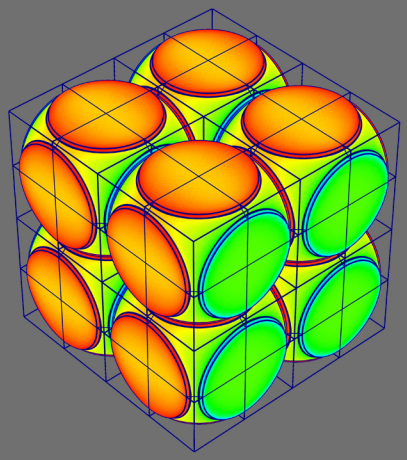
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Богданов И.О., Маремшаова А.А. Конечно-элементное моделирование собственных колебаний оболочечных конструкций. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 3, с. 3–17.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/313/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:50:13

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-3-317

Конечно-элементное моделирование собственных колебаний оболочечных конструкций

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин,
И.О. Богданов, А.А. Маремшаова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен численный алгоритм решения задачи на собственные колебания для тонкостенных оболочечных конструкций, на основе метода конечных элементов. Разработан программный модуль в составе программного комплекса SMCM, который реализует предложенный численный алгоритм. Было проведено решение тестовой задачи для собственных колебаний цилиндрического оболочечного элемента конструкции. Проведен сравнительный анализ собственных частот и собственных форм с аналогичными результатами, полученными с помощью двумерного оболочечного решения в ПК ANSYS, а также с результатами решения трехмерной задачи на собственные колебания в ПК ANSYS.

Ключевые слова: *оболочки, собственные колебания, метод конечных элементов, вариационные постановки задач, ANSYS, SMCM*

Введение. В настоящее время для расчета инженерных тонкостенных конструкций часто используются методы двумерных теорий пластин и оболочек [1-11], которые позволяют снизить размерность решаемой задачи и вместо 3D задачи решать 2D задачи, которые, как правило, требуют существенно более низких характеристик для применяемой вычислительной техники. Однако при решении задач теории тонкостенных пластин и оболочек дополнительно возникают различные сложности, в частности, проблема точности аппроксимации решения задачи по толщине оболочки [5], влияние типа конечного элемента на решение, а также проблема корректного сопряжения решения в зоне стыка различных оболочечных элементов конструкций. В настоящей работе предложен численный алгоритм решения задачи на собственные колебания для оболочечных конструкций. В работе проведено сравнение результатов расчетов, полученных на основе оболочечной теории в программном комплексе ANSYS и в программном комплексе SMCM, разработанном в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н. Э. Баумана [12].

Математическая постановка 3-мерной задачи о свободных колебаниях. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях конструкции в ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$ [13,14]:

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0, \\
\boldsymbol{\sigma} = {}^4C \cdot\cdot \varepsilon, \\
2\boldsymbol{\varepsilon} = 2\mathrm{def}\left(\mathbf{u}\right) = \nabla \otimes \mathbf{u} + \left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right)^T, \\
\mathbf{n} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}\right]\Big|_{\Sigma_l} = 0, \ \left[\mathbf{u}\right]\Big|_{\Sigma_l} = \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Sigma^{\pm}} = \mathbf{0}, \\
\mathbf{u}\Big|_{\Sigma^T} = \mathbf{0},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; ${}^4\mathbf{C}\left(\mathbf{x}\right)$ — переменное симметричное положительно-определенное тензорное поле модулей упругости (четвертого ранга); ∇ — набла–оператор [15]; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к области; ρ — плотность; ω — частота колебаний.

Для конечно-элементного решения задачи (1) рассмотрим слабое решения этой задачи. Пусть $Y = \left[H^1\left(\Omega\right)\right]^3$ и $V_{\Sigma^T}\left(Y\right) = \left\{\mathbf{w} \in Y : Tr_{\Sigma^T}\left(\mathbf{w}\right) = 0\right\}$, $\boldsymbol{\omega}_e \in Y$ — такой вектор, что $Tr_{\Sigma^T}\left(\boldsymbol{\omega}_e\right) = 0$. Слабым решением задачи (1) называется такой вектор $\mathbf{u} \in Y$, что если $\boldsymbol{\omega} \in Y$ — такой вектор, что $\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \in V_{\Sigma^T}\left(Y\right)$, и $\forall \mathbf{w} \in V_{\Sigma^T}\left(Y\right)$ удовлетворяется вариационное уравнение для задачи

$$
\int\limits_{\Omega} \mathrm{def}\left(\mathbf{w}\right) \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}\right) d\Omega = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_n d\Sigma \tag{2}
$$

где

$$
\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}\right) = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \mathrm{def}\left(\mathbf{u}\right), \ \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma_\sigma} \ \text{ и } \ \Sigma_\sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-.
$$

Алгоритм численного решения задачи собственных колебаний для тонкостенной оболочки. Рассмотрим задачу (2) для тонкостенной оболочки Ω, для которой введем ортогональные (криволинейные) координаты X^i, в которых это тело представляет собой некоторую окрестность двумерной поверхности Σ_0:

$$
\begin{gathered}
\Omega = \{\mathbf{x} \in R^3 \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\rho}(X^1, X^2) + X^3 \mathbf{n}(X^1, X^2) : (X^1, X^2) \in \Sigma_0, \\
X^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]\},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где $\boldsymbol{\rho}(X^1, X^2)$ — радиус вектор точек на срединной поверхности, $\mathbf{n}(X^1, X^2)$ — вектор нормали к срединной поверхности, $\mathbf{x}$ — радиус вектор произвольной точки области.

