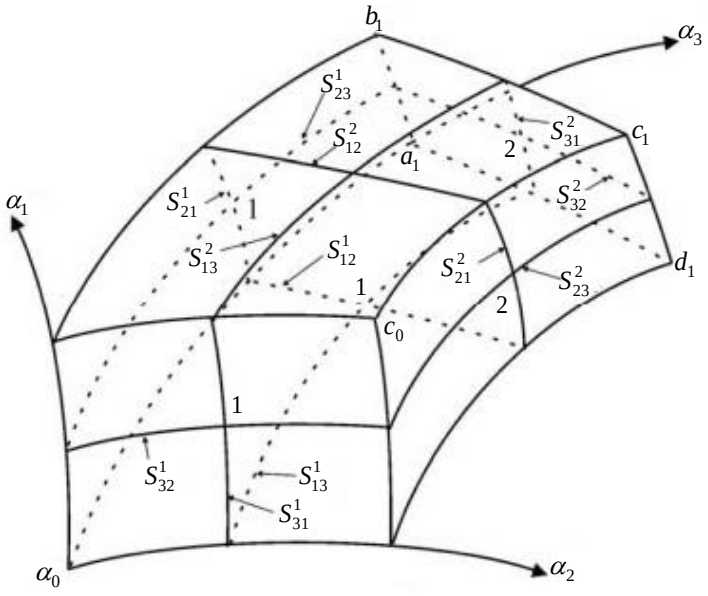
$$\xi_{ij}^0=\frac{2\Delta\overline{v}_j}{S_i}-0.5\overline{v}_j\frac{S_j^+-S_j^-}{S_iS_j}+\frac{2\Delta\overline{v}_i}{S_j}-0.5\overline{v}_i\frac{S_i^+-S_i^-}{S_iS_j},\ (i,j=1,2,3;\ i\neq j), \tag{16}$$

где

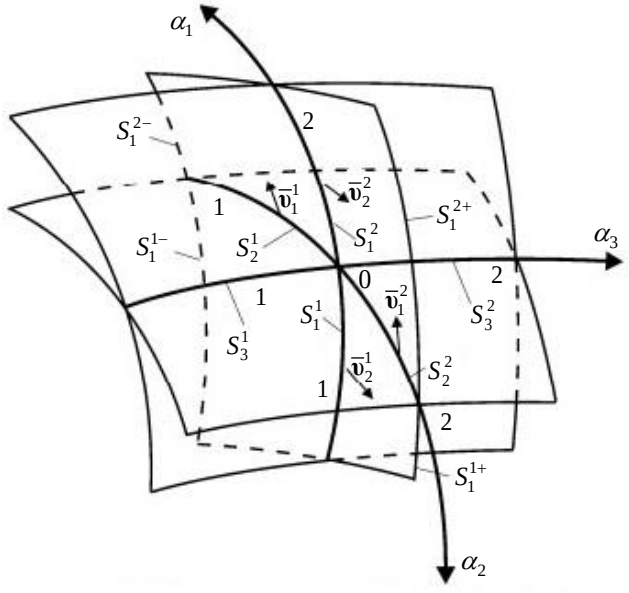
$$S_i = S_i^1 + S_i^2;\ \Delta\overline{v}_i = v_i^2 - v_i^1;$$

$$S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+};\ S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-};$$

значения $\overline{v}_i^j\,(j=1,2)$ вычисляются как средние от значений по граням элемента, примыкающих к данному ребру [2].




а)




б)

**Рис 4.** Схема обозначения дуг сетки:
а) для расчета нормальных напряжений и перемещений в криволинейном элементе;
б) для расчета касательных напряжений

Для принятой схемы процесса (рис. 3) рассматриваемую область можно разбить на элементы, грани которых будут прямоугольной формы (рис. 5). Тогда уравнения (13) и выражения (14,16) в разностном виде для элемента (рис. 5) будут иметь вид:

$$\Delta\sigma_{ii}S_{ij}\cdot S_{ik}+\Delta\sigma_{ik}S_{ki}\cdot S_{kj}+\Delta\sigma_{ij}S_{ji}\cdot S_{jk}+4V(F_i^*-I_i)=0, i,\ j,k=1,2,3; \quad (17)$$

$$\xi_{ii}=\frac{2\Delta v_i}{S_{ij}},\ i,\ j=1,2,3. \quad (18)$$

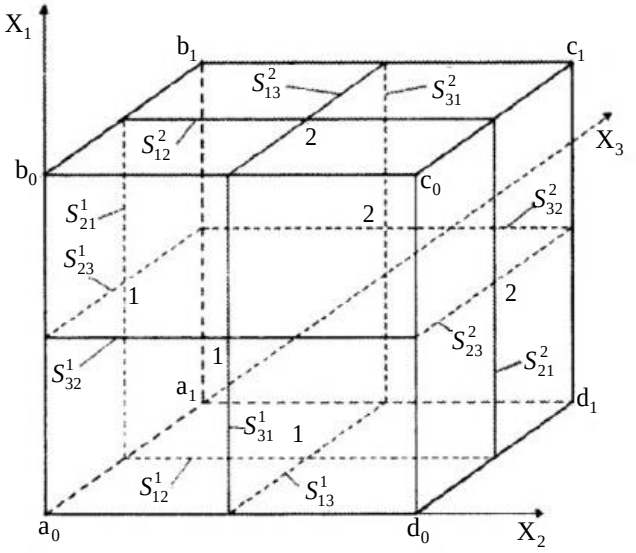



**Рис 5.** Элемент прямоугольной формы

Выражение (16) выполняется для внутренних узлов сетки (рис.6):

$$\xi_{ij}^0=\frac{2\Delta\overline{v}_j}{S_i}+\frac{2\Delta\overline{v}_i}{S_j},\ i\neq j. \quad (19)$$

Где

$$S_i=S_i^1+S_i^2;\ \Delta\overline{v}_i=\Delta\overline{v}_i^2-\Delta\overline{v}_i^1;\ \Delta\overline{v}_i^j\ (j=1,2).$$

— вычисляется как средние от значений $v_i^j$ по граням, примыкающих к данному ребру элемента. Тогда

$$\sigma_{ij}^o=\mu\xi_{ij}^o, \quad (20)$$

а $\sigma_{ij}^t(i\neq j,\ t=1,2)$ на внутренней грани

$$\sigma_{ij}^t=0,25\cdot\sum\sigma_{ij}^o. \quad (21)$$

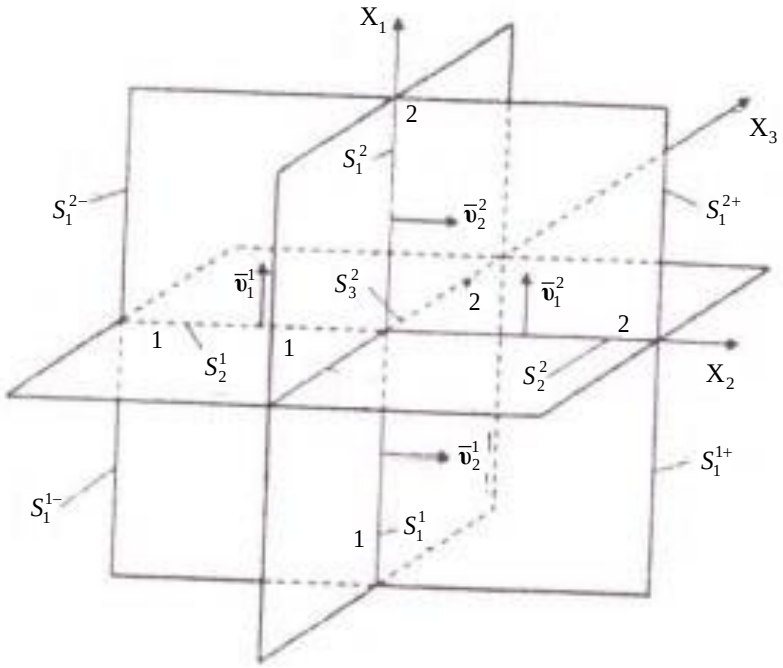



**Рис. 6.** Внутренний узел произвольного ортогонального элемента

Для элемента (рис. 5) алгебраическая система уравнений в целом примет вид:

$$\Delta\sigma_{ii}S_{ij}\cdot S_{ik}+\Delta\sigma_{ik}S_{ki}\cdot S_{kj}+\Delta\sigma_{ij}S_{ji}\cdot S_{jk}+4V(F_i^*-I_i)=0,\ i,j,k=1,2,3; \quad (22)$$

$$I_i=\rho(v_1^*\frac{(\Delta v_i)_1}{\Delta x_1}+v_2^*\frac{(\Delta v_i)_2}{\Delta x_2}+v_3^*\frac{(\Delta v_i)_3}{\Delta x_3}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11}-\sigma_{22}&=2\mu(\xi_{11}-\xi_{22}),\\ \sigma_{11}-\sigma_{33}&=2\mu(\xi_{11}-\xi_{33}),\end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\xi_{ij},\ i,j=1,2,3,\ i\neq j, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\xi_{11}+\xi_{22}+\xi_{33}&=0,\\ \xi_{ii}&=\frac{2\Delta v_i}{S_{ij}},\ i,j=1,2,3.\end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\Delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^2-\sigma_{ij}^1$; $\sigma_{ij}^t(i,j=1,2,3;t=1,2)$ — напряжение на поверхности «t» элемента (m); $\Delta v_i=v_i^2-v_i^1$; $v_i^t(i=1,2,3;t=1,2)$ — скорость перемещения на поверхности «t» элемента (m) в направлении $x_i$;

$$\sigma_{ij}=0,5(\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^2);\ v_i=0,5(v_i^1+v_i^2);\ S_{ij}=S_{ij}^1+S_{ij}^2;$$

$V$ — объем элемента, $V = \frac{S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21}}{8}$; $(\frac{\Delta v_i}{\Delta x_k})_k$ — изменение скорости $v_i$ по координате $x_k$; $v_i^*$ — средние по элементу скорости $v_i$, $i = 1,2,3.$

Повторение некоторых записей в сформулированной системе сделаны, чтобы удобства использования формул.

Система (17, 22-26) имеет довольно большое число неизвестных значений $\sigma_{ij}$, $v_i (i, j = 1,2,3)$ по граням элементов, на которые разбита область.

Данную систему можно значительно сократить. Перейдем к эквивалентной системе алгебраических уравнений.

В уравнениях (15) имеется нелинейные член $I_i$. Если принять $v_i^*$ — заданными («замороженными» на n-ой итерации), то система уравнений (17, 22-26) будет линейной.

Разобьем все неизвестные на два множества: зависимые и независимые. Определим последовательность вычислений для зависимых неизвестных. Перейдем к системе линейных алгебраических уравнений относительно независимых неизвестных.

Пусть $\Gamma_i \Big|_{a_i=0}$, $\Gamma_i^* \Big|_{a_i=a_i^*}$ $(i = 1,2,3)$ — поверхности, ограничивающие рассматриваемую область; $\Gamma_{iv}$, $\Gamma_{iv}^*$ — поверхности, где заданы скорости перемещений $v_i$, $\Gamma_{i\sigma}$, $\Gamma_{i\sigma}^*$ — поверхности, где заданы напряжения $\sigma_{ii}$. При этом

$$\Gamma_i = \Gamma_{iv} + \Gamma_{i\sigma};\ \Gamma_i^* = \Gamma_{iv}^* + \Gamma_{i\sigma}^*.$$

Выразим из уравнения (26) $v_1^2$:

$$v_1^2 = v_1^1 - (v_2^2 - v_2^1)\frac{S_{21}}{S_{32}} - (v_3^2 - v_3^1)\frac{S_{21}}{S_{13}}, \qquad (27)$$

Если принять неизвестные $v_2^t$, $v_3^t (t = 1,2)$ независимыми, то получаем, что (24) является рекуррентным соотношением, определяющим $v_1$ по всем элементам исследуемой области от $a_1 = 0$ до $a_1 = a_1^*$.

На поверхностях $\Gamma_{iv}^*$ реализуются новые уравнения:

$$F_1^f = (v_1^2)^f \Big|_{\Gamma_{1v}^*} - (v_1^*)^f = 0,\ f = 1..., f_1, \qquad (28)$$

где $(v_1^*)^f$ скорость перемещения $v_1$, заданные граничными условиями по поверхности $\Gamma_{iv}^*$, а $f_1$ — число элементов, примыкающих к поверхности $\Gamma_{iv^*}^*$.

Первую группу независимых переменных, число которых в точности соответствует числу уравнений (28),образуют $\sigma_{11}\big|_{\Gamma^*_{1v}}$ .

Рассмотрим уравнение (15), выразим из них $\sigma'_{ii}$, $i=1,2,3,$ с учетом, что $S_{ij}=S_{ik}$; $i,j,k=1,2,3$, $i\neq j\neq k$ .

$$\sigma^1_{ii}=\sigma^2_{11}+\Delta\sigma_{ik}\frac{S_{ki}}{S_{ik}}+\Delta\sigma_{ij}\frac{S_{ji}}{S_{ij}}+\frac{4V(F^*_i-I_i)}{S_{ij}-S_{ik}};\quad i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k \tag{29}$$

Данные рекуррентные соотношения будем удовлетворять от $a_i=a^*_i$ до $a_i=0$, $i,j,k=1,2,3$. На поверхностях $\Gamma_{i\sigma}$, $(i=1,2)$ будут иметь место уравнения:

$$F^f_2=(\sigma^1_{ii})^f\Big|_{\Gamma^*_{1v}}-(\sigma^*_{ii})^f=0,\ f=1,...,f_2,\ i=1,2,3. \tag{30}$$

где $\sigma^*_{ii}$ — нормальные напряжения $\sigma_{ii}$, заданные на поверхностях $\Gamma_{i\sigma}$ граничными условиями, $f_2$ — количество элементов примыкающих к поверхностям $\Gamma_{i\sigma}(i=1,2,3)$.

Тогда вторую группу независимых переменных составят скорости $v_i\big|_{\Gamma_{i\sigma}}$, $(i=1,2,3)$, число которых совпадает с числом уравнений (27).

Следующую группу уравнений по каждому элементу области составляют уравнения (21):

$$\begin{aligned}F^f_3&=(\sigma_{11})^f-(\sigma_{22})^f-2\mu((\xi_{11})^f-(\xi_{22})^f=0,\ f=2,...,f_3;\\ F^f_4&=(\sigma_{11})^f-(\sigma_{33})^f-2\mu((\xi_{11})^f-(\xi_{22})^f=0,\ f=2,...,f_4;\end{aligned} \tag{31}$$

где $f_3$, $f_4$ — количество граней, перпендикулярных соответственно координатам $x_2$, $x_3$.

Последней группой независимых переменных будут скорости перемещений $v_2, v_3$ по внутренним граням элементов, а также $v_2\big|_{\Gamma^*_{2\sigma}}$, $\sigma_{22}\big|_{\Gamma^*_{2v}}$, $v_3\big|_{\Gamma^*_{3v}}$, $\sigma_{33}\big|_{\Gamma^*_{3v}}$, суммарное количество которых равно числу уравнений (28).

Таким образом, получаем следующее множество независимых переменных:

$$X\{[\sigma_{11}\big|_{\Gamma^*_{1v}}]\},[v_i\big|_{\Gamma_{i\sigma}},i=1,2],[v_2,v_3],[v_2\big|_{\Gamma_{2\sigma}}],[\sigma_{22}\big|_{\Gamma^*_{2v}}],[v_3\big|_{\Gamma^*_{3\sigma}}],[\sigma_{33}\big|_{\Gamma^*_{3v}}]\}, \tag{32}$$

где $\Gamma_{iv}$, $\Gamma^*_{iv}$ — поверхности, где заданы скорости перемещений $v_i$; $\Gamma_{i\sigma}$, $\Gamma^*_{i\sigma}$ — поверхности, где заданы напряжения $\sigma_{ii}$; $f_1$, $f_2$ — число элементов,

примыкающих к поверхности $\Gamma_{iv}^{*}$, $\Gamma_{1\sigma}(i=1,2,3)$; $f_3$, $f_4$ — количество граней перпендикулярных соответственно координатам $x_2$, $x_3$.

Таким образом, система преобразуется в эквивалентную систему алгебраических линейных уравнений со значительно меньшим количеством неизвестных.

Определим порядок для вычисления зависимых переменных:

1. Удовлетворяет рекуррентному соотношению (27).

2. Вычисляем во внутренних узлах по формулам (19) значения $\xi_{ij}^{o}$ и по формулам (20, 21) значения $\sigma_{ij}^{t}$; $i, j=1,2,3$; $i \neq j$, $t=1,2$.

3. Вычисляем $\sigma_{ij}^{t}$ по внешним граням, примыкающим к поверхности в соответствие с граничными условиями (10).

4. Удовлетворяем рекуррентным соотношениям (29).

Таким образом, система, получаемая непосредственно аппроксимацией исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями, преобразуется в эквивалентную систему алгебраических линейных уравнений (28, 30, 31), число уравнений в которой примерно на порядок меньше, чем в исходной. Кроме того, значительно увеличивается обусловленность системы.

Коэффициенты и свободные члены новой эквивалентной системы уравнений (28, 29, 31) можно найти с помощью следующей процедуры:

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид:

$$\bar{F}_t = a_{ij}x_i + b_i = 0,\ i, j = 1,...,n. \qquad (33)$$

Если положить все неизвестные равными нулю $x_i = 0,\ i = 1,...,n,$ то, пробегая выше приведенную последовательность 1,…,4 и насчитывая, $\bar{F}_t$ найдем свободные члены новой системы (33):

$$\bar{F}_t^0 = b_i, i = 1,...,n.$$

Далее находим коэффициенты $a_{ij}$ в (33). Для этого положим $x_k = 1,\ x_i = 0,\ (i \neq k,\ i = 1,...,n)$. Опять, пробегая выше указанную последовательность, находим $F_t^k$ и $a_{ik}$ по формуле:

$$a_{ik} = \frac{\bar{F}_t^k - \bar{F}_t^0}{1},\ i = 1,...,n.$$

Таким образом, определяется вся матрица $a_{ik}$ новой эквивалентной системы.

Как было сказано выше, система (17, 22-26) становиться линейной при заданном значении $v_i^{*}$, $i=1,2,3$ в (22). Численные расчеты показали, что в алгоритме решения задачи уточнение

$$(v^*)_n = (v_i^*)_{n-1} \tag{34}$$

по каждому элементу не всегда срабатывает — итерационный процесс может расходиться.

В данной работе уточнение $v_i^*$ осуществлялось по формуле

$$(v_i^*)_n = (v_i^*)_{n-1} + k[(v_i)_n - (v_i^*)_{n-1}], \tag{35}$$

здесь $(v_i^*)_{n-1}$ — величина $(v_i^*)$ на предыдущей итерации, $(v_i^*)_n$ — величина $v_i$ на n-ой итерации, k — коэффициент сглаживания уточнений $v_i^*(k<1)$. При $k=1$ имеем (31).

Решение уравнения теплопроводности (10) осуществляется после найденных значений $v_i(i=1,2,3)$ по каждому элементу.

Для численного решения используем численный метод, описанный в работе [23], а также работу [14], в которой для стационарного случая с учетом массопереноса уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{3} t_{i2}(\theta_i^+ - \theta_k) - \sum_{i=1}^{3} t_{i1}(\theta_k - \theta_i^-) = \sum_{i=1}^{3} t_i(\theta_k - \theta_i^-) + \sum_{i=1}^{3} a_i(\theta_i^+ - \theta_k). \tag{36}$$

$$t_{12} = \frac{2F_1^2 A}{S_{21} + S_{21}^+};\ t_{11} = \frac{3F_1^1 A}{S_{21} + S_{21}^-};\ t_1 = \frac{2v_1^*}{S_{21} + S_{21}^-};\ a_1 = \frac{2v_1^*}{S_{21} + S_{21}^+};$$

$$t_{22} = \frac{2F_2^2 A}{S_{12} + S_{12}^+};\ t_{21} = \frac{2F_2^1 A}{S_{12} + S_{12}^-};\ t_2 = \frac{2v_2^*}{S_{12} + S_{12}^-};\ a_2 = \frac{2v_2^*}{S_{12} + S_{12}^+};$$

$$t_{32} = \frac{2F_3^2 A}{S_{23} + S_{23}^+};\ t_{31} = \frac{2F_3^1 A}{S_{23} + S_{23}^-};\ t_3 = \frac{2v_3^*}{S_{23} + S_{23}^-};\ a_3 = \frac{2v_3^*}{S_{23} + S_{23}^+}; \tag{37}$$

$$A = \frac{\lambda}{c\rho V_k};\ F_i^j = S_{ik}^j \cdot S_{ip}^j;\ i \neq k \neq p;\ i,k,p = 1,2,3;$$

$$V_k = \frac{S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21}}{16}.$$

Здесь $\theta_k$ — среднее значение температуры в *k*-ом элементе; $\theta_i^-, \theta_i^+$ — среднее значение температуры в элементе, следующим за элементом *k* соответственно в отрицательную и положительную сторону по координате $x_i$;

$$S_{ij}^- = S_{ij}^{1-} + S_{ij}^{2-};\ S_{ij}^+ = S_{ij}^{1+} + S_{ij}^{2+}$$

— значения дуг $S_{ij}$ по элементам, граничащим с элементом «*k*» с соответствующей стороны; $v_i^x$ — средние по элементу проекции скорости перемещений по координатным осям $x_i$ $(i=1,2,3)$.

**Алгоритм решения задачи.**

1. Исследуемая область течения разбивается на элементы ортогональной формы. Рассчитывается матрица дуг элементов.

2. Задаются граничные условия; принимаются $v_i^* = 0,\ i=1,2,3$.

3. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствие с вышеизложенной последовательностью вычислений.

4. Решается система линейных уравнений по стандартной программе, в результате решения получаем значения независимых переменных.

5. По каждому элементу и его граням насчитывается $\sigma_{ii}$, $v_i$, $\xi_{ij}$ (зависимые переменные).

6. Уточняются по каждому элементу значения $v_i^*$ по формуле (32).

7. Производится сравнение $(v_i^*)_n$ и $(v_i^*)_{n-1}$ и следует операция 3. Итерационный процесс повторяется до достижения заданной точности.

8. Решение уравнения теплопроводности (33) при граничных условиях (10).

Тепловые потоки $q_i^+$ (10) по стенкам кристаллизатора определяем аппроксимацией экспериментальных данных, приведенных в работе [6].

$$q_i^* = 2,5(v)^{0,8},\ \text{МВт/м}^2,\ i=6,7,9,10,$$

где $v$ — скорость омывания стенки кристаллизатора (м/сек).

При условии, что

$$q_i^* = -\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_i,$$

получаем

$$(\theta_n^\beta)_i = (\theta_n^k)_i - \frac{\delta}{\lambda} q_i^*,\ i=6,7,9,10,$$

где $\theta_n^\beta$ — температура элемента, примыкающего к поверхности ($n$); $\theta_n^k$ — температура внутреннего элемента, находящегося по нормали сразу же за поверхностным $\beta$; $\delta$ — расстояние от центра тяжести элемента $\beta$ до центра тяжести элемента $k$.

**Результаты численного математического моделирования.** Задавались существующие размеры кристаллизатора:

$$H = 100 \text{ см},\ B = 12{,}5 \text{ см},\ l = 100 \text{ см},\ h = 20 \text{ см},\ b = 7{,}5 \text{ см},$$

$$\delta_h = 8{,}5 \text{ см},\ \delta_B = 1{,}5 \text{ см},\ \delta_1 = 1{,}5 \text{ см},\ v_u = 1 \text{ м/мин} = 1{,}66\ldots\text{см/с}.$$

Для стационарного процесса $v^*$ определялось из равенства секундных объемов.

$$v_u \cdot B \cdot l = v^* \cdot \delta_n \cdot \delta_B;\ \Rightarrow v^* = \frac{v_u \cdot B \cdot l}{\delta_n \cdot \delta_B}.$$

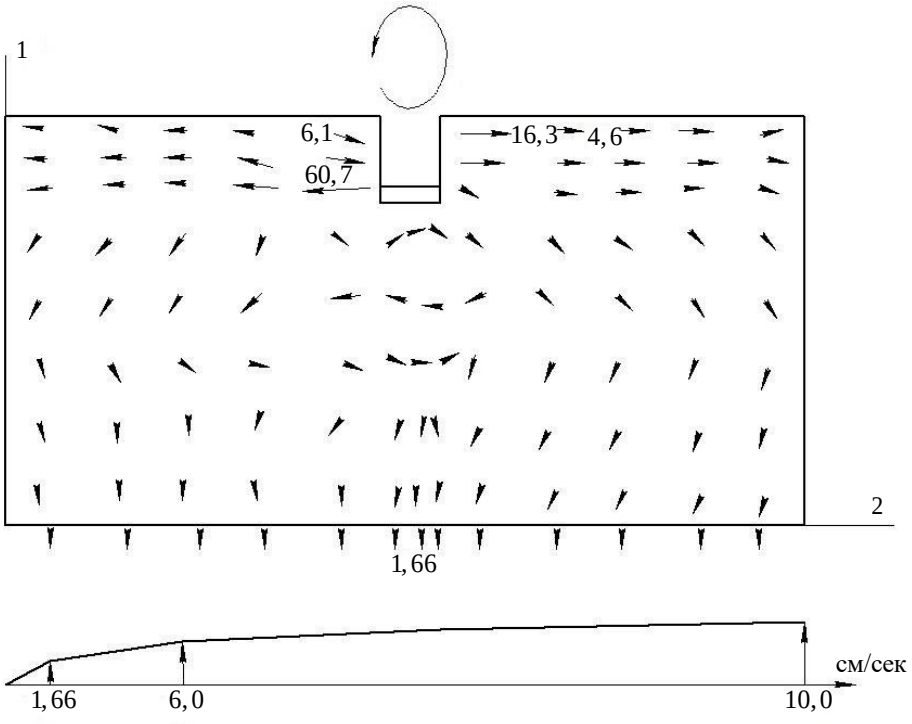
Температура истекания жидкой стали из окна ($\Gamma_5$) принималась $\theta^*\big|_{\Gamma_5} = 1600\ ^\circ\text{C}$. Температуры на поверхностях стакана (рис. 3) $\Gamma_i,\ i = 3,8,8',11$ принимались по экспериментальным данным $\theta^*\big|_{\Gamma_i} = 1550\ ^\circ\text{C},\ i = 3,8,8',11$. На поверхности $\Gamma_2$ (рис. 3) находится жидкая шлаковая «рубашка», температура которой $\theta^*\big|_{\Gamma_2} = 1550\ ^\circ\text{C}$.

Константы в формулах (34):

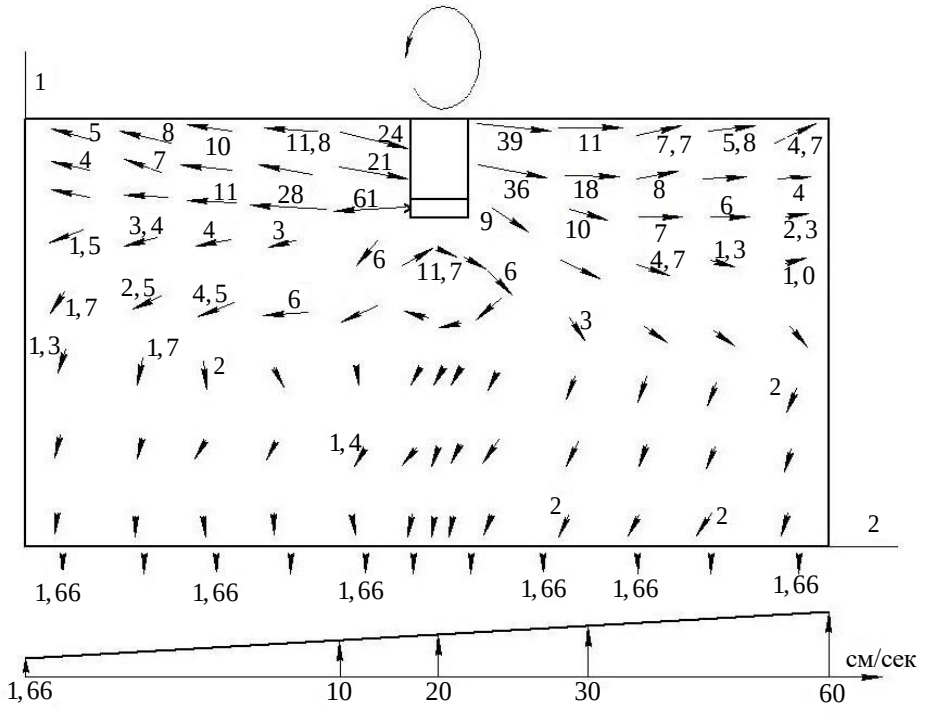
$$\lambda = 29 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)},\ c = 444.47 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)},\ \rho = 7800 \text{ кг/м}^3.$$

Коэффициент вязкости $\mu$ в уравнениях (6) принимался по работе [12], $\mu = 2{,}1\cdot 10^{-3}$ кг/(м·с). Некоторые результаты расчета представлены на рис. 7.

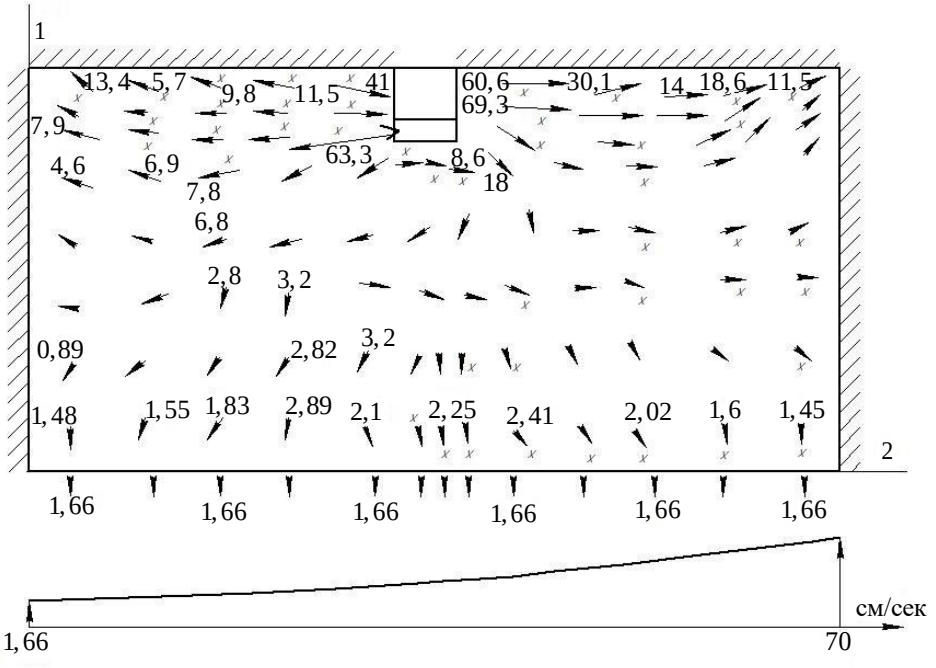
На рис. 7 представлены результаты расчетов в сечении Б-Б (рис. 3). Потоки скоростей течения металла в плоскости ($x_1$, $x_2$) для $n = 10$ об/мин (рис. 7, а); $n = 30$ об/мин (рис. 7, б); $n = 50$ об/мин (рис. 7, в). Качественно картины потока в этом сечении похожи. Несколько отличается картина потоков при $n = 10$ об/мин (рис. 7, а). Здесь наблюдаются, в отличии от $n = 30,\ 50$ (об/мин) двойной вихрь под погружным стаканом. С возрастанием скорости вращения рубашки возрастают пропорционально и скорости движения потоков жидкого металла (рис. 7), увеличивается биение металла в боковые стенки в верхней части кристаллизатора, особенно при $n = 50$ об/мин. Наблюдается даже возможный выход жидкого металла в шлаковую зону (поверхность $\Gamma_2$) в стыке с поверхностью $\Gamma_7$ (рис. 7, в). Такое явление нежелательно, так как выход металла в шлаковую рубашку вызывает бурление и заброс шлака в металл, что негативно скажется на качестве получаемого непрерывного слитка.


1
6,1
16,3
4,6
60,7
2
1,66
см/сек
1,66
6,0
10,0

а)


1
5
8
10
11,8
24
39
11
7,7
5,8
4,7
4
7
21
11
28
61
36
18
8
6
4
9
10
7
2,3
3,4
4
3
1,5
6
11,7
6
4,7
1,3
1,0
2,5
4,5
1,7
6
3
1,3
1,7
2
2
1,4
2
2
2
1,66
1,66
1,66
1,66
1,66
1,66
см/сек
1,66
10
20
30
60

б)




в)

**Рис 7.** Схема обозначения дуг сетки:
а) поле скоростей потоков течения металла в кристаллизаторе в сечении Б-Б при $n = 10$ об/мин;
б) поле скоростей потоков течения металла в кристаллизаторе в сечении Б-Б при $n = 30$ об/мин;
в) поле скоростей потоков течения металла в кристаллизаторе в сечении Б-Б при $n = 50$ об/мин;

Дать анализ температурным потокам довольно затруднительно. По всему объему идут потоки жидкого и кристаллизирующегося металла. На рис. 7, в крестиками обозначены зоны металла выше температуры кристаллизации. Ниже уровня погружного стакана наблюдается полный хаос. Может это и не плохо с точки зрения зарождения центров кристаллизации.

**Выводы.** Численно промоделирован процесс подачи жидкого металла в кристаллизатор прямоугольного сечения при вращающемся стакане с вертикальными ребрами.

Показана возможность расчета вихревых потоков на примере подвода жидкого металла в кристаллизатор. Построена математическая модель процесса заполнения жидким металлом кристаллизатора, позволяющая определять поле скорости и температур металла в зоне кристаллизатора в зависимости от числа оборотов мешалки. При числе оборотов мешалки 50 об/мин и выше наблюдается выброс жидкого металла в шлаковую ванну. Оптимальным принимается $n = 30$ об/мин.

ЛИТЕРАТУРА


[1] Дюдкин Д.А., Кисиленко В.В., Смирнов А.И. *Производство стали. Т.4. Непрерывная разливка металла.* Москва, Теплотехник, 2008, 528 с.

[2] Ефимов В.А. *Разливка и кристаллизация стали*. Москва, Металлургия, 1976, 552 с.

[3] Intern. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. October 25–28, 1994. Nagoya, Japan: ISIJ, 1994, 580 p.

[4] Шахов С.И., Смоляков А.С., Рогачиков Ю.М. Работа по применению электромагнитного перемешивания при непрерывной разливке стали. *Черная металлургия. Бюллетень научно-технической и экономической информации*, 2015, №10, с. 79-84.

[5] Dauby P., Kunstreich S. Application of micro-refrigerators as the active element on the crystallization of metall. *ISS Tech*., 2003, pp. 491–504.

[6] Стулов В.В., Матысик В.А., Новиков Т.В., Щербаков С.В., Чистяков И.В., Плотников А.П. *Разработка нового способа разливки слябовых заготовок на МЛНЗ*. Владивосток, Дальнаука, 2008, 156 с.

[7] Пат. 196254 Российская Федерация, B22D 11/114; B22D 41/62. *Устройство для подачи жидкого металла в вертикальный кристаллизатор УНРС через погружной прямоточный стакан* / Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А. – № 2021103305; заявл. 12.03.2018; опубл. 21.02.2020, 7 с.

[8] Ho K., Pehlke R. Modelling of steel solidification using the general finite difference method. *5th International Iron and Steel Congress Procedure. 6th Process Technology Conference* (April 6–9, 1986). Warrendale, 1986, vol. 6, pp. 853–866.

[9] Kohn A., Morillon Y. Etnde mathematique de la solidification des lingots en acier mi-dur. *Revue de Metallurgie*, 1966, vol. 63, no. 10, pp. 779–790.

[10] Mizikar E. Mathematical heat transfer model for solidification of continuons cast steel slabs. *Transactions of the Metallurgical Soliety of AIME*, 1967, vol. 239, no. 11, art. 1747.

[11] Szekely J., Stanek V. On heat transfer and liquid mixing in the continuous casting of steel. *Metallurgical Transactions*, 1970, vol. 1, no. 1, pp. 119-126.

[12] Larreq M., Sagues C., Wanin M. Vodele mathematique de la solidification eu coulee continue tenant compte de la convection al`interface solide-liquide. *Revue de Metallurgie*, 1978, vol. 75, no. 6, no. 337–352.

[13] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Кузнецов С.А., Горнаков А.И. Совершенствование устройств по заполнению кристаллизатора УНРС жидким металлом. *Металлург*, 2021, № 4, с. 33-35.

[14] Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Численное моделирование процесса заполнения металла кристаллизатора с отражателем УНРС. *Известия ВУЗов. Черная металлургия*, 2019, № 10, с. 747-755.

[15] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И. Математическое моделирование процесса течения металла в кристаллизаторе при его подаче из погружного стакана с эксцентричными отверстиями. *Известия ВУЗов. Черная металлургия*, 2018, № 8, с. 606-612.

[16] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И. Численное моделирование процесса заполнения металла кристаллизатора УНРС. *Известия ВУЗов. Черная металлургия*, 2017, №6, с. 493-498.

[17] Пат. 2764446 Российская Федерация, B22D 11/114; B22D 41/62. *Устройство для подачи и перемешивания стали в кристаллизаторе установки непрерывной разливки* / Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Александров А.Ю., Карпенко В.А. – № 2021114411; заявл. 20.05.2021; опубл. 17.01.2022, 7 с.

[18] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа. Учебник для вузов. 7-е изд., испр*. Москва, Дрофа, 2003, 840 с.

[19] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.

[20] Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Потянихин Д.А., Лошманов А.Ю., Квашнин А.Е. Математическое моделирование процесса деформации металла на литейно-ковочном модуле с измененным приводом боковых бойков. *Математическое моделирование и численные методы*. 2021, №3, с. 3-23.

[21] Дмитриев Э.А., Потянихин Д.А., Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Лошманов А.Ю., Квашнин А.Е. Моделирование поля температур при получении металлоизделий на литейно-ковочном модуле новой модификации. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 2, с. 63-77.

[22] Одиноков В.И., Севастьянов Г.М., Сапченко И.Г. Эволюция напряженного состояния керамической формы при нестандартном внешнем тепловом воздействии. *Математическое моделирование*, 2010, т. 22, №11, с. 97-108.

[23] Одиноков В.И., Прокудин А.Н. Моделирование процесса разрушения ледяных заторов. *Прикладная механика и техническая физика*, 2010, т. 51, № 1, с. 110 – 116.

[24] Евстигнеев А.И., Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Свиридов А.В., Иванкова Е.П., Влияние внешнего теплового воздействия на напряженное состояние оболочковых форм по выплавляемым моделям. *Математическое моделирование*, 2021, т. 33, № 1, с. 63 – 76.

[25] Одиноков В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В., Баков А.В. *Математическое моделирование сложных технологических процессов*. Москва, Наука, 2008, 176 с.

Статья поступила в редакцию 06.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Карпенко В.А. Математическое моделирование процесса перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе установке непрерывной разливки стали. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 3, с. 18–41.

**Одиноков Валерий Иванович —** д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «КнАГУ».

**Евстигнеев Алексей Иванович** — д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «КнАГУ». e-mail: diss@knastu.ru

**Дмитриев Эдуард Анатольевич** — д-р техн. наук, профессор, доцент, ректор ФГБОУ ВО «КнАГУ».

**Карпенко Владимир Анатольевич** — аспирант ФГБОУ ВО «КнАГУ».

# Mathematical modeling of the process of mixing of liquid metal in the mold of a continuous steel casting plant

© V.I. Odinokov, A.I. Evstigneev, E.A. Dmitriev, V.A. Karpenko

Komsomolsk-na-Amure State University, Khabarovsk Territory,
Komsomolsk-on-Amur, 105005, Russia

*Experimental studies of the flow of liquid metal in the UNRS crystallizer are a long, complex and time-consuming process. Therefore, mathematical modeling by numerical methods is increasingly used for this purpose. A new technology for pouring liquid metal into a crystallizer is proposed. The original patented design of the device, consisting of a direct-flow and rotating gluhodon glasses, is given. The main results of studies of the melt flow in the crystallizer volume are presented. The objects of research were the hydrodynamic and thermal fluxes of liquid metal of a new process of casting steel into a rectangular section mold of the UNRS, and the result was a spatial mathematical model describing the fluxes and temperatures of liquid metal in the mold. To model the processes occurring during the flow of metal in the crystallizer, a specially created software package was used. The theoretical calculations are based on the fundamental equations of hydrodynamics, the equations of mathematical physics (the equation of thermal conductivity taking into account mass transfer) and a proven numerical method. The studied area was divided into elements of finite dimensions, for each element the resulting system of equations was written in a difference form. The result of the solution is the fields of velocities and temperatures of the metal current in the volume of the mold. According to the developed numerical schemes and algorithms, a calculation program has been compiled. An example of calculating the casting of steel into a mold of rectangular cross-section, flow diagrams of liquid metal along various sections of the mold is given. Vector flows of liquid metal in different sections of the mold at different numbers of revolutions of the jacket with vertical ribs are clearly presented. Areas of different turbulence have been identified. The mixing mode at n = 30 rpm is considered optimal. At n = 50 rpm, liquid metal is ejected into the slag bath.*

***Keywords**: continuous casting, mold, solid-bottom glass, mixing, mathematical model, algorithm, flow rates*

REFERENCES

[1] Dyudkin D.A., Kisilenko V.V., Smirnov A.I. *Proizvodstvo stali. T.4. Nepreryvnaya razlivka metalla.* [Steel production. Vol.4. Continuous casting of metal]. Moscow, Heat engineer Publ., 2008, 528 p.

[2] Efimov V.A. *Razlivka i kristallizaciya stali* [Casting and crystallization of steel]. Moscow, Metallurgy Publ., 1976, 552 p.

[3] *Intern. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials*. October 25–28, 1994. Nagoya, Japan: ISIJ, 1994, 580 p.

[4] Shakhov S.I., Smolyakov A.S., Rogachikov Yu.M. Rabota po primeneniyu elektromagnitnogo peremeshivaniya pri nepreryvnoj razlivke stali [Work on the application of electromagnetic mixing during continuous casting of steel]. *Chernaya metallurgiya. Byulleten' nauchno-tekhnicheskoj i ekonomicheskoj informacii* [Ferrous metallurgy. Bulletin of scientific, technical and economic information], 2015, no. 10, pp. 79-84.

[5] Dauby P., Kunstreich S. Application of micro-refrigerators as the active element on the crystallization of metall. ISS Tech., 2003, pp. 491–504.

[6] Stulov V.V., Matysik V.A., Novikov T.V., Shcherbakov S.V., Chistyakov I.V., Plotnikov A.P. *Razrabotka novogo sposoba razlivki slyabovyh zagotovok na MLNZ* [Development of a new method for casting slab blanks at the CCM]. Vladivostok, Dalnauka, 2008, 156 p.

[7] Pat. 196254 Russian Federation. Int. Cl. B22D 11/114; B22D 41/62. *Ustrojstvo dlya podachi zhidkogo metalla v vertikal'nyj kristallizator UNRS cherez pogruzhnoj pryamotochnyj stakan* [A device for feeding liquid metal into the vertical crystallizer of the UNRS through an immersion ramjet glass] / Odinokov V.I., Evstigneev A.I., Dmitriev E.A. – № 2021103305; stated. 12.03.2018; publ. 21.02.2020, 7 p.

[8] Ho K., Pehlke R. Modelling of steel solidification using the general finite difference method. *5th International Iron and Steel Congress Procedure. 6th Process Technology Conference* (April 6–9, 1986). Warrendale, 1986, vol. 6, pp. 853–866.

[9] Kohn A., Morillon Y. Etnde mathematique de la solidification des lingots en acier mi-dur. *Revue de Metallurgie*, 1966, vol. 63, no. 10, pp. 779–790.

[10] Mizikar E. Mathematical heat transfer model for solidification of continuons cast steel slabs. *Transactions of the Metallurgical Soliety of AIME*, 1967, vol. 239, no. 11, art. 1747.

[11] Szekely J., Stanek V. On heat transfer and liquid mixing in the continuous casting of steel. *Metallurgical Transactions*, 1970, vol. 1, no. 1, pp. 119-126.

[12] Larreq M., Sagues C., Wanin M. Vodele mathematique de la solidification eu coulee continue tenant compte de la convection al`interface solide-liquide. *Revue de Metallurgie*, 1978, vol. 75, no. 6, no. 337–352.

[13] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Kuznetsov S.A., Gornakov A.I. Improvement of devices for filling the UNRS crystallizer with liquid metal. *Metallurgist*, 2021, no. 4, pp. 33-35.

[14] Odinokov V.I., Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Numerical simulation of the metal filling process of a mold with an UNRS reflector. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2019, no. 10, pp. 747-755.

[15] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I. Mathematical modeling of the process of metal flow in the mold when it is fed from an immersion cup with eccentric holes. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2018, no. 8, pp. 606-612.

[16] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I. Mathematical modeling of the process of metal flow in the mold when it is fed from an immersion cup with eccentric holes. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2017, no. 6, pp. 493-498.

[17] Pat. 2764446 Russian Federation. Int. Cl. B22D 11/114; B22D 41/62. *Ustrojstvo dlya podachi i peremeshivaniya stali v kristallizatore ustanovki nepreryvnoj razlivki* [A device for feeding and mixing steel in the mold of a continuous casting unit] Odinokov V.I., Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Alexandrov A.Yu., Karpenko V.A. – № 2021114411; application 20.05.2021; publ. 17.01.2022, 7 p.

[18] Loitsyanskiy L.G. *Mechanics of Liquids and Gases* [Mekhanika zhidkosti i gaza]. *7-ed*. Moscow, Drofa, 2003, 840 p.

[19] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.

[20] Odinokov V.I., Dmitriyev E.A., Evstigneev A.I., Potianikhin D.A., Kvashnin A.E. Mathematical modeling of the metal deformation process on a casting and forging module with a modified drive of the side strikers. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 3, pp. 3–23.

[21] Dmitriev E.A., Potyanikhin D.A., Odinokov V.I., Evstigneev A.I., Lashmanov A.Yu., Kvashnin A.E. Modeling of the temperature field in the production of

metal products on the casting and forging module of a new modification. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 2, pp. 63–77.

[22] Odinokov V.I., Sevastyanov G.M., Savchenko I.G. Evolution of the stress state of a ceramic mold under non-standard external thermal action. *Mathematical modeling*, 2010, no. 11, pp. 97–108.

[23] Odinokov V.I., Prokudin A.N. Modeling of the process of breaking ice jams. *Applied Mechanics and technical physics*, 2010, no. 1, pp. 110–116.

[24] Evstigneev A.I., Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Sviridov A.V., Ivankova E.P. The influence of external thermal action on the stress state of shell molds according to the smelted models. Mathematical modeling, 2021, no. 1, pp. 63–76.

[25] Odinokov V.I., Kaplunov B.G., Peskov A.V., Bakov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie slozhnyh tekhnologicheskih processov* [Mathematical modeling of complex technological processes]. Moscow, Science Publ., 2008, 176 p.

**Odinokov V. I**., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University.

**Evstigneev A.I.,** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: diss@knastu.ru

**Dmitriev E.A.,** Dr. Sci. (Eng.), Assoc. Professor, Rector of Komsomolsk-na-Amure State Uni-versity.

**Karpenko V.A.**, Postgraduate student, Komsomolsk-na-Amure State University.