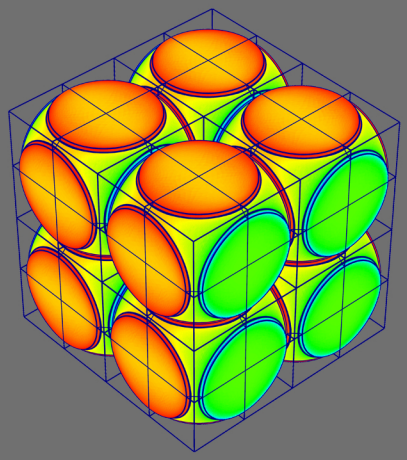
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Котенев В.П., Сысенко В.А. Новая зависимость профиля энтальпии в модели пограничного слоя. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 2, с. 90–99

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/309/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 07:22:06

УДК 533.6.011.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-2-9099

Моделирование теплообмена на поверхности сферы в потоке газа

© В.П. Котенев[1,2], В.А. Сысенко[1]

[1]АО «ВПК «НПО машиностроения», Реутов, 143966, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена простая аналитическая зависимость для определения ламинарного относительного теплового потока (отнесенного к соответствующей величине в точке торможения потока), подводимого к поверхности сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Анализ результатов показал, что использование предложенной формулы дает более точные приемлемые для практики результаты, чем другие известные приближенные зависимости. Сравнение относительного теплового потока с точными численными результатами в рамках уравнений Навье-Стокса также свидетельствует об эффективности предложенного подхода. В дальнейшем предполагается разработать специальное правило местных сфер для быстрой оценки теплового потока на поверхности других затупленных тел с достаточно произвольной образующей.

Ключевые слова: *сверхзвуковой поток, трехмерные течения газа, звуковая точка, тепловой поток*

Введение. При сверхзвуковом обтекании затупленных тел подводимые к их поверхности относительные тепловые потоки для холодной стенки при достаточно больших числах Рейнольдса мало зависят от параметров внешнего потока. В этом случае используются аналитические формулы для определения тепловых потоков, зависящие от геометрии обтекаемого тела и давления на его поверхности [1, 2], часто задаваемого по формуле Ньютона или с помощью аппроксимационных зависимостей [3]. Такое задание давления может приводить к потере точности соответствующих формул для теплового потока. Для распределения давления используются также результаты численных расчетов [4,5,6,7], требующих существенных временных затрат. В данной статье получены аналитические зависимости для определения теплового потока на сфере с использованием точной формулы [8], описывающей распределение давления на ее поверхности.

Модель для расчета теплового потока к поверхности сферы. Согласно [9] конвективный тепловой поток к поверхности сферы можно представить в виде

$$Q = \varphi(\sigma)\left(-\frac{\rho_1(\sigma)}{R(\sigma)}\frac{du_1}{d\sigma}(\sigma)\cdot\mu_0(\sigma)\right)^{1/2}.$$

Здесь нижний индекс «0» соответствует параметрам на стенке (поверхность обтекаемого тела), а «1» — параметрам на границе пограничного слоя, σ — угол между осью тела и касательной к телу в рассматриваемой точке, ρ_1 — плотность, u_1 — проекция вектора скорости на направление вдоль образующей тела, $R(\sigma)$ — радиус кривизны образующей тела (постоянный для сферы), $\mu_0(\sigma)$ — коэффициент динамической вязкости, $\varphi(\sigma)$ — некоторая функция, имеющая размерность энтальпии h_1 или u_1^2.

Примем, что температура стенки является постоянной величиной (т.е. μ_0 также не меняется) и что $\varphi(\sigma) = h_1(\sigma)$. Тогда для относительного теплового потока получим следующую зависимость:

$$\frac{Q}{Q_{00}} = \frac{h_1(\sigma)\left(-\frac{\rho_1(\sigma)}{R(\sigma)}\frac{du_1}{d\sigma}(\sigma)\right)^{1/2}}{\left(H\left(-\frac{\rho_1(\sigma)}{R(\sigma)}\frac{du_1}{d\sigma}(\sigma)\right)^{1/2}\right)_{\sigma=90^\circ}} \qquad (1)$$

где Q_{00} — значение теплового потока в точке торможения, H — полная энтальпия (энтальпия торможения).

Моделирование распределение давления. Выражение для распределения давления на поверхности сферы получено в [8]:

$$\frac{P}{P_0'} = \left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (2)$$

где

$$k = \frac{\gamma-1}{\gamma+3}\frac{1}{(\sigma_* - 90^\circ)^2},\ \chi = \sigma - 90^\circ.$$

σ_* — положение звуковой точки, P_0' — давление торможения, γ — показатель адиабаты, равный 1,4 для совершенного газа. Положение звуковой точки определяется в работах [10, 11]. Например, для чисел Маха в набегающем потоке более 2,5 положение звуковой точки рассчитывается по формуле из работы [10]:

$$\sigma_* = 90 - (34 + 40\nu),\quad \nu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_\infty^2}.$$

Более универсальный подход изложен в [11].

Применение формулы (2) предполагает, что давление найдено по модели невязкого обтекания. При достаточно больших числах Рейнольдса распределения давления, полученные из решения уравнений Навье-Стокса и Эйлера, близки.

Формула (2) позволяет вычислить параметры на границе пограничного слоя:

$$\frac{u_1^2(\sigma)}{H} = 2\left(1-\overline{h_1}(\sigma)\right),\ \frac{\rho_1(\sigma)}{\rho_1\left(90^o\right)} = \left(\frac{P(\sigma)}{P_0'}\right)^{1/\gamma}, \qquad (3)$$

где

$$\overline{h_1} = \frac{h_1(\sigma)}{H} = \left(\frac{P(\sigma)}{P_0'}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Вычисление относительного теплового потока. Пользуясь формулой (3), запишем выражение для $\frac{du_1}{d\sigma}$:

$$\frac{du_1}{d\sigma} = \frac{-2\sqrt{Hk}}{\left[1+k\left(\sigma-90^o\right)\right]^{3/2}}.$$

В точке торможения

$$\left(\frac{du_1}{d\sigma}\right)_0 = -2\sqrt{Hk}.$$

Тогда

$$\frac{\frac{du_1}{d\sigma}}{\left(\frac{du_1}{d\sigma}\right)_0} = \frac{1}{\left[1+k\left(\sigma-90^o\right)\right]^{3/2}} \qquad (4)$$

Подставляя (2), (3), (4) в формулу (1), получаем основную формулу для расчета относительного теплового потока на сфере

$$\frac{Q}{Q_{00}} = \frac{\left(1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\right)\left(\frac{\sigma-90^\circ}{\sigma_*-90^\circ}\right)^2\right)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma-2}}}{\left(1+\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\right)\left(\frac{\sigma-90^\circ}{\sigma_*-90^\circ}\right)^2\right)^{\frac{7\gamma-5}{4\gamma-4}}}. \qquad (5)$$

Если входящие в (1) производные аппроксимировать с помощью центральных разностей, то с учетом (2), (3) получаем итоговое выражение для относительного теплового потока

$$\frac{Q(\sigma)}{Q_{00}} = \left(\bar{P}(\sigma)\right)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \left[\frac{\left[1-\left(\bar{P}(\sigma-\Delta\sigma)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2} - \left[1-\left(\bar{P}(\sigma+\Delta\sigma)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}}{2\left(1-\left(\bar{P}(90-\Delta\sigma)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{1/2}} \right]^{1/2},$$

где обозначено

$$\bar{P}(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{P_0'}$$

— относительное давление.

Анализ результатов. Перейдем к анализу результатов. Для примера приведем результаты расчетов по формуле (5) для трех значений чисел Маха: $M_\infty = 4{,}11$ (рис. 1), $M_\infty = 6$ (рис. 2) и $M_\infty = 10$ (рис. 3). На этих же рисунках приведены данные, полученные в результате численного решения уравнений Навье-Стокса [1, 2], а также расчет по аналитической формуле из работ [1, 2]. При этом в аналитической формуле использовалось распределение давления, полученное путем численного расчета в рамках уравнений Навье-Стокса, что уже подразумевает большие временные затраты.

На рисунке 1 решение уравнений Навье-Стокса и аналитическая зависимость работ [1, 2] соответствуют режиму обтекания: $M_\infty = 4{,}11$ при числе Рейнольдса $Re_\infty = 500$, отношении постоянной температуры стенки к температуре торможения $T_w = 0{,}25$, числе Прандтля $Pr = 0{,}72$.

На рисунке 2 решение уравнений Навье-Стокса и аналитическая зависимость работ [1, 2] соответствуют режиму обтекания: $M_\infty = 6$ при $Re_\infty = 3500$, $T_w = 0{,}35$, $Pr = 0{,}72$.

На рисунке 3 решение уравнений Навье-Стокса и аналитическая зависимость работ [1, 2] соответствуют режимам обтекания: $M_\infty = 10$ при $Re_\infty = 500$, $T_w = 0{,}25$, $Pr = 0{,}72$ (кривая 1) и $Re_\infty = 3500$, $T_w = 0{,}35$, $Pr = 0{,}72$ (кривая 2).

Кроме того, на всех рисунках приведено универсальное распределение теплового потока, предложенное в работах [10, 12]:

$$\frac{Q}{Q_{00}} = 0,55 + 0,45\cos 2\alpha$$

α — центральный угол сферы.

В работах [10, 12] утверждается, что данное распределение хорошо зарекомендовало себя в диапазоне $7 < M_\infty < 25$.

Из представленных сравнений расчетных данных с данными, полученными путем численного решения уравнений Навье-Стокса [1,2], видно, что применение формулы (5), полученной в данной статье, позволяет получить результат с максимальной относительной погрешностью, не превышающей 10% для всех вариантов, кроме самого «разреженного» режима набегающего потока $M_\infty = 10$ при $Re_\infty = 500$, $T_w = 0,25$, $Pr = 0,72$, для которого в случае малых значений углов встречи потока с поверхностью тела максимальная погрешность может достигать 30 % (рисунок 3). В то же время, приближенные формулы из работ [1, 2, 10, 12], имеют заметно большую погрешность. Применение же формулы [10, 12] для умеренных чисел Маха набегающего потока. дает значения теплового потока, наиболее сильно расходящиеся с результатами расчетов в рамках уравнений Навье-Стокса и предлагаемой в данной работе зависимостью.

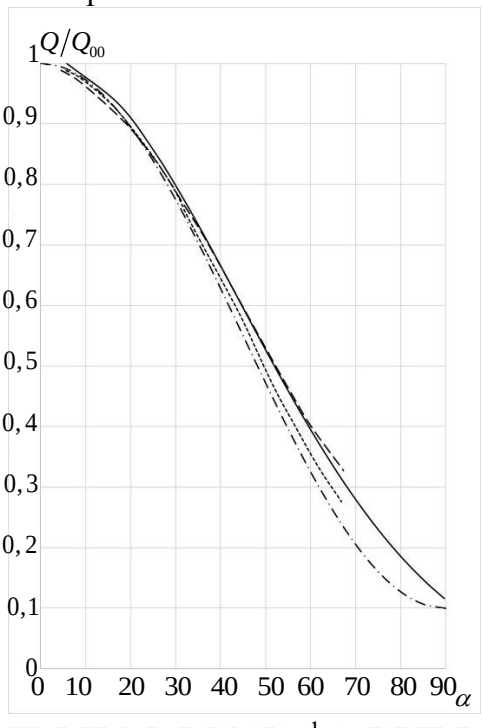


Рис. 1 Распределение теплового потока на сфере при числе Маха $M_\infty = 4,11$, полученное по формуле из работы [1, 2] (точки), по формуле (5) данной работы (сплошная линия), по численному решению уравнений Навье-Стокса [1, 2] (пунктир), по универсальной формуле [10, 12] (штрих-пунктир) (α – центральный угол)

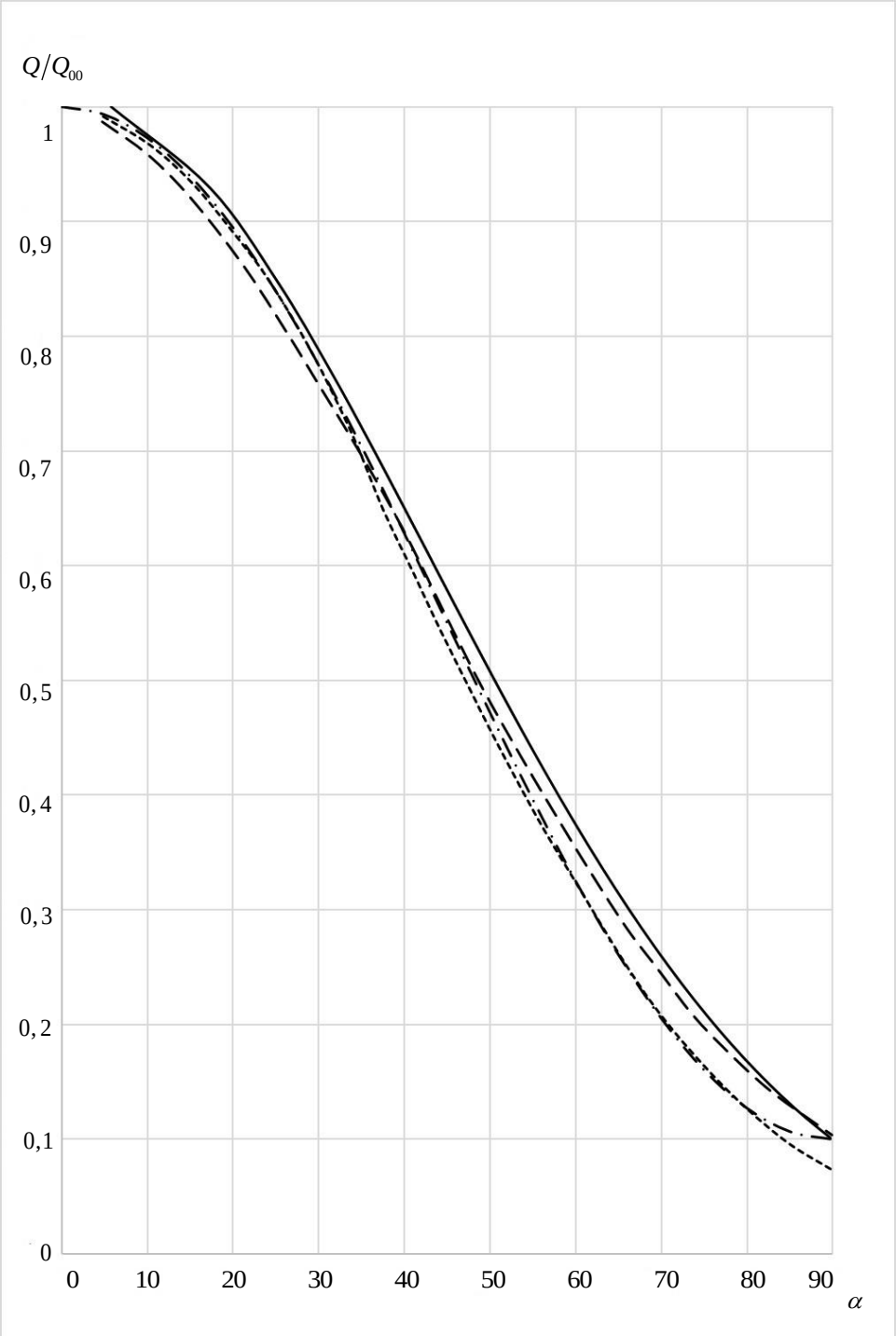


Рис. 2 Распределение теплового потока на сфере при числе Маха $M_\infty = 6$, полученное по формуле из работы [1, 2] (точки), по формуле (5) данной работы (сплошная линия), по численному решению уравнений Навье-Стокса [1, 2] (пунктир), по универсальной формуле [10, 12] (штрих-пунктир) (α – центральный угол)

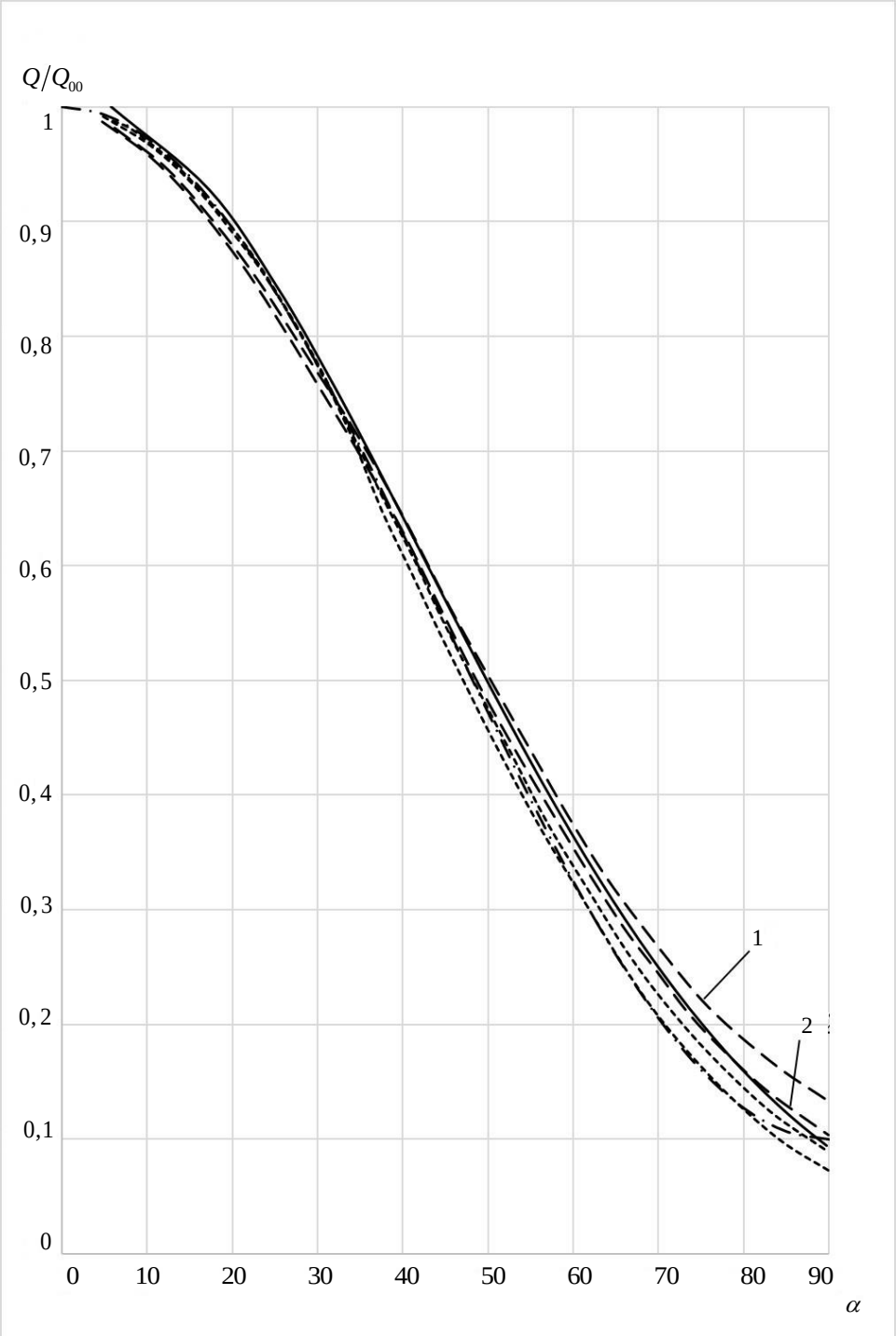


Рис. 3 Распределение теплового потока на сфере при числе Маха $M_\infty = 10$, полученное по формуле из работы [1, 2] (точки), по формуле (5) данной работы (сплошная линия), по численному решению уравнений Навье-Стокса [1, 2] (пунктир), по универсальной формуле [10, 12] (штрих-пунктир) (α – центральный угол)

Вывод. Можно сделать вывод о том, что предложенная в данной работе формула практически точно описывает распределение относительного теплового потока к поверхности сферы при различных значениях числа Маха набегающего потока. Данный подход может быть использован для начального распределения при применении «тяжелых» пакетов прикладных программ, а также быстрой оценки теплового потока к поверхности сферы, а в дальнейшем и для других форм тел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брыкина И.Г., Сахаров В.И. Сравнение приближенных аналитических и численных решений для тепловых потоков при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 1996, № 1, с. 125–132.

[2] Брыкина И.Г. *Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса*. Дисс. д-ра. физ.-мат. наук. Москва, 2013, 320 с.

[3] Калугин В.Т. *Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 688 с.

[4] Eleuterio F. T. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 724 p.

[5] Ковеня В.М., Чирков Д.В. *Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики*. Новосибирск, Изд-во НГУ, 2013, 87 с.

[6] Димитриенко Ю.А., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, №4, с. 75-91.

[7] Tumin A., Wang X., Zhong H. Numerical simulation and theoretical analysis of perturbation in hypersonic boundary layer. *AIAA JOURNAL*, 2011, vol. 49, no. 3, pp. 463-471.

[8] Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока. *Математическое моделирование*, 2014, т. 26, № 9, с. 141–148.

[9] Котенев В.П., Булгаков В.Н., Ожгибисова Ю.С. Модификация метода Польгаузена для расчета тепловых потоков на затупленных телах. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3, с. 33–52.

[10] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 327 с.

[11] Котенев В. П. Определение положения звуковой точки на поверхности затупленного тела. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2011, № S3, Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 150–153.

[12] Землянский Б. А., Лунев В. В., Власов В. И. и др. *Конвективный теплообмен летательных аппаратов*. Москва, Физматлит, 2014, 380 с.

Статья поступила в редакцию 16.02.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Котенев В.П., Сысенко В.А. Новая зависимость профиля энтальпии в модели пограничного слоя. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 2, с. 90–100.

Котенев Владимир Пантелеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела АО «ВПК «НПО машиностроения». e-mail: kotenev@bmstu.ru

Сысенко Валентина Алексеевна — канд. техн. наук, инженер АО «ВПК «НПО машиностроения». e-mail: v.a.sysenko@vpk.npomash.ru

Heat transfer modeling on the surface of a sphere in a gas flow

© V.P. Kotenev [1,2], V.A. Sysenko[2]

[1]Joint stock company "Military and industrial corporation", Reutov, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The simple analytical formula for calculation of laminar specific heat flow (divided by corresponding value at the critical point) brought to sphere surface streamlined by supersonic gas flow are received in this work. The analysis of the results shows that the use of the presented formula gives the values of the specific heat flow with greater accuracy than the known approximate formulas. The comparing of the relative heat flow with the accurate computational results of solving the Navier-Stokes equations also confirm the effectiveness of the presented method. It is proposed to formulate a special rule of local spheres for a quick evaluation of the specific heat flow on the surfaces of other blunted bodies with different generators in the future.

Keywords*: supersonic gas flow, three-dimensional gas flows, sonic point, specific heat flow*

REFERENCES

[1] Brykina I.G., Sakharov V.I. Comparison of approximate analytical and numerical solutions for heat fluxes in viscous supersonic flow past a body. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 1, pp. 125–132.

[2] Brykina I.G., *Metody racheta teploperedachi i treniya pri prostransvennom giperzvukovom laminarnom obtekanii tek vo vsem diapazone chisel Rejnol'dsa: diss. d-ra. fiz.-mat. nauk.* [Methods of calculation of heat transfer in dimensional hypersonic laminar flow in the whole range of Reynolds numbers: diss. Dr. Sc.], Moscow, 2013, 320 p.

[3] Kalugin V. T. *Aerodynamica organov upravleniya poletom letatelnyh apparatov* [*Aerodynamics of flight controls of aircraft*]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2004, 688 p.

[4] Eleuterio F. T. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 724 p.

[5] Kovenya V. M., Chirkov D. V. *Metody konechnih raznostey i konechnih ob'emov dlya resheniya zadach matematicheskoy fiziky [Finite difference method and finite volume method for solving tasks of mathematical physics]*. Novosibirsk: NSU Publ., 2013, 86 p.

[6] Dimitrienko Yu. I., Koryakov M. N., Zakharov A. A. RKDG method application for numerical solving three-dimensional equations of gas dynamics on unstructured grids. *Mathematical modeling and computational methods.* 2015, no. 4, pp. 75-91.

[7] Tumin A., Wang X., Zhong H. Numerical simulation and theoretical analysis of perturbation in hypersonic boundary layer. *AIAA JOURNAL*, 2011, vol. 49, no. 3, pp. 463-471.
[8] Kotenev V.P. Exact relation for determining the pressure distribution on a sphere at an arbitrary mach number in a supersonic incoming flow. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 128–133.
[9] Kotenev V.P., Bulgakov V.N., Ozhgibisova Y.S. Modification of Pohlhausen method for calculating heat transfer on blunt bodies. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3, pp. 33–52.
[10] Lunev V.V. *Techenie real'nyh gazov s bol'shimi skorostyami* [Flow of real gases with high velocities]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 327 p.
[11] Kotenev V. P. Determining the position of a sound point on the surface of a blunt body. 2011, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series natural sciences, special issue "Mathematical Modeling*", pp. 150–153.
[12] Zemlyanskij B. A., Lunev V. V., Vlasov V. I. *Konvektivnyj teploobmen letatel'nyh_apparatov* [*Convective heat transfer of aircraft*]. Moscow, Fizmatlit publ., 2014, 380 p.

Kotenev V.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Head of department, Joint stock company "Military and industrial corporation". e-mail: kotenev@bmstu.ru

Sysenko V.A., Cand. Sc. (Technical), Engineer, Joint stock company "Military and industrial corporation". e-mail: v.a.sysenko@vpk.npomash.ru