Введем для Ω векторы локального базиса

$$\mathbf{r}_I = \partial_I \mathbf{x} = \partial_I \boldsymbol{\rho} + X^3 \partial_I \mathbf{n} = \boldsymbol{\rho}_I + X^3 \mathbf{n}, \mathbf{r}_3 = \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{n},$$
$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial X^i},\ \boldsymbol{\rho}_I = \partial_I \boldsymbol{\rho},\ \mathbf{n} = \partial_I \mathbf{n},\ i,j,k,l,... \in \{1,2,3\},\ I,J,K,L,... \in \{1,2\}. \quad (4)$$

Будем предполагать выполненными следующие допущения, которые обычно принимают в теориях оболочек типа теории Тимошенко [1,10]:

1) члены соотношений, имеющие порядок $O\left(h^k\right)$, $k>1$ пренебрежимо малы;

2) вместо пространства $Y = \left[H^1(\Omega)\right]^3$ рассматривается $\overset{\circ}{Y}$ пространство вектор-функций вида:

$$\mathbf{u}\left(X^i\right) = \mathbf{U}\left(X^I\right) + X^3 \boldsymbol{\gamma}\left(X^I\right), \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} = 0,$$
$$\mathbf{U}, \boldsymbol{\gamma} \in \left[H^1(\Sigma_0)\right]^3,\ X^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]; \quad (5)$$

3) нормальные деформации пренебрежимо малы:

$$\varepsilon_{33} = \mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6)$$

Введем прямоугольную декартову систему координат Ox^i, с базисными ортами $\mathbf{e}_i$. Тогда каждому элементу $\mathbf{u} = \mathbf{U} + X^3 \boldsymbol{\gamma} \in \overset{\circ}{Y}$ может быть однозначно поставлен в соответствие столбец $u \in \left[H^1(\Sigma_0)\right]^6$:

$$u = \begin{pmatrix} U^1 & U^2 & U^3 & \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{pmatrix}^T,\ \mathbf{U} = U^i \mathbf{e}_i,\ \boldsymbol{\gamma} = \gamma^i \mathbf{e}_i,\ \gamma^i n_i = 0.$$

Дадим постановку задачи для слабого решения в теории оболочек Тимошенко. Пусть $Y^1 = \left[H^1(\Sigma_0)\right]^6$, а $\omega \in Y^1$ — такая вектор-функция, что $Tr_{\Sigma_u}(\omega) = \mathbf{0}$. Тогда слабым решением задачи поиска напряженно-деформированного состояния оболочки Тимошенко будем называть такой элемент $\mathbf{u} \in Y^1$, что $u - w \in V_\Gamma\left(Y^1\right)$ и $\forall \mathbf{w} \in V_\Gamma\left(Y^1\right)$ и выполнено соотношение — вариационное уравнение:

$$\int_\Sigma (Lw)^T C (Lu) d\Sigma = \omega^2 \int_\Sigma w^T R u d\Sigma \quad (7)$$

Здесь оператор L имеет вид:

$$L=\begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11}^{1} & \mathrm{P}_{11}^{2} & \mathrm{P}_{11}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{P}_{22}^{1} & \mathrm{P}_{22}^{2} & \mathrm{P}_{22}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{P}_{12}^{1}+\mathrm{P}_{21}^{1} & \mathrm{P}_{12}^{2}+\mathrm{P}_{21}^{2} & \mathrm{P}_{12}^{3}+\mathrm{P}_{21}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{N}_{11}^{1} & \mathrm{N}_{11}^{2} & \mathrm{N}_{11}^{3} & \mathrm{P}_{11}^{1} & \mathrm{P}_{11}^{2} & \mathrm{P}_{11}^{3} \\ \mathrm{N}_{22}^{1} & \mathrm{N}_{22}^{2} & \mathrm{N}_{22}^{3} & \mathrm{P}_{22}^{1} & \mathrm{P}_{22}^{2} & \mathrm{P}_{22}^{3} \\ \mathrm{N}_{12}^{1}+\mathrm{N}_{21}^{1} & \mathrm{N}_{12}^{2}+\mathrm{N}_{21}^{2} & \mathrm{N}_{12}^{3}+\mathrm{N}_{21}^{3} & \mathrm{P}_{12}^{1}+\mathrm{P}_{21}^{1} & \mathrm{P}_{12}^{2}+\mathrm{P}_{21}^{2} & \mathrm{P}_{12}^{3}+\mathrm{P}_{21}^{3} \\ \mathrm{N}_{1}^{1} & \mathrm{N}_{1}^{2} & \mathrm{N}_{1}^{3} & \rho_{1}^{1} & \rho_{1}^{2} & \rho_{1}^{3} \\ \mathrm{N}_{2}^{1} & \mathrm{N}_{2}^{2} & \mathrm{N}_{2}^{3} & \rho_{2}^{1} & \rho_{2}^{2} & \rho_{2}^{3} \\ 0 & 0 & 0 & n^{1} & n^{2} & n^{3} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\mathrm{P}_{IJ}^{k}=\rho_{I}^{k}\frac{\partial}{\partial X^{J}},\ \mathrm{N}_{IJ}^{k}=n_{I}^{k}\frac{\partial}{\partial X^{J}},\ \mathrm{N}_{I}^{k}=n^{k}\frac{\partial}{\partial X^{I}},\ \boldsymbol{\rho}_{I}=\rho_{I}^{k}\mathbf{e}_{k},\ \mathbf{n}_{I}=n_{I}^{k}\mathbf{e}_{k}.$$

Матрица масс R имеет вид:

$$R=\begin{pmatrix} \overline{\rho} & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\overline{\rho}=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho dX^{3},\ \rho_1=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho X^{3}dX^{3},\ \rho_2=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\left(X^{3}\right)^{2}dX^{3}.$$

Матрица модулей упругости C имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} \overline{C} & B & \overline{C}_{ts} & 0 \\ B & D & B_{ts} & 0 \\ \overline{C}_{ts}^{T} & B_{ts}^{T} & B_{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}^{1111} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$C=\begin{pmatrix} \overline{C} & B & \overline{C}_{ts} \\ B & D & B_{ts} \\ \overline{C}_{ts}^{T} & B_{ts}^{T} & B_{s} \end{pmatrix},\ \overline{C}=\begin{pmatrix} \overline{C}^{1111} & \overline{C}^{1122} & \overline{C}^{1112} \\ \overline{C}^{1122} & \overline{C}^{2222} & \overline{C}^{2212} \\ \overline{C}^{1112} & \overline{C}^{2212} & \overline{C}^{1212} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} B^{1111} & B^{1122} & B^{1112} \\ B^{1122} & B^{2222} & B^{2212} \\ B^{1112} & B^{2212} & B^{1212} \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} D^{1111} & D^{1122} & D^{1112} \\ D^{1122} & D^{2222} & D^{2212} \\ D^{1112} & D^{2212} & D^{1212} \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{ts}=\begin{pmatrix} \bar{C}^{1113} & \bar{C}^{1123} \\ \bar{C}^{2213} & \bar{C}^{2223} \\ \bar{C}^{1213} & \bar{C}^{1223} \end{pmatrix},\ B_{ts}=\begin{pmatrix} B^{1113} & B^{1123} \\ B^{2213} & B^{2223} \\ B^{1213} & B^{1223} \end{pmatrix},\ B_{s}=\begin{pmatrix} B^{1313} & B^{1323} \\ B^{1323} & B^{2323} \end{pmatrix}.$$

Для решения данной задачи на основе метода конечных элементов более удобной является запись с применением вариационного уравнения вариационного принципа Хеллингера-Рейснера, которая имеет следующий вид.

Слабым решением задачи поиска напряженно-деформированного состояния оболочки Тимошенко будем называть такую пару $\begin{pmatrix} u & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \in Y^1 \times \left[H^1\left(\Sigma_0\right) \right]^9$, что $u-w \in V_{\partial\Sigma}\left(Y^1\right)$ и:

$$\begin{cases} B^1_{HR}\left(w,\tilde{\varepsilon}\right)=f\left(w,u\right), \forall w \in V_{\Gamma}\left(Y^1\right), \\ B^1_{HR}\left(u,\mu\right)=B^2_{HR}\left(\mu,\tilde{\varepsilon}\right), \forall \mu \in \left[H^1\left(\Sigma_0\right) \right]^9, \end{cases} \tag{11}$$

где:

$$B^1_{HR}\left(w,\tilde{\varepsilon}\right)=\int_{\Sigma}\left(\tilde{L}w\right)^T\tilde{C}\tilde{\varepsilon}d\Sigma,\ B^2_{HR}\left(\mu,\tilde{\varepsilon}\right)=\int_{\Sigma}\mu^T\tilde{C}\tilde{\varepsilon}d\Sigma,\ f\left(w\right)=\int_{\Sigma}w^TRud\Sigma.$$

Был разработан программный модуль, в котором реализован предложенный численный алгоритм решения вариационной задачи для собственных колебаний тонкостенной оболочки на основе метода конечного элемента, с применением типичных процедур этого метода [16]. Программный модуль разработан как составная часть программного комплекса SMCM, созданного в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана [12].

Результаты численного моделирования. Для анализа эффективности разработанного численного алгоритма было проведено 3 типа расчетов задачи на собственные колебания:

1) трехмерный расчет в программном комплексе ANSYS 2021 R1;
2) оболочечный расчет в программном комплексе ANSYS 2021 R1;
3) оболочечный расчет в программном комплексе SMCM.

В программе SolidWorks были построены:

– геометрия оболочки с размерами $0{,}3\text{ м} \times 0{,}3\text{ м} \times 0{,}15\text{ м}$ (Рис. 1),

– трехмерная геометрия, полученная путем отращивания толщины $h=2$ мм от оболочки, при этом считая оболочку срединной поверхностью.

Были сгенерированы сетки:

a) в ПК ANSYS — тетраэдральная сетка с линейной аппроксимацией, размер сетки составил: 13,9 млн конечных элементов, 2,9 млн узлов, для решения задачи по варианту № 1;

b) в ПК ANSYS — треугольная сетка с квадратичной аппроксимацией, размер сетки составил: 37,8 тыс конечных элементов, 76,4 тыс узлов, для решения задачи по варианту № 2;

c) в SMCM - треугольная сетка с квадратичной аппроксимацией, размер сетки составил: 37,8 тыс конечных элементов, 76,4 тыс узлов, для решения задачи по варианту № 3.

Для всех расчетов был выбран материал, упругие свойства которого представлены в таблице 1.

Таблица 1

Упругие свойства материала

Упругие константы	Значения
Модуль упругости E, ГПа	300
Коэффициент Пуассона ν	0,3
Плотность ρ, кг/м^3	7850

Были заданы следующие граничные условия:

1) в расчете 1 на торце геометрии заданы перемещения по OX, OY, OZ, равные нулю (рис. 1);

2) в расчетах 2,3 заданы на одном торце: перемещения по OX, OY, OZ, равные нулю, а также углы наклоны нормали к OX, OY, OZ, равные нулю (рис. 1).

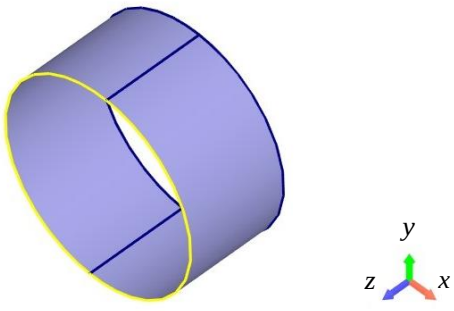


Рис 1. Граничное условие: перемещения

Сравнительные результаты расчетов полей перемещений U_x, U_y,U_z для разных форм колебаний срединной поверхности в глобальной системе координат, где OX направлена по нормали к поверхности цилиндра, для всех 3-х вариантов представлены на рисунках 2, 3 и 4, а также в таблицах 2-4. Анализируя полученные результаты расчетов по максимальному и минимальному значениям полей перемещений (таблицы 2-4), можно сделать вывод, что наиболее приближенным решением к варианту № 1 расчета — решению трехмерной задачи на собственные колебания в ПК ANSYS, является решение, полученное в ПК SMCM. Оболочечный вариант № 2 решения

задачи в ПК ANSYS обеспечивает более низкую точность моделирования перемещений.

Таблица 2

Первая форма колебаний: сравнение максимальных и минимальных значений перемещений для всех вариантов расчета

Поля перемещений	1 расчет Максимум	2 расчет Максимум	3 расчет Максимум	1 расчет Минимум	2 расчет Минимум	3 расчет Минимум
U_x	1,6818	1,8350	1,7497	-1,5706	-1,5602	-1,4332
U_y	1,7109	1,6168	1,6731	-1,4896	-1,7130	-1,6552
U_z	0,0862	0,0727	0,0908	-0,0863	-0,0736	-0,0908

Таблица 3

Вторая форма колебаний: сравнение максимальных и минимальных значений перемещений для всех вариантов расчета

Поля перемещений	1 расчет Максимум	2 расчет Максимум	3 расчет Максимум	1 расчет Минимум	2 расчет Минимум	3 расчет Минимум
U_x	1,7100	1,7882	1,6541	-1,4896	-1,6855	-1,6735
U_y	1,5716	1,7046	1,7490	-1,6827	-1,5380	-1,4334
U_z	0,0863	0,0730	0,0908	-0,0863	-0,0730	-0,0908

Таблица 4

Третья форма колебаний: сравнение максимальных и минимальных значений перемещений для всех вариантов расчета

Поля перемещений	1 расчет Максимум	2 расчет Максимум	3 расчет Максимум	1 расчет Минимум	2 расчет Минимум	3 расчет Минимум
U_x	1,5215	1,6882	1,5582	-1,5216	-1,7754	-1,5582
U_y	1,5230	1,7421	1,5575	-1,5228	-1,7665	-1,5575
U_z	0,1044	0,0545	0,1052	-0,1044	-0,0545	-0,1052

Сравнительные результаты полученных собственных частот (таблица 5) показывают, что наиболее приближенными значениями к собственным частотам варианта № 1 расчета являются частоты, полученные в результаты решения в ПК SMCM. Кроме того, на рисунке 4 можно заметить, что форма колебаний, полученная для собственной частоты ν_3 при оболочечном расчете № 2 в ПК ANSYS,

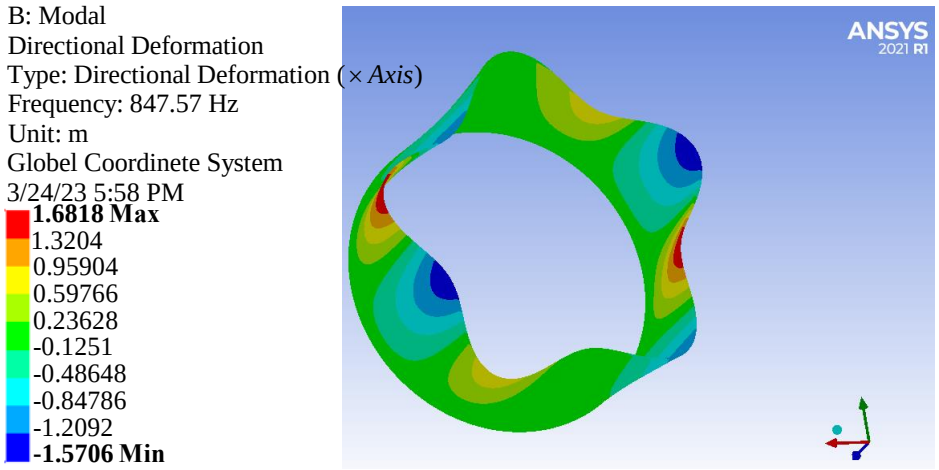
сильно отличается от формы, полученной для ν_3 при трехмерном расчете № 1.

Но форма колебаний для ν_3, полученная при оболочечном расчете № 3 в ПК ANSYS, повторяет эталонную форму при трехмерном расчете № 1.

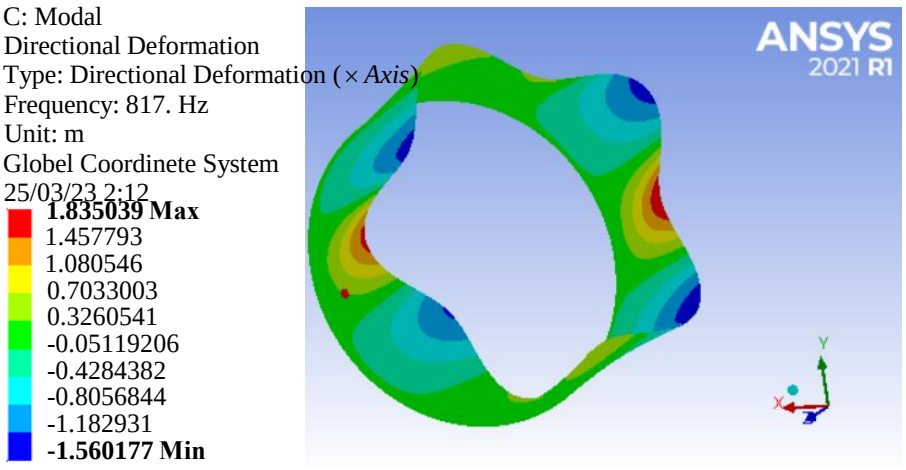
Таблица 5

Сравнение собственных значений

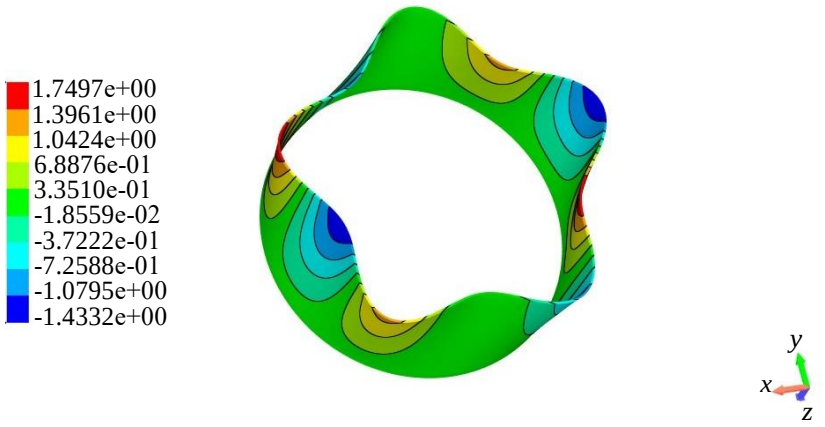
	1 расчет	2 расчет	3 расчет
ν_1	847,57	817,00	872,0269
ν_2	847,58	817,23	872,0274
ν_3	935,02	907,51	963,3300



а

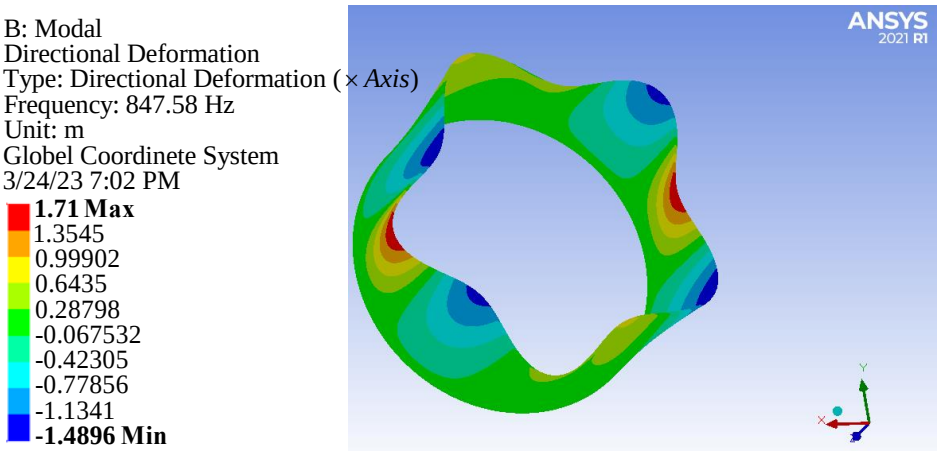


б

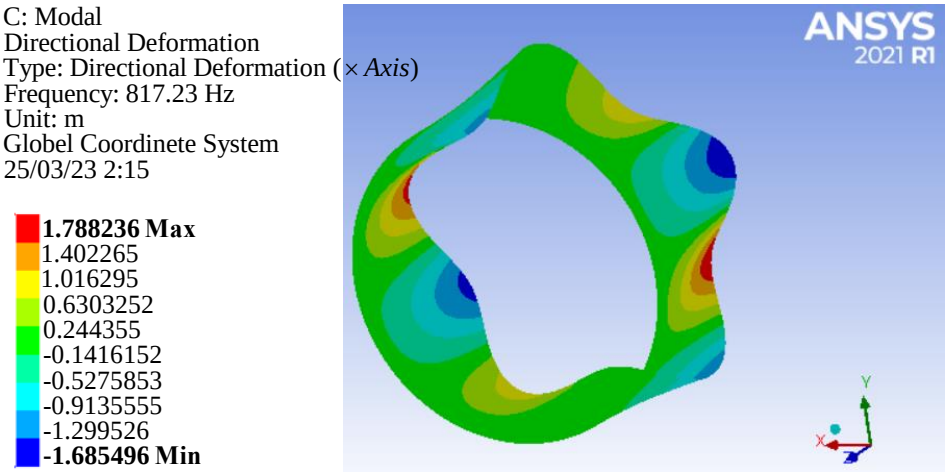


в

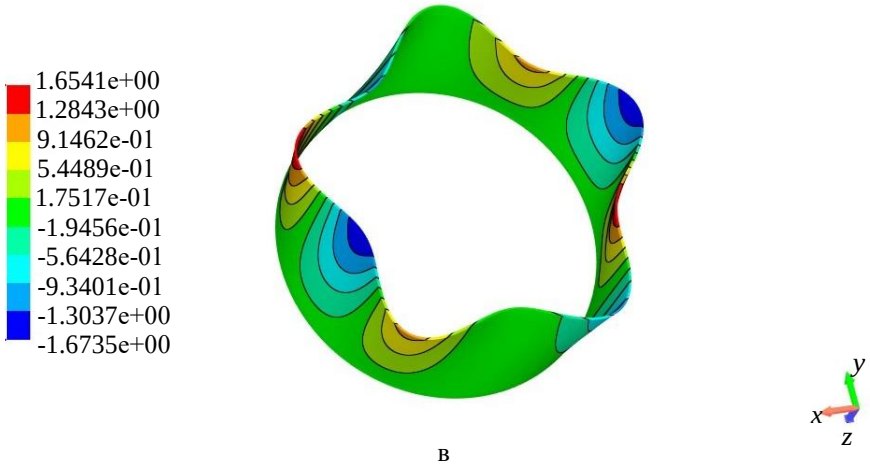
Рис. 2. Сравнение собственной формы колебаний для ν_1
(а — трехмерный расчет 1 (ANSYS); б — оболочечный расчет 2 (ANSYS);
в — оболочечный расчет 3 (SMCM))



а

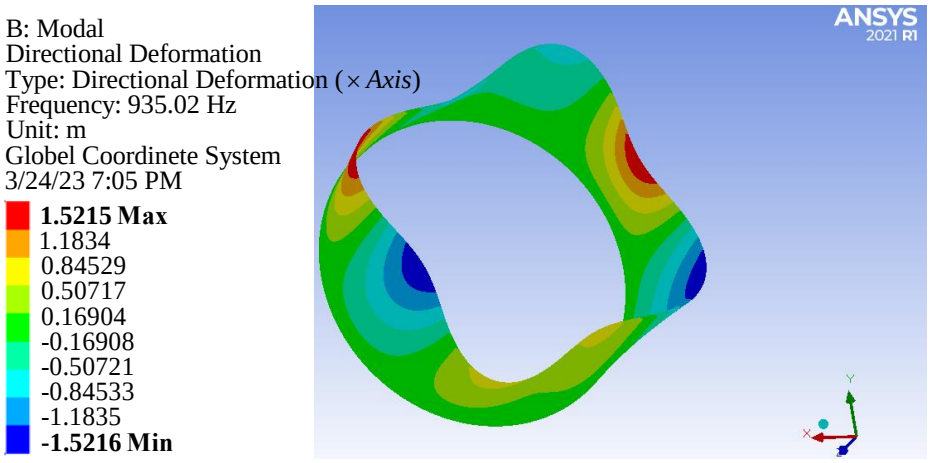


б

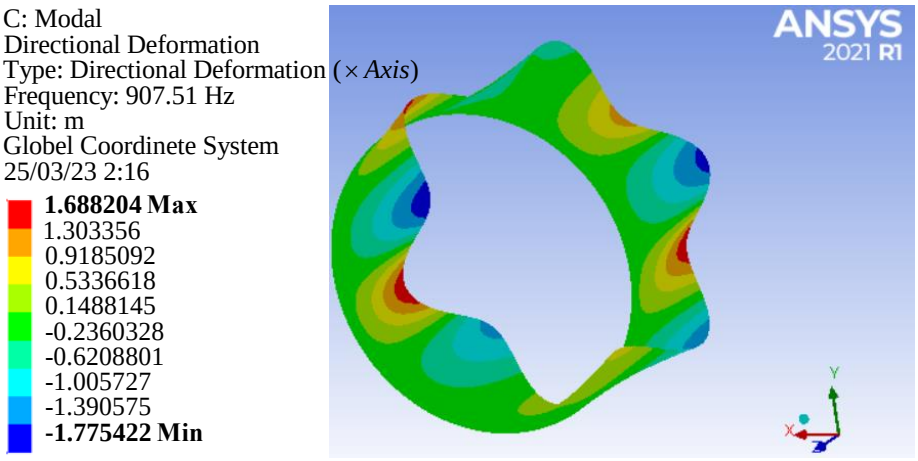


в

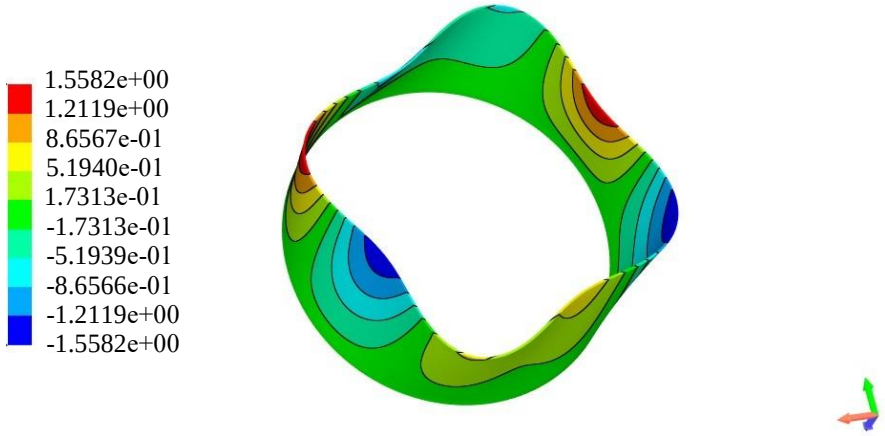
Рис. 3. Сравнение собственной формы колебаний для ν_2
(а — трехмерный расчет 1 (ANSYS); б — оболочечный расчет 2 (ANSYS);
в — оболочечный расчет 3 (SMCM))



а



б



в

Рис. 4. Сравнение собственной формы колебаний для ν_3
(а — трехмерный расчет 1 (ANSYS); б — оболочечный расчет 2 (ANSYS);
в — оболочечный расчет 3 (SMCM))

Выводы. Предложен численный алгоритм решения задачи на собственные колебания для тонкостенных оболочечных композитных конструкций и создано программное обеспечение SMCM на основе метода конечных элементов и разработанного численного алгоритма.

Было проведено решение тестовой задачи для оболочечного элемента цилиндрической конструкции для 3-х вариантов расчетов: решения трехмерной задачи упругости в ПК ANSYS, оболочечного решения ПК ANSYS и с помощью оболочечного решения комплекса SMCM.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 271 с.

[2] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[3] Зверяев Е. М., Макаров Г. И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 2, с. 308-321.

[4] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.

[5] Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. *Расчет пластин методом конечных элементов: учеб. пособие для вузов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 232 с.

[6] Попов Б.Г. *Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 294 с.

[7] Dimitrienko Y.I., Yurin Yu.V., Maremshaova A.A. 3D Finite Element Modeling of Stresses in Filament Wound Structures. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1990, iss. 012060, pp. 1-8. DOI:10.1088/1742-6596/1990/1/012060.

[8] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 84–110.

[9] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 114–132

[10] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. *Математическое моделирование и численные методы,* 2018, № 1, с. 16–40.

[11] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Asymptotic Theory for Vibrations of Composite Plates. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no 60, pp. 2993 – 3002.

[12] Свидетельство № 2018614767 *Программа MultiScale_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2018677684; заявл. 21.02.2018; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17.04.2018 — [1].

[13] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[14] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2011, 722 p.

[15] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and Nonlinear Tensor Functions. Kluwer Academic Publishers*. Dordrecht/Boston/London, 2002, 680 p.

[16] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. Москва, Мир, 1979, 392 с.

Статья поступила в редакцию 15.03.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Богданов И.О., Маремшаова А.А. Конечно-элементное моделирование собственных колебаний оболочечных конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 3, с. 3–17.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Богданов Илья Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Маремшаова Анастасия Александровна — инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru

Finite element modeling of natural vibrations of shell structures

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, I.O. Bogdanov, A.A. Maremshaova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A numerical algorithm for solving the problem of natural vibrations for thin-walled shell structures based on the finite element method is proposed. A software module has been developed as part of the SMCM software package, which implements the proposed numerical algorithm. A test problem was solved for natural vibrations of a cylindrical shell structural element. A comparative analysis of eigenfrequencies and eigenmodes was carried out with similar results obtained using a two-dimensional shell solution in the ANSYS software package, as well as with the results of solving a three-dimensional problem for natural vibrations in the ANSYS software package.

***Keywords**: shells, natural oscillations, finite element method, variational problem statements, ANSYS, SMCM*

REFERENCES

[1] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstrukcii iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 271 p.

[2] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Generalized model of the mechanics of thin-walled structures made of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 24, iss. 4, pp. 537–543.

[3] Zveryaev E. M, Makarov G. I. A general method for constructing theories of the Timoshenko type. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 308–321.

[4] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnyh plastin I obolochek iz kompozicionnyh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.

[5] Belkin A.E., Gavryushin S.S. *Raschet plastin metodom konechnyh elementov: ucheb. posobie dlya vuzov* [Calculation of plates by the finite element method: textbook. manual for universities]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 232 p.

[6] Popov B. G. *Raschet mnogoslojnyh konstrukcij variacionno-matrichnymi metodami* [Calculation of multilayer structures by variation-matrix methods*]*. Moscow, BMSTU Publ., 1993, 294 p.

[7] Dimitrienko Y.I., Yurin Yu.V., Maremshaova A.A. 3D Finite Element Modeling of Stresses in Filament Wound Structures. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1990, iss. 012060, pp. 1-8. DOI:10.1088/1742-6596/1990/1/012060.

[8] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Thermal stress modeling in composite shells based on asymptotic theory. Part 1. General shell theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 4, pp. 84–110.

[9] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Modeling of the stresses in thin composite cylindrical shells based on the asymptotic theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 114–132.

[10] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Timoshenko-type asymptotic theory for thin multi-layered plates shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 16–40.

[11] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Asymptotic Theory for Vibrations of Composite Plates. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no 60, pp. 2993 – 3002.

[12] Certificate no. 2018614767 *Programma MultiScale_SMCM dlya mnogomasshtabnogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstrukcij iz kompozicionnyh materialov, na osnove metoda mnogourovnevoj asimptoticheskoj gomogenizacii i konechno-elementnogo resheniya trekhmernyh zadach teorii uprugosti* [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of three-dimensional problems of elasticity theory]: certificate of ofic. registration of computer programs/ Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2018677684; application 21.02.2018; registered in the register of computer programs 17.04.2018 — [1].

[13] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[14] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2011, 722 p.

[15] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and Nonlinear Tensor Functions. Kluwer Academic Publishers*. Dordrecht/Boston/London, 2002, 680 p.

[16] Segerlind L. *Primenenie metoda konechnyh elementov* [Application of the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1979, 392 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Y.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Bogdanov I.O., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Maremshaova A.A., engineer of the Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University, Assistant, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru