ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Моделировании противоборства двух сторон с учетом резервирования. Математическое моделирование и численные методы,2023, № 2, с. 155–163

УДК 519.8 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-2-155163

Моделировании противоборства двух сторон с учетом резервирования

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе метода динамики средних разработана модель противоборства двух сторон, учитывающая подвод резервов одной из сторон. Установлено, что своевременный подвод резервов может существенно повлиять на ход протекания процесса и его окончательный результат. Также показано, что использование резерва в начале действий значительно улучшает результативность противоборства сторон.

Ключевые слова: *противоборство двух сторон, резервирование*

Введение. Задачи моделирования динамики противоборства сторон являются актуальными при исследовании и прогнозировании различных социально-экономических процессов, например, процессов острой конкуренции или конфликтов различных компаний, корпораций, государств и т.п. [1-10]. В настоящей работе рассматривается частная проблема – моделирования противоборства двух сторон, состоящих из мелких составных частей (единиц), с учетом частичного и постепенного вовлечения в конфликт их составных частей, т.е. «резервированием». Одна из сторон проводит более активную тактику в конфликте, она названа «наступающей» стороной, вторая проводит менее активную тактику, она названа «обороняющейся». При отражении наступления одной из сторон часть единиц обороняющейся стороны остаётся в резерве, чтобы при необходимости в нужный момент усилить наиболее уязвимое направление своей обороны.

Для описания процесса противоборства двух сторон будем использовать метод динамики средних (уравнения Ланчестера [4-8]), основанный на следующем допущении. Согласно закону больших чисел в каждый момент времени взаимного действия количества сохранившихся единиц обеих противоборствующих сторон близки к своим средним численностям (математическим ожиданиям). Это даёт возможность не рассматривать подробности, связанные со случайным состоянием каждой участвующей в процессе единицы, и рассматривать этот процесс как детерминированный [6-7]. При этом допущении все показатели не будут случайными величинами и заменятся своими математическими ожиданиями.

Последовательность действий, производимых каждой из сторон, участвующих в конфликте, представляется в виде пуассоновского потока событий [5, 8]. Применяется также приём, заключающийся в переходе от потока действий к потоку успешных действий, который также полагается пуассоновским [8]. Успешным назовём действие, приводящее к нарушению функционирования единицы противоположной стороны [12-12].

Описание модели процесса конфликтного противоборства. Пусть обороняющаяся сторона X имеет в начале $x_o + x_d$ однотипных единиц, причём в противоборство вступают x_o единиц, а x_d остаются в резерве и вступают в противоборство, если у стороны X остаются непоражёнными x_1 единиц. Наступающая сторона Y имеет в начале процесса y_o также однотипных единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X, причём все её единицы вступают в процесс одновременно с x_o единицами стороны X.

Считаем, что каждая единица стороны X может наносить действие по любой единице противоположной стороны и наоборот, и что одним действием можно вывести из функционирования не более одной единицы противоположной стороны. Также полагаем, что стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии единиц противоположной стороны (выведены из функционирования или нет) и осуществляют воздействия только по оставшимся единицам. Также считаем, что противоборство продолжается до полного исчерпания всех функционирующих единиц одной из сторон.

Введём следующие обозначения: p_x, p_y - вероятности вывода из функционирования единицы противоположной стороны одним воздействием, для сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y практические скорости нанесения воздействий единицами сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ назовём эффективными скоростями нанесения воздействий единицами сторон.

До вступления в противоборство резерва стороны X процесс описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x' = -uy \\ y' = -vx \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0;\ y(0)=y_0, \tag{2}$$

где x, y — текущие численности единиц сторон, x', y' — их производные по времени.

При постоянных в течение противоборства величинах v и υ решение системы (1) с начальными условиями (2) имеет следующий вид [11]:

$$\begin{cases} x = x_0\left(ch\bar{t} - æ sh\bar{t}\right) \\ y = y_0\left(ch\bar{t} - \dfrac{1}{æ} sh\bar{t}\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $æ = \dfrac{y_0}{x_0}\sqrt{\dfrac{u}{v}}$ — параметр начального соотношения единиц [12], $\bar{t} = \sqrt{uv}t$ — приведённое время протекания противоборства.

При $æ \le \dfrac{1}{x_0}\sqrt{x_0^2 - x_1^2}$ получаем, что выигрывает конфликт сторона X, при этом

$$\begin{cases} x_k = x_0\sqrt{1-æ} \ge x_1 \\ y_k = 0, \end{cases}$$

где x_k, y_k — количества единиц, сохранившихся к концу противоборства сторон X и Y соответственно, то есть в этом случае использование стороной X резерва не потребуется.

При $æ > \dfrac{1}{x_0}\sqrt{x_0^2 - x_1^2}$ у стороны X останутся уцелевшими x_1 единиц в момент времени

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{uv}} lnz,$$

где

$$z = \frac{-\dfrac{x_1}{x_0} + \sqrt{\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^2 + æ^2 - 1}}{æ - 1},$$

при этом у стороны Y сохранится y_1 единиц,

$$y_1 = y_0\left(\frac{z^2+1}{2z} - \frac{z^2-1}{2æz}\right).$$

В частном случае при $æ = 1$ получаем

$$z = \frac{x_0}{x_1};\ t_1 = \frac{lnz}{\sqrt{uv}};\ y_1 = \frac{x_1 y_0}{x_0}.$$

Дальнейшее протекание рассматриваемого процесса описывается системой уравнений (1) с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_1) = x_1 + x_d \\ y(t_1) = y_1. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x(t_1) = (x_1 + x_d)\left(ch(\bar{t} - \bar{t}_1) - æ_1 sh(\bar{t} - \bar{t}_1)\right) \\ y(t_1) = y_1\left(ch(\bar{t} - \bar{t}_1) - \dfrac{1}{æ_1} sh(\bar{t} - \bar{t}_1)\right) \end{cases} \tag{4}$$

где $æ_1 = \dfrac{y_1}{x_0 + x_d}\sqrt{\dfrac{u}{v}}$ — параметр окончательного соотношения сил, $\bar{t}_1 = \sqrt{uv} t_1$ — приведённое время подвода стороной X резерва.

При $æ_1 < 1$ победу одержит сторона X, при этом

$$\begin{cases} x_k = (x_1 + x_d)\sqrt{1 - æ_1^2} \\ y_k = 0. \end{cases} \tag{5}$$

При $æ_1 > 1$ победу одержит сторона Y, при этом

$$\begin{cases} x_k = (x_1 + x_d)\sqrt{1 - æ_1^2} \\ y_k = y_1\sqrt{1 - \dfrac{1}{æ_1^2}}. \end{cases} \tag{6}$$

При $æ_1 = 1$ у обеих противоборствующих сторон будут к концу конфликта полностью исчерпаны все функционирующие единицы.

Анализ результатов моделирования. На основе формул (1) – (6) авторами разработан алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели процесса противоборства. Это в первую очередь относительные количества сохранившихся к концу боя единиц сторон m_x и m_y.

$$m_x = \frac{x_k}{x_0 + x_d};\ m_y = \frac{y_k}{y_0}.$$

На рисунках 1 и 2 представлены значения m_x и m_y в зависимости от параметра общего соотношения единиц

$$æ_0 = \frac{y_0}{x_0 + x_d}\sqrt{\frac{u}{v}}\ .$$

Зелёные и красные линии соответствуют значениям m_x, чёрные и синие – значениям m_y. Зелёные и чёрные линии соответствуют ситуации, когда все единицы стороны X вступают в противоборство в его начале. Красные и синие сплошные линии – ситуации, когда резерв стороны X вступает в противоборство, если 75 % её единиц выведены из функционирования. Красные и синие пунктирные линии – когда выведена из функционирования половина единиц стороны X. Красные и синие линии отображают ситуацию, когда в резерве стороны остаются $\Delta_x = \frac{1}{4}$ её общего числа единиц (рисунок 1) и $\Delta_x = \frac{1}{3}$ её общего числа единиц (рисунок 2), где

$$\Delta_x = \frac{x_d}{x_0 + x_d}\ .$$

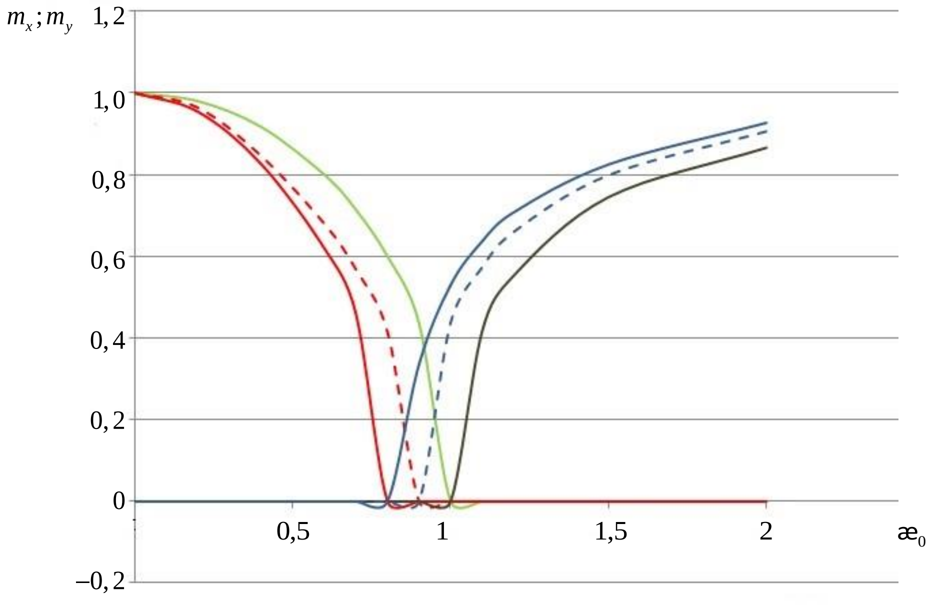

Рис. 1. Относительные количества единиц сторон, сохранившихся к концу действия при $\Delta_x = \frac{1}{4}$

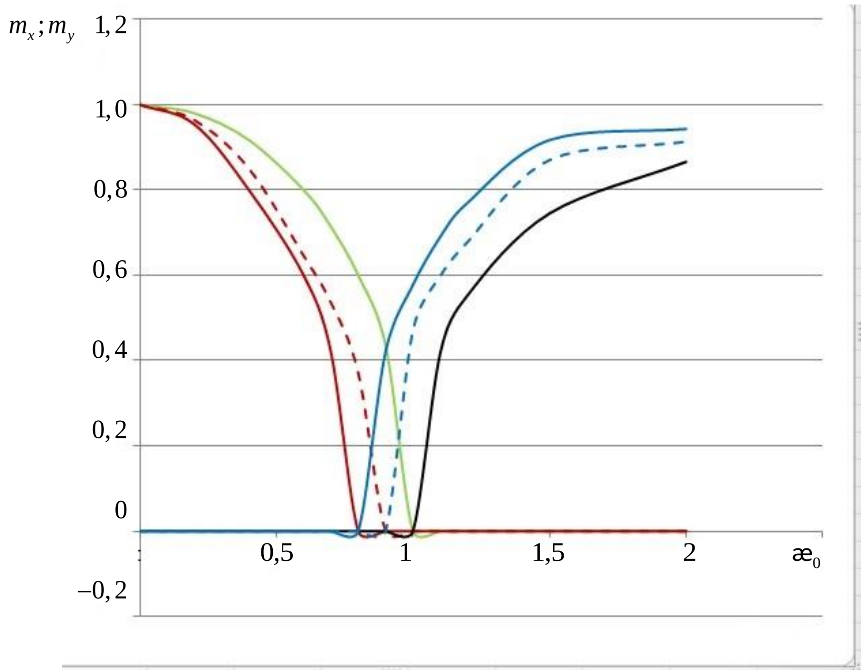

Рис. 2. Относительные количества единиц сторон, сохранившихся к концу действия при $\Delta_x = \frac{1}{3}$

Как показали результаты расчётов, своевременное подключение стороной X резерва может существенно повлиять на ход протекания противоборства и даже может изменить его итоговый результат. Приведем модельный пример такого сценария.

Пусть в противоборство вступают $x_o = 100$ единиц и 100 единиц остаются в резерве, сторона Y имеет в своём составе 170 единиц, и пусть $u = v$. Если резерв стороны X вступит в процесс при $x_1 = 50$ единиц, то $m_x = 0$, $m_y = 0,278$ (то есть $x_k = 0$; $y_k = 35$), а если резерв стороны X вступит в противоборство при $x_1 = 100$, то $m_x = 0,235$; $m_y = 0$ (то есть $x_k = 47$; $y_k = 0$). То есть в первом случае победу одержит сторона Y, а во втором случае сторона X.

Также следует обратить внимание на точную работу сбора и своевременную передачу информации об основном воздействии противоположной стороны, что позволит стороне X использовать свой резерв с самого начала противоборства. Также приведем такой численный модельный пример.

Пусть $x_o + x_d = 200$; $y_0 = 195$ единиц и пусть $u = v$. Если с самого начала в конфликт вступают все единицы стороны X, то $m_x = 0,225$;

$m_y = 0$ (то есть $x_k = 45$; $y_k = 0$). Если же сторона X оставит в резерве 50 единиц и они вступят в противоборство при $x_1 = 75$ единиц, то $m_x = 0$, $m_y = 0,38$ (то есть $x_k = 0$; $y_k = 76$). При увеличении резерва и более позднем его вступлении в противоборство результат для стороны X будет ещё хуже.

Выводы. На основе метода динамики средних разработана модель противоборства двух сторон, позволяющая учесть влияние резервирования единиц одной из сторон на ход и результат противоборства.

Установлено, что своевременное включение резервов может существенно повлиять на ход протекания и окончательный результат противоборства.

Показано, что полученная и своевременно переданная информации о дальнейших действиях противоположной стороны может изменить ход противоборства и повлиять на его окончательный результат.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Boulding K.E. *Conflict and Defence. A General theory*. New York, Harper & Brothers, 1962, 349 p.

[2] Kimbrough E.O., Laughren K., Sheremeta R. War and Conflict in Economics: Theories, Applications, and Recent Trends. *Munich Personal RePEc Archive*. 2017, MPRA Paper No. 80277, 50 p.

[3] Acemoglu D., Wolitzky A. Cycles of Conflict: An Economic Model. *American Economic Review*, 2014, no. 104(4), pp. 1350–1367.

[4] Пашков Н.Ю., Строгалёв В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника*, 2000, № 9–10, с. 19–21.

[5] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[6] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[7] Xiangyong Chen, Yuanwei Jing, Chunji Li, Mingwei Li. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21, no. 1, pp. 94-105.

[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Duxbury Press, 2001, 128 p.

[9] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

[10] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[11] Jaiswal N. K. *Military Operations Rescarch. Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, 2000, 388 p.

[12] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[13] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле.* Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[14] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели динамики средних двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *LAP LAMBERT Academie Publishing*, 2014, 72 с.

[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.

Статья поступила в редакцию 16.02.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Моделировании противоборства двух сторон с учетом резервирования. *Математическое моделирование и численные методы,* 2023, № 2, с. 157–165.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Simulation of the confrontation between the two sides, taking into account redundancy

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubograi

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Based on the method of dynamics of averages, a model of two parties confrontation has been developed taking into consideration the bringing up of reserves by one of the parties. It is established that timely supply of reserves can significantly affect the course of the process and its final result. It is also shown that the use of the reserve at the beginning of the action significantly increases the capabilities of a group.

Keywords*: confrontation of two parties, combat unit, effective rate of fire, ratio of forces parameter, bringing up of reserves*

REFERENCES

[1] Boulding K.E. *Conflict and Defence. A General theory*. New York, Harper & Brothers, 1962, 349 p.

[2] Kimbrough E.O., Laughren K., Sheremeta R. War and Conflict in Economics: Theories, Applications, and Recent Trends. *Munich Personal RePEc Archive*. 2017, MPRA Paper No. 80277, 50 p.

[3] Acemoglu D., Wolitzky A. Cycles of Conflict: An Economic Model. *American Economic Review*, 2014, no. 104(4), pp. 1350–1367.

[4] Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. Smeshannaya model' dinamiki srednih dlya mnogochislennyh gruppirovok [A mixed model of the dynamics of averages for multiple groupings]. *Oboronnaya tekhnika* [Defense Technology], 2000, no. 9–10, pp. 19–21.

[5] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[6] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[7] Xiangyong Chen, Yuanwei Jing, Chunji Li, Mingwei Li. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21, no. 1, pp. 94-105.

[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Duxbury Press, 2001, 128 p.
[9] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, URSS Publ., 2007, 208 p.
[10] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.
[11] Jaiswal N. K. *Military Operations Rescarch. Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, 2000, 388 p.
[12] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deistviy* [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.
[13] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military arts]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.
[14] Chuev V.Yu., Dubograi I.V. *Modeli dinamiki srednih dvustoronnih boevyh dejstvij mnogochislennyh gruppirovok* [Models of dynamics of average bilateral military operations of numerous groups]. *LAP LAMBERT Academie Publishing*, 2014, 72 p.
[15] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Models of bilateral warfare of numerous groups. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru