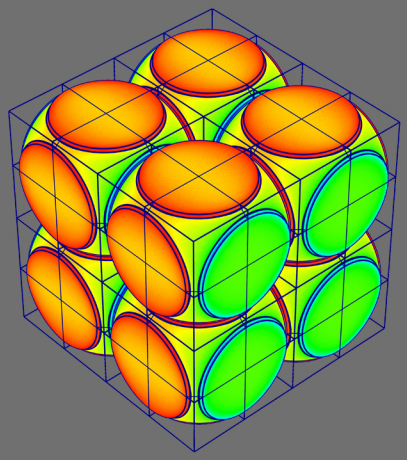
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Бойко С.В. Асимптотическая теория многослойных тонких микрополярных упругих пластин. Математическое моделирование и численные методы, 2023, № 2, с. 33–66.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/307/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
07.11.2026 05:10:03

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-2-3366

Асимптотическая теория тонких многослойных микрополярных упругих пластин

© Ю.И. Димитриенко, С.В. Бойко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача о построении теории расчета напряженно-деформированного состояния тонких многослойных упругих пластин в моментной (микрополярной) теории упругости. Решение данной задачи строится с помощью асимптотического анализа общих уравнений 3-х мерной квазистатической задачи моментной теории упругости. Асимптотический анализ проводится по малому геометрическому параметру, равному отношению толщины пластины к ее характерной длине. Получены рекуррентные формулировки локальных задач моментной теории упругости. Для этих задач получены явные аналитические решения. Представлен вывод осредненной системы уравнений равновесия многослойных пластин. Показано, что асимптотическая теория позволяет получить явное аналитическое выражение для всех 9 (в общем случае) компонент тензоров напряжений и моментных напряжений в пластине. Как частный случай рассмотрена задача о расчете напряженно-деформированного состояния центрально-симметричной шарнирно опертой пластины при изгибе под действием равномерно распределенного давления. Получено полное аналитическое решение этой задачи для всех ненулевых компонент тензоров напряжений и моментных напряжений. Проведен численный анализ решения задачи для тензора напряжений в случае однослойной пластины на основе полученных выражений. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с аналогичными расчетами для классической теории, выявлены сходства и различия для всех компонент тензора напряжений.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, малый параметр, микрополярная теория, тонкие пластины, изгиб, тензор напряжений*

Введение. В настоящее время в задачах расчета напряженно-деформируемых состояний конструкций, как правило, используется классическая теория симметричной упругости, в которой отсутствуют моментные напряжения, и тензор напряжений Коши является симметричным [1-7]. Для подавляющего большинства конструкционных материалов эта теория дает результаты, достаточно хорошо совпадающие с экспериментами. Этим объясняется ее широкое использование.

Однако, в некоторых задачах механики возникают эффекты, которые не описываются теорией симметричной упругости [2]. Как известно, впервые теория несимметричной (моментной) упругости была предложена в работах братьев Коссера [8]. Интерес к той теории был проявлен только в середине прошлого столетия [9], а в настоящее время наблюдается повышение активности исследований в области теории несимметричной упругости, называемой также микрополярной теорией упругости [10-13].

В работах [12-15] предложены различные подходы к построению теории тонких микрополярных упругих сред (пластин, стержней, оболочек): основанных на аналогах классической теории тонких тел с допущением о характере распределения перемещений и микро-вращений по толщине [12] или на разложении всех основных функций по ортогональным полиномам [14,15].

В работах [16-27] разработан иной подход к выводу уравнений для механики тонких тел, основанный на асимптотических разложениях по малому геометрическому параметру. В работах [21-26] рассмотрен случай многослойной пластины в классической теории, и с помощью асимптотического метода выведена теоретическая основа для решения задач, позволяющая вычислить все компоненты симметричного тензора напряжений посредством решения рекуррентной последовательности двумерных задач. Аналогичный метод применен для построения асимптотической теории тонких оболочек [27].

Данная работа посвящена применению асимптотической теории для решения задач моментной теории упругости многослойных упругих пластины.

1. Общие уравнения теории несимметричной упругости и основные допущения для тонких пластин. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, и, следуя [21-27], введем малый параметр $\alpha = \dfrac{h}{L} << 1$ как отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные $x_k = \dfrac{\tilde{x}_k}{L}, k = 1,2,3$ и локальную $\xi = \dfrac{x_3}{\alpha}$ координаты, где $\tilde{x}_k$ — обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0.5 \le \xi \le 0.5$, внешние поверхности пластины обозначим как $\Sigma_{3\pm} = \{\xi = \pm 0.5\}$.

Рассмотрим в системе координат $O\tilde{x}_k$ трехмерную задачу моментной теории упругости [2] для квазистатического случая, записанную в безразмерном виде для многослойных пластин при малых деформациях

$$
\begin{gathered}
\nabla_j \sigma_{ji} + \rho f_i = 0, \\
\nabla_j M_{ji} + \rho h_{mi} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0, \\
\sigma_{ij} = C_{ijkl}\gamma_{kl} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}, \\
M_{ij} = B_{klij}\gamma_{kl} + A_{ijkl}\varkappa_{kl}, \\
\gamma_{ji} = \nabla_j u_i - \varepsilon_{kji}k_k, \\
\varkappa_{ji} = \nabla_j k_i, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{ji}n_j = S_{\pm i},\ M_{ji}n_j = \tilde{m}_{\pm i}, \\
\Sigma_T : u_i = u_{ei}, \qquad k_i = k_{ei}, \\
\Sigma_S : [\sigma_{ji}]n_j = 0, \qquad [M_{ji}]n_j = 0, \\
[u_i] = 0, \qquad [k_i] = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Эта задача состоит из уравнений равновесия, уравнения моментов, определяющих соотношений для тензоров напряжений и моментных напряжений, кинематических соотношений для тензоров деформации и изгиба-кручения, граничных условий на внешней, внутренней и торцевой поверхностях пластины, а также граничных условий на поверхности контакта слоев пластины. В системе (1) обозначены компоненты следующих векторов: u_i — вектора перемещений, k_i — вектора поворота, f_i — вектора плотности внешних массовых сил, h_{mi} — вектора плотности внешних массовых моментов, $S_{\pm i}$ — вектора внешних поверхностных сил, заданного на внешних поверхностях пластины $\Sigma_{3\pm}$, $\tilde{m}_{\pm i}$ — вектора внешних поверхностных моментов, u_{ei} — вектора перемещений, заданных на торцевой поверхности Σ_T пластины, k_{ei} — вектора поворота, заданного на Σ_T, а также компоненты следующих тензоров 2-го ранга: σ_{ij} — несимметричного тензора напряжений, M_{ij} — тензора моментных напряжений, γ_{kl} — несимметричного тензора деформации и $\varkappa_{kl}$ — тензора изгиба-кручения. Упругие свойства слоев задаются компонентами тензоров 4–го ранга: C_{ijkl} — тензора модулей упругости, B_{ijkl} — тензора смешанных модулей упругости и A_{ijkl} — тензора модулей моментной упругости. Эти тензоры являются функциями координат ξ. В системе (1) также обозначены: ε_{kji} — компоненты тензора Леви-Чивиты и $\nabla_j = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}$ — производные по

декартовым координатам. Все компоненты рассматриваются в декартовом базисе, связанном с системой координат $O\tilde{x}_k$, $[u_i]$ — означает скачок функции на поверхностях раздела слоев пластины $\Sigma_S = \{\xi = \xi_s, s = 1,..., N-1\}$, где N — число слоев в пластине.

Принимаем далее допущение, подобное тому, которое вводится в асимптотической теории классических упругих тонких пластин [21-27]: на внешних поверхностях $\Sigma_{3\pm}$ поверхностные силы S_{ei} заданы в виде давления $\tilde{p}_\pm$, и их величина имеет третий порядок малости относительно малого параметра α, для внешних поверхностных моментов задаем асимптотическое разложение по малому параметру общего вида:

$$S_{ei} = -\tilde{p}_\pm \delta_{i3}, \ \tilde{p}_\pm = \alpha^3 p_\pm, \tag{2}$$

$$\tilde{m}_\pm = \alpha m_i^{(1)}{}_\pm + \alpha^2 m_i^{(2)}{}_\pm + ... \tag{3}$$

где $p_\pm$, $m_i^{(n)}{}_\pm$ — безразмерные функции, имеющие порядок $O(1)$, в общем случае являются функциями глобальных координат. В частном случае $p_\pm$ и $m_i^{(n)}{}_\pm$ могут быть константами (равномерные давление и моменты, действующее на пластину).

Условие (2), как правило, соответствует условиям нагружения реальных тонких пластин. Внешние поверхностные моменты на внешней и внутренней поверхностях пластины в общей теории рассматриваем в виде разложения по малому параметру, в конкретных задачах часть функций $m_i^{(n)}{}_\pm$ может обнуляться.

2. Асимптотическое решение задачи моментной теории упругости для тонких пластин. Решение задачи (1) будем искать в виде асимптотических разложений по параметру α, подобно (3), в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат

$$\begin{gathered} u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \alpha u_k^{(1)}(x_I,\xi) + \alpha^2 u_k^{(2)}(x_I,\xi) + \alpha^3 u_k^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \\ k_k = k_k^{(0)}(x_I) + \alpha k_k^{(1)}(x_I,\xi) + \alpha^2 k_k^{(2)}(x_I,\xi) + \alpha^3 k_k^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \\ \varkappa_{ji} = \varkappa_{ji}^{(0)} + \alpha \varkappa_{ji}^{(1)} + \alpha^2 \varkappa_{ji}^{(2)} + ..., \qquad \gamma_{ji} = \gamma_{ji}^{(0)} + \alpha \gamma_{ji}^{(1)} + \alpha^2 \gamma_{ji}^{(2)} + ..., \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \alpha \sigma_{ij}^{(1)} + \alpha^2 \sigma_{ij}^{(2)} + ..., \qquad M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + \alpha M_{ij}^{(1)} + \alpha^2 M_{ij}^{(2)} + ..., \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I, J, K...$, принимают значения 1, 2, а индексы, обозначенные строчными буквами $i, j, k...$ — значения 1, 2, 3.

Будем далее использовать обозначения для производных по локальной координате и по глобальным координатам от функций (4)

$$f(\xi, x_I)_{/3} = \frac{\partial f(\xi, x_I)}{\partial \xi}, \quad f(\xi, x_I)_{,J} = \frac{\partial f(\xi, x_I)}{\partial x_J}, \tag{5}$$

при этом имеет место следующее правило согласования производных $\nabla_i f$, $f_{/3}$ и $f_{/I}$: $\nabla_i f = \alpha^{-1}\delta_{i3} f_{/3} + \delta_{iJ} f_{/J}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Введем также следующие операции интегрирования по локальной координате:

$$< f >= \int_{-0.5}^{0.5} f(\xi, x_I) d\xi, \tag{6}$$

$$< \boldsymbol{f} >_{\xi} = \int_{-0.5}^{\xi} f(\tilde{\xi}, x_I) d\tilde{\xi} - < \int_{-0.5}^{\xi} f(\tilde{\xi}, x_I) d\tilde{\xi} >,$$

$$\{\boldsymbol{f}\}_{\xi} = \int_{-0.5}^{\xi} (f(\tilde{\xi}, x_I) - < \boldsymbol{f} >) d\tilde{\xi}.$$

Подставим разложения в (4) для векторов перемещений и поворота в кинематические соотношения в системе (1), тогда получим кинематические соотношения для n-го приближения

$$\begin{aligned} \varkappa_{Ji}^{(n)} &= k_{i,J}^{(n)}, \quad & \varkappa_{3i}^{(n)} &= k_{i/3}^{(n+1)}, \\ \gamma_{Ji}^{(n)} &= u_{i,J}^{(n)} - \varepsilon_{kJi} k_k^{(n)}, \quad & \gamma_{3i}^{(n)} &= u_{i/3}^{(n+1)} - \varepsilon_{k3i} k_k^{(n)}, \end{aligned} \quad n = 0,1,2,... \tag{7}$$

Подставляя соотношения (7) в определяющие соотношения в системе (1), получаем определяющие соотношения для n-го приближения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)} &= C_{ijkl}\gamma_{kl}^{(n)} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}^{(n)}, \\ M_{ij}^{(n)} &= B_{klij}\gamma_{kl}^{(n)} + A_{ijkl}\varkappa_{kl}^{(n)}, \end{aligned} \quad n = 0,1,2,... \tag{8}$$

Формулировки локальных задач для микрополярных пластин. Подставляя разложения (4) в уравнения равновесия, уравнения моментов и граничные условия системы (1) и приравнивая в уравнениях равновесия члены при α^{-1} к нулю, а при остальных степенях α к некоторым величинам $(h_i^{(0)}, g_i^{(0)}), (h_i^{(1)}, g_i^{(1)}), (h_i^{(2)}, g_i^{(2)}), ...$, не зависящим от ξ, получим рекуррентную последовательность локальных задач.

Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\sigma_{3i/3}^{(0)} = 0, \; M_{3i/3}^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{3i}^{(0)} = C_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(0)} + C_{3i3l}\gamma_{3l}^{(0)} + B_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + B_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(0)},$$

$$M_{3i}^{(0)} = B_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(0)} + B_{3i3l}\gamma_{3l}^{(0)} + A_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + A_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(0)},$$

$$\sigma_{Ji}^{(0)} = C_{JiKl}\gamma_{Kl}^{(0)} + C_{Ji3l}\gamma_{3l}^{(0)} + B_{JiKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + B_{Ji3l}\varkappa_{3l}^{(0)},$$

$$M_{Ji}^{(0)} = B_{JiKl}\gamma_{Kl}^{(0)} + B_{Ji3l}\gamma_{3l}^{(0)} + A_{JiKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + A_{Ji3l}\varkappa_{3l}^{(0)},$$

$$\varkappa_{Kl}^{(0)} = k_{l,K}^{(0)},\ \varkappa_{3l}^{(0)} = k_{l/3}^{(1)},$$

$$\gamma_{Kl}^{(0)} = u_{l,K}^{(0)} - \varepsilon_{mKl}k_m^{(0)},\ \gamma_{3l}^{(0)} = u_{l/3}^{(1)} - \varepsilon_{m3l}k_m^{(0)},$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{3\pm}&: \sigma_{3i}^{(0)} = 0, \qquad M_{3i}^{(0)} = 0,\\
\Sigma_S&: [\sigma_{3i}^{(0)}] = 0, \qquad [M_{3i}^{(0)}] = 0,\\
&[u_i^{(1)}] = 0, \qquad [k_i^{(1)}] = 0,\\
&< u_i^{(1)} >= 0, \qquad < k_i^{(1)} >= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

а для более высоких приближений $n \geq 1$ локальные задачи выглядят следующим образом:

$$\sigma_{3i/3}^{(n)} + \sigma_{Ji,J}^{(n-1)} + \rho f_i \delta_{n1} = h_i^{(n-1)},$$

$$M_{3i/3}^{(n)} + M_{Ji,J}^{(n-1)} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}^{(n-1)} + \rho h_{m_i}\delta_{n1} = g_i^{(n-1)},$$

$$\sigma_{3i}^{(n)} = C_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(n)} + C_{3i3l}\gamma_{3l}^{(n)} + B_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + B_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(n)},$$

$$M_{3i}^{(n)} = B_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(n)} + B_{3i3l}\gamma_{3l}^{(n)} + A_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + A_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(n)},$$

$$\sigma_{Ji}^{(n)} = C_{JiKl}\gamma_{Kl}^{(n)} + C_{Ji3l}\gamma_{3l}^{(n)} + B_{JiKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + B_{Ji3l}\varkappa_{3l}^{(n)},$$

$$M_{Ji}^{(n)} = B_{JiKl}\gamma_{Kl}^{(n)} + B_{Ji3l}\gamma_{3l}^{(n)} + A_{JiKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + A_{Ji3l}\varkappa_{3l}^{(n)},$$

$$\begin{aligned}
\varkappa_{Kl}^{(n)} &= k_{l,K}^{(n)}, \qquad \varkappa_{3l}^{(n)} = k_{l/3}^{(n+1)},\\
\gamma_{Kl}^{(n)} &= u_{l,K}^{(n)} - \varepsilon_{mKl}k_m^{(n)}, \qquad \gamma_{3l}^{(n)} = u_{l/3}^{(n+1)} - \varepsilon_{m3l}k_m^{(n)},\\
\Sigma_{3\pm}&: \sigma_{3i}^{(n)} = -p_{\pm}\delta_{i3}\delta_{n3}, \qquad M_{3i}^{(n)} = -m_{i\ \pm}^{(n)},\\
\Sigma_S&: [\sigma_{3i}^{(n)}] = 0, \qquad [M_{3i}^{(n)}] = 0,\\
&[u_i^{(n+1)}] = 0, \qquad [k_i^{(n+1)}] = 0,\\
&< u_i^{(n+1)} >= 0, \qquad < k_i^{(n+1)} >= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения равновесия и уравнения моментов в (1) после введения функций $(h_i^{(n-1)}, g_i^{(n-1)})$ принимают вид

$$\begin{aligned}
&h_i^{(0)} + \alpha h_i^{(1)} + \alpha^2 h_i^{(2)} + ... = 0,\\
&g_i^{(0)} + \alpha g_i^{(1)} + \alpha^2 g_i^{(2)} + ... = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (9) являются функции $u_i^{(1)}, k_i^{(1)}$, они зависят от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи — перемещений $u_i^{(0)}(x_J)$ и поворота $k_i^{(0)}(x_J)$. Решением локальных задач (10) являются функции $u_i^{(n+1)}, k_i^{(n+1)}$, а $u_i^{(n)}, k_i^{(n)}$ в этих задачах - входные данные.

Решение локальных задач нулевого приближения. Рассмотрим локальную задачу (9). Решение уравнений равновесия и уравнений моментов с граничными условиями в этой задаче имеет вид

$$\sigma_{3i}^{(0)} = 0,\ M_{3i}^{(0)} = 0,\ -0.5 < \xi < 0.5. \tag{12}$$

Подставляя сюда соотношения для $\sigma_{3i}^{(0)}$ и $M_{3i}^{(0)}$ из системы (9), получаем

$$\begin{aligned} C_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(0)} + C_{3i3l}\gamma_{3l}^{(0)} + B_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + B_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(0)} = 0, \\ B_{Kl3i}\gamma_{Kl}^{(0)} + B_{3l3i}\gamma_{3l}^{(0)} + A_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(0)} + A_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Разрешим эту систему относительно $\gamma_{3l}^{(0)}$ и $\varkappa_{3l}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \gamma_{3l}^{(0)} = -G_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(0)} - H_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(0)}, \\ \varkappa_{3l}^{(0)} = -W_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(0)} - V_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(0)}, \end{aligned} \tag{14}$$

где введены обозначения для тензоров, которые зависят только от тензоров модулей упругости C_{ijkl}, B_{ijkl} и A_{ijkl}

$$\begin{gathered} G_{3lKs} = X_{lj}^{\{11\}}C_{3jKs} - X_{lj}^{\{12\}}B_{3jKs},\ H_{3lKs} = X_{lj}^{\{11\}}B_{3jKs} - X_{lj}^{\{12\}}A_{3jKs}, \\ W_{3lKs} = -X_{lj}^{\{21\}}C_{3jKs} + X_{lj}^{\{22\}}B_{3jKs},\ V_{3lKs} = -X_{lj}^{\{21\}}B_{3jKs} + X_{lj}^{\{22\}}A_{3jKs}, \\ X_{lj}^{\{11\}} = C_{3l3j}^{-1} + C_{3l3q}^{-1}B_{3q3p}D_{pm}^{-1}B_{3m3j}^{-1},\ X_{lj}^{\{12\}} = C_{3l3q}^{-1}B_{3q3p}D_{pj}^{-1}, \\ X_{lj}^{\{21\}} = D_{lq}^{-1}B_{3q3p}C_{3p3j}^{-1},\ X_{lj}^{\{22\}} = D_{lj}^{-1}, \\ D_{im} = A_{3i3m} - B_{3i3l}C_{3l3j}^{-1}B_{3j3m}, \end{gathered} \tag{15}$$

а C_{3i3l}^{-1} — матрица компонент, обратная к C_{3i3l}.

Рассмотрим в системе (9) уравнения, связывающие $\gamma_{3l}^{(0)}$ и $\varkappa_{3l}^{(0)}$ и векторы перемещений и поворота, и присоединим к этим уравнениям условия нормировки из (9)

$$\begin{aligned} k_{l/3}^{(1)} = \varkappa_{3l}^{(0)},\quad < k_l^{(1)} >= 0, \\ u_{l/3}^{(1)} = \gamma_{3l}^{(0)} + \varepsilon_{m3l}k_m^{(0)},\quad < u_l^{(1)} >= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Решим эти дифференциальные уравнения относительно $k_l^{(1)}$ и $u_l^{(1)}$

$$k_l^{(1)} = < \varkappa_{3l}^{(0)} >_\xi , \; u_l^{(1)} = < \gamma_{3l}^{(0)} >_\xi + \varepsilon_{m3l} \xi k_m^{(0)} , \tag{17}$$

здесь учтено, что $< k_m^{(0)} >_\xi = k_m^{(0)} \xi$.

Подставим в (17) вместо $\gamma_{3l}^{(0)}$ и $\varkappa_{3l}^{(0)}$ их выражения согласно формулам из (14), тогда получим итоговые соотношения между перемещениями и поворотами 1-го приближения через тензоры деформации $\gamma_{Ks}^{(0)}$ и изгиба-искривления $\varkappa_{Ks}^{(0)}$ 0-го приближения

$$\begin{gathered} u_l^{(1)} = - < G_{3lKs} >_\xi \gamma_{Ks}^{(0)} - < H_{3lKs} >_\xi \varkappa_{Ks}^{(0)} + \varepsilon_{m3l} \xi k_m^{(0)} , \\ k_l^{(1)} = - < W_{3lKs} >_\xi \gamma_{Ks}^{(0)} - < V_{3lKs} >_\xi \varkappa_{Ks}^{(0)} . \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя выражения (14) для $\gamma_{3l}^{(0)}$ и $\varkappa_{3l}^{(0)}$ в определяющие соотношения (8) при n=0, получим компоненты тензоров напряжений $\sigma_{Ij}^{(0)}$ и моментных напряжений $M_{Ij}^{(0)}$ нулевого приближения через $\gamma_{Ks}^{(0)}$ и $\varkappa_{Ks}^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \sigma_{Ij}^{(0)} = C_{IjKl}^{(0)} \gamma_{Kl}^{(0)} + B_{IjKl}^{(0)} \varkappa_{Kl}^{(0)} , \\ M_{Ij}^{(0)} = \tilde{B}_{IjKl}^{(0)} \gamma_{Kl}^{(0)} + A_{IjKl}^{(0)} \varkappa_{Kl}^{(0)} , \end{gathered} \tag{19}$$

где введены обозначения для приведенных модулей упругости

$$\begin{aligned} C_{IjKl}^{(0)} &= C_{IjKl} - C_{Ij3p} G_{3pKl} - B_{Ij3p} W_{3pKl} , \\ B_{IjKl}^{(0)} &= B_{IjKl} - B_{Ij3p} V_{3pKl} - C_{Ij3p} H_{3pKl} , \\ \tilde{B}_{IjKl}^{(0)} &= B_{IjKl} - B_{Ij3p} G_{3pKl} - A_{Ij3p} W_{3pKl} , \\ A_{IjKl}^{(0)} &= A_{IjKl} - A_{Ij3p} V_{3pKl} - B_{Ij3p} H_{3pKl} . \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, формулы (12)–(20) образуют искомое решение задачи нулевого приближения, так как найдены все компоненты вектора перемещений $u_l^{(1)}$ и поворота $k_l^{(1)}$ первого приближения, а также все компоненты тензоров напряжений $\sigma_{3i}^{(0)}$, $\sigma_{Ij}^{(0)}$ и моментных напряжений $M_{3i}^{(0)}$, $M_{Ij}^{(0)}$ нулевого приближения в виде функций, зависящих только от $\varkappa_{3l}^{(0)}$ и $\gamma_{3l}^{(0)}$, которые, в свою очередь, зависят только от входных данных задачи $u_l^{(0)}$ и $k_l^{(0)}$.

Решение локальных задач высоких приближений. Рассмотрим решение локальных задач (10) более высоких приближений. Решения уравнений равновесия и уравнений моментов в этих задачах вместе с

соответствующими им граничными условиями выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_{3i}^{(n)} = -p_{-}\delta_{i3}\delta_{n3} + \int\limits_{-0.5}^{\xi} (-\sigma_{Ji,J}^{(n-1)} - \rho f_i \delta_{n1}) d\xi + h_i^{(n-1)}(\xi + 0.5) \\ M_{3i}^{(n)} = -m_i^{(n)}{}_{-} + \int\limits_{-0.5}^{\xi} (-M_{Ji,J}^{(n-1)} - \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}^{(n-1)} - \rho h_{m_i}\delta_{n1}) d\xi + g_i^{(n-1)}(\xi + 0.5) \end{cases} \quad (21)$$

$$n \geq 1$$

Условия существования решений (21), удовлетворяющих граничным условиям в системе (10) на внешней поверхности пластины $\xi = 0.5$, приводят к следующим уравнениям для вычисления функций $(h_i^{(n-1)}, g_i^{(n-1)})$:

$$\begin{cases} h_i^{(n-1)} = -\Delta p \delta_{i3}\delta_{(n-1)2} + < \sigma_{Ji,J}^{(n-1)} > + < \rho f_i > \delta_{(n-1)0} \\ g_i^{(n-1)} = -\Delta m_i^{(n)} + \varepsilon_{ijk} < \sigma_{jk}^{(n-1)} > + < M_{Ji,J}^{(n-1)} > + < \rho h_{m_i} > \delta_{(n-1)0} \end{cases}, \quad (22)$$

$$n \geq 1$$

где обозначены: $\Delta p = p_{+} - p_{-}$, $\Delta m_i^{(n)} = m_i^{(n)}{}_{+} - m_i^{(n)}{}_{-}$.

С учетом (22) уравнения (21) принимают вид:

$$\begin{cases} \sigma_{3i}^{(n)} = -(p_{-} + \Delta p(\xi + 0.5))\delta_{i3}\delta_{n3} - \{\sigma_{Ji,J}^{(n-1)}\}_{\xi} - \{\rho f_i\}_{\xi}\delta_{(n-1)0} \\ M_{3i}^{(n)} = -(m_i^{(n)}{}_{-} + \Delta m_i^{(n)}(\xi + 0.5)) - \{M_{Ji,J}^{(n-1)}\}_{\xi} - \varepsilon_{ijk}\{\sigma_{jk}^{(n-1)}\}_{\xi} - \{\rho h_{m_i}\}_{\xi}\delta_{(n-1)0} \end{cases}, \quad (23)$$

$$n \geq 1$$

Уравнения (23) представляют собой частичное решение локальных задач n-го приближения для компонент тензоров напряжений $\sigma_{3i}^{(n)}, M_{3i}^{(n)}$, так как они выражены только через входные данные $\sigma_{ij}^{(n-1)}, M_{ij}^{(n-1)}$ соответствующих задач. Для полного решения задач нужно найти остальные компоненты тензоров $\sigma_{Ij}^{(n)}$, $M_{Ij}^{(n)}$ посредством составления систем из выражений (22) и определяющих и кинематических соотношений в (10).

Рассмотрим в системе (10) группы определяющих соотношений для $\sigma_{3i}^{(n)}$ и $M_{3i}^{(n)}$, запишем их по аналогии с (13) в следующей форме

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}^{(n)} &= C_{3iKl}\gamma_{Kl}^{(n)} + C_{3i3l}\gamma_{3l}^{(n)} + B_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + B_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(n)}, \\ M_{3i}^{(n)} &= B_{Kl3i}\gamma_{Kl}^{(n)} + B_{3l3i}\gamma_{3l}^{(n)} + A_{3iKl}\varkappa_{Kl}^{(n)} + A_{3i3l}\varkappa_{3l}^{(n)}, \ n \geq 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Выразим из этих соотношений $\gamma_{3l}^{(n)}$ и $\varkappa_{3l}^{(n)}$, тогда получим формулы аналогичные (14)

$$\begin{aligned}\gamma_{3l}^{(n)} &= -G_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(n)} - H_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(n)} + X_{lj}^{\{11\}}\sigma_{3j}^{(n)} - X_{lj}^{\{12\}}M_{3j}^{(n)},\\ \varkappa_{3l}^{(n)} &= -W_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(n)} - V_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(n)} - X_{lj}^{\{21\}}\sigma_{3j}^{(n)} + X_{lj}^{\{22\}}M_{3j}^{(n)}\end{aligned} \qquad (25)$$

Рассмотрим в системе (10) дифференциальные уравнения, связывающие $\gamma_{3l}^{(n)}$ и $\varkappa_{3l}^{(n)}$ с векторами перемещений $u_l^{(n+1)}$ и поворота $k_l^{(n+1)}$, вместе с условиями нормировки. Интегрируя эти уравнения, получаем формулы аналогичные (17)

$$u_l^{(n+1)} = < \gamma_{3l}^{(n)} >_\xi + \varepsilon_{m3l} < k_m^{(n)} >_\xi,\ k_l^{(n+1)} = < \varkappa_{3l}^{(n)} >_\xi,\ n \ge 1. \qquad (26)$$

Подставляя в (26) вместо $\gamma_{3l}^{(n)}$ и $\varkappa_{3l}^{(n)}$ их выражения согласно формулам из (25), получаем итоговые соотношения между перемещениями и поворотами (n+1)-го приближения через тензоры деформации $\gamma_{Ks}^{(n)}$ и изгиба-искривления $\varkappa_{Ks}^{(n)}$ n-го приближения

$$\begin{aligned}u_l^{(n+1)} = &< G_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(n)} >_\xi + < H_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(n)} >_\xi + < X_{lj}^{\{11\}}\sigma_{3j}^{(n)} >_\xi -\\ &- < X_{lj}^{\{12\}}M_{3j}^{(n)} >_\xi + \varepsilon_{m3l} < k_m^{(n)} >_\xi,\\ k_l^{(n+1)} = &< W_{3lKs}\gamma_{Ks}^{(n)} >_\xi + < V_{3lKs}\varkappa_{Ks}^{(n)} >_\xi -\\ &- < X_{lj}^{\{21\}}\sigma_{3j}^{(n)} >_\xi + < X_{lj}^{\{22\}}M_{3j}^{(n)} >_\xi,\\ &n \ge 1\end{aligned} \qquad (27)$$

В эти соотношения входят сдвиговые напряжения $\sigma_{3i}^{(n)}$ и $M_{3i}^{(n)}$, которые вычисляются по рекуррентным формулам (23). Деформации $\gamma_{Ks}^{(n)}$ и изгиба-кручения $\varkappa_{Ks}^{(n)}$ n-го в этих формулах вычисляются через $u_l^{(n)}$ и поворота $k_l^{(n)}$ согласно формулам из (10), и тем самым формулы (27) также становятся рекуррентными.

Подставляя выражения (25) для $\gamma_{3l}^{(n)}$ и $\varkappa_{3l}^{(n)}$ в определяющие соотношения системы (10), получим формулы для компонентов тензоров напряжений $\sigma_{Ij}^{(0)}$ и моментных напряжений $M_{Ij}^{(0)}$ n-го приближения через $\gamma_{Ks}^{(0)}$ и $\varkappa_{Ks}^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{Ij}^{(n)} &= C_{IjKl}^{(0)}\gamma_{Kl}^{(n)} + B_{IjKl}^{(0)}\varkappa_{Kl}^{(n)} + Z_{Ijp}^{\{11\}}\sigma_{3p}^{(n)} - Z_{Ijp}^{\{12\}}M_{3p}^{(n)},\\ M_{Ij}^{(n)} &= \tilde{B}_{IjKl}^{(0)}\gamma_{Kl}^{(n)} + A_{IjKl}^{(0)}\varkappa_{Kl}^{(n)} - Z_{Ijp}^{\{21\}}\sigma_{3p}^{(n)} + Z_{Ijp}^{\{22\}}M_{3p}^{(n)},\end{aligned} \qquad (28)$$

где обозначены

$$\begin{aligned}Z_{Ijp}^{\{11\}} &= C_{Ij3l}X_{lp}^{\{11\}} - B_{Ij3l}X_{lp}^{\{21\}},\ \ Z_{Ijp}^{\{12\}} = C_{Ij3l}X_{lp}^{\{12\}} - B_{Ij3l}X_{lp}^{\{22\}},\\ Z_{Ijp}^{\{21\}} &= A_{Ij3l}X_{lp}^{\{21\}} - B_{Ij3l}X_{lp}^{\{11\}},\ \ Z_{Ijp}^{\{22\}} = A_{Ij3l}X_{lp}^{\{22\}} - B_{Ij3l}X_{lp}^{\{12\}}.\end{aligned} \qquad (29)$$

Выражения решения первого приближения через нулевое приближение. Запишем формулы (23) для случая $n=1$

$$\begin{cases} \sigma_{3i}^{(1)} = -\{\sigma_{Ji,J}^{(0)}\}_\xi - \{\rho f_i\}_\xi, \\ M_{3i}^{(1)} = -(m_i^{(1)}{}_- + \Delta m_i^{(1)}(\xi+0.5)) - \{M_{Ji,J}^{(0)}\}_\xi - \varepsilon_{iIj}\{\sigma_{Ij}^{(0)}\}_\xi - \{\rho h_{mi}\}_\xi. \end{cases} \tag{30}$$

Подставим выражения (19) в формулы (30), тогда получим

$$\begin{cases} \sigma_{3j}^{(1)} = -\{C_{IjKl}^{(0)}\}_\xi \gamma_{Kl,I}^{(0)} - \{B_{IjKl}^{(0)}\}_\xi \varkappa_{Kl,I}^{(0)} - \{\rho f_j\}_\xi \\ M_{3j}^{(1)} = -(m_j^{(1)}{}_- + \Delta m_j^{(1)}(\xi+0.5)) - \{\tilde{B}_{IjKl}^{(0)}\}_\xi \gamma_{Kl,I}^{(0)} - \{A_{IjKl}^{(0)}\}_\xi \varkappa_{Kl,I}^{(0)} - \\ \qquad - \varepsilon_{jIi}\{C_{IiKl}^{(0)}\}_\xi \gamma_{Kl}^{(0)} - \varepsilon_{jIi}\{B_{IiKl}^{(0)}\}_\xi \varkappa_{Kl}^{(0)} - \{\rho h_{mj}\}_\xi, \end{cases} \tag{31}$$

— выражения для сдвиговых напряжений и моментных напряжений 1-го приближения через тензоры деформации $\gamma_{Kl}^{(0)}$ и изгиба-кручения $\varkappa_{Kl}^{(0)}$ 0-го приближения.

Запишем теперь соотношения системы (10) между $\varkappa_{Kl}^{(1)}$, $\gamma_{Kl}^{(1)}$ и $u_l^{(1)}$, $k_l^{(1)}$ для случая $n=1$, используя формулы (18)

$$\begin{gathered} \varkappa_{Kl}^{(1)} = k_{l,K}^{(1)} = -<W_{3lMs}>_\xi \gamma_{Ms,K}^{(0)} - <V_{3lMs}>_\xi \varkappa_{Ms,K}^{(0)}, \\ \gamma_{Kl}^{(1)} = u_{l,K}^{(1)} - \varepsilon_{mKl}k_m^{(1)} = -<G_{3lMs}>_\xi \gamma_{Ms,K}^{(0)} - <H_{3lMs}>_\xi \varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \\ + \varepsilon_{m3l}\xi k_{m,K}^{(0)} + \varepsilon_{jKl}<W_{3jKs}>_\xi \gamma_{Ks}^{(0)} + \varepsilon_{jKl}<V_{3jKs}>_\xi \varkappa_{Ks}^{(0)} \end{gathered} \tag{32}$$

В результате получим выражение тензоров деформации $\gamma_{Kl}^{(1)}$ и изгиба-кручения $\varkappa_{Kl}^{(1)}$ 1-го приближения через тензоры 0-го приближения.

Подставляя (32) в соотношения (28) для случая $n=1$, получаем выражения для напряжений и моментных напряжений 1-го приближения через тензоры 0-го приближения

$$\begin{aligned} \sigma_{Ij}^{(1)} &= -C_{IjKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - B_{IjKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + N_{IjKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)} + R_{IjMs}^{(1)}\gamma_{Ms}^{(0)} + Z_{IjMs}^{(1)}\varkappa_{Ms}^{(0)} - \Gamma_{Ij}^{(1)}, \\ M_{Ij}^{(1)} &= -\tilde{B}_{IjKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - A_{IjKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \tilde{N}_{IjKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)} + \tilde{R}_{IjMs}^{(1)}\gamma_{Ms}^{(0)} + \tilde{Z}_{IjMs}^{(1)}\varkappa_{Ms}^{(0)} + \Gamma_{Ij}^{m(1)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь учтены формулы (12) и введены обозначения

$$C_{IjKMs}^{(1)} = C_{IjKl}^{(0)} <G_{3lMs}>_\xi + B_{IjKl}^{(0)} <W_{3lMs}>_\xi + Z_{Ijp}^{\{11\}}\{C_{KpMs}^{(0)}\}_\xi - Z_{Ijp}^{\{12\}}\{\tilde{B}_{KpMs}^{(0)}\}_\xi,$$

$$B_{IjKMs}^{(1)} = C_{IjKl}^{(0)} <H_{3lMs}>_\xi + B_{IjKl}^{(0)} <V_{3lMs}>_\xi + Z_{Ijp}^{\{11\}}\{B_{KpMs}^{(0)}\}_\xi - Z_{Ijp}^{\{12\}}\{A_{KpMs}^{(0)}\}_\xi,$$

$$\tilde{B}_{IjKMs}^{(1)} = \tilde{B}_{IjKl}^{(0)} <G_{3lMs}>_\xi + A_{IjKl}^{(0)} <W_{3lMs}>_\xi - Z_{Ijp}^{\{21\}}\{C_{KpMs}^{(0)}\}_\xi + Z_{Ijp}^{\{22\}}\{\tilde{B}_{KpMs}^{(0)}\}_\xi,$$

$$A_{IjKMs}^{(1)} = \tilde{B}_{IjKl}^{(0)} <H_{3lMs}>_\xi + A_{IjKl}^{(0)} <V_{3lMs}>_\xi - Z_{Ijp}^{\{21\}}\{B_{KpMs}^{(0)}\}_\xi + Z_{Ijp}^{\{22\}}\{A_{KpMs}^{(0)}\}_\xi,$$

$$N_{IjKm}^{(1)} = \xi C_{IjKp}^{(0)}\varepsilon_{m3p},\ \tilde{N}_{IjKm}^{(1)} = \xi \tilde{B}_{IjKp}^{(0)}\varepsilon_{m3p},$$

$$R^{(1)}_{IjMs} = C^{(0)}_{IjKl}\varepsilon_{pKl} < W_{3pMs} >_\xi + Z^{\{12\}}_{Ijp}\varepsilon_{pKi}\{C^{(0)}_{KiMs}\}_\xi,$$

$$Z^{(1)}_{IjMs} = C^{(0)}_{IjKl}\varepsilon_{pKl} < V_{3pMs} >_\xi + Z^{\{12\}}_{Ijp}\varepsilon_{pKi}\{B^{(0)}_{KiMs}\}_\xi,$$

$$\tilde{R}^{(1)}_{IjMs} = B^{(0)}_{IjKl}\varepsilon_{pKl} < W_{3pMs} >_\xi - Z^{\{21\}}_{Ijp}\varepsilon_{pKi}\{C^{(0)}_{KiMs}\}_\xi,$$

$$\tilde{Z}^{(1)}_{IjMs} = B^{(0)}_{IjKl}\varepsilon_{pKl} < V_{3pMs} >_\xi - Z^{\{22\}}_{Ijp}\varepsilon_{pKi}\{B^{(0)}_{KiMs}\}_\xi, \tag{34}$$

$$\Gamma^{(1)}_{Ij} = Z^{\{11\}}_{Ijp}\{\rho f_p\}_\xi - Z^{\{12\}}_{Ijp}\{\rho h_{mp}\}_\xi - Z^{\{12\}}_{Ijp}(m^{(1)}_{p\ _} + \Delta m^{(1)}_p(\xi + 0.5)),$$

$$\Gamma^{m(1)}_{Ij} = Z^{\{21\}}_{Ijp}\{\rho f_p\}_\xi - Z^{\{22\}}_{Ijp}\{\rho h_{mp}\}_\xi - Z^{\{22\}}_{Ijp}(m^{(1)}_{p\ _} + \Delta m^{(1)}_p(\xi + 0.5)).$$

Выражения решения второго приближения через нулевое приближение. Запишем формулы (23) случая $n = 2$, причем ограничимся рассмотрением только напряжений $\sigma^{(2)}_{3i}$ и моментных напряжений $M^{(2)}_{3i}$

$$\begin{cases} \sigma^{(2)}_{3i} = -\{\sigma^{(1)}_{Ji,J}\}_\xi \\ M^{(2)}_{3i} = -(m^{(2)}_{i\ _} + \Delta m^{(2)}_i(\xi + 0.5)) - \{M^{(1)}_{Ji,J}\}_\xi - \varepsilon_{i3k}\{\sigma^{(1)}_{3k}\}_\xi - \varepsilon_{iMk}\{\sigma^{(1)}_{Mk}\}_\xi \end{cases} \tag{35}$$

После подстановки в эти выражения формул (31) и (34), получаем

$$\begin{cases} \sigma^{(2)}_{3j} = \{C^{(1)}_{IjKMs}\}_\xi \gamma^{(0)}_{Ms,KI} + \{B^{(1)}_{IjKMs}\}_\xi \varkappa^{(0)}_{Ms,KI} - \{N^{(1)}_{IjKm}\}_\xi k^{(0)}_{m,KI} - \\ \qquad - \{R^{(1)}_{IjMs}\}_\xi \gamma^{(0)}_{Ms,I} - \{Z^{(1)}_{IjMs}\}_\xi \varkappa^{(0)}_{Ms,I}, \\ M^{(2)}_{3j} = \{\tilde{B}^{(1)}_{IjKMs}\}_\xi \gamma^{(0)}_{Ms,KI} + \{A^{(1)}_{IjKMs}\}_\xi \varkappa^{(0)}_{Ms,KI} - \{\tilde{N}^{(1)}_{IjKm}\}_\xi k^{(0)}_{m,KI} + \\ \qquad + Q_{jKMs}\gamma^{(0)}_{Ms,K} + S_{jKMs}\varkappa^{(0)}_{Ms,K} - P_{jMs}\gamma^{(0)}_{Ms} - Y_{jMs}\varkappa^{(0)}_{Ms} + \\ \qquad + \varepsilon_{j3i}\{\{\rho f_i\}_\xi\}_\xi - (m^{(2)}_{j\ _} + \Delta m^{(2)}_j(\xi + 0.5)), \end{cases} \tag{36}$$

где введены обозначения

$$Q_{jKMs} = \varepsilon_{j3i}\{\{C^{(0)}_{KiMs}\}_\xi\}_\xi - \varepsilon_{jJi}\{C^{(1)}_{JiKMs}\}_\xi - \{\tilde{R}^{(1)}_{KjMs}\}_\xi,$$

$$S_{jKMs} = \varepsilon_{j3i}\{\{B^{(0)}_{KiMs}\}_\xi\}_\xi - \varepsilon_{jJi}\{B^{(1)}_{JiKMs}\}_\xi - \{\tilde{Z}^{(1)}_{KjMs}\}_\xi, \tag{37}$$

$$P_{jMs} = \varepsilon_{jIp}\{\tilde{R}^{(1)}_{IpMs}\}_\xi,\ Y_{jMs} = \varepsilon_{jIp}\{\tilde{Z}^{(1)}_{IpMs}\}_\xi.$$

Запишем формулы (38) случая $n = 1$

$$\begin{aligned} u^{(2)}_l &= < G_{3lKs} >_\xi \gamma^{(1)}_{Ks} + < H_{3lKs} >_\xi \varkappa^{(1)}_{Ks} + < X^{\{11\}}_{lj}\sigma^{(1)}_{3j} >_\xi - \\ &\quad - < X^{\{12\}}_{lj} M^{(1)}_{3j} >_\xi + \varepsilon_{m3l} < k^{(1)}_m >_\xi, \\ k^{(2)}_l &= < W_{3lKs} >_\xi \gamma^{(1)}_{Ks} + < V_{3lKs} >_\xi \varkappa^{(1)}_{Ks} - \\ &\quad - < X^{\{21\}}_{lj}\sigma^{(1)}_{3j} >_\xi + < X^{\{22\}}_{lj} M^{(1)}_{3j} >_\xi,\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{38}$$

Подставим в эти формулы выражения (32) для $\varkappa_{Kl}^{(1)}$, $\gamma_{Kl}^{(1)}$ и $k_l^{(1)}$, а также выражения (31) для $\sigma_{3j}^{(1)}$ и $M_{3j}^{(1)}$.

Осредненные уравнения для микрополярных тонких пластин. Подставляя выражения (22) для функций $(h_i^{(n-1)}, g_i^{(n-1)})$ в уравнения равновесия и уравнения моментов (11), получаем

$$\begin{gathered}(<\sigma_{Ji,J}^{(0)}>+<\rho f_i>)+\alpha<\sigma_{Ji,J}^{(1)}>+\alpha^2(<\sigma_{Ji,J}^{(2)}>-\Delta p\delta_{i3})+\ldots=0,\\ (<M_{Ji,J}^{(0)}>+\varepsilon_{i3k}<\sigma_{3k}^{(0)}>+\varepsilon_{iJk}<\sigma_{Jk}^{(0)}>+<\rho h_{mi}>-\Delta m_i^{(1)})+\\ +\alpha(<M_{Ji,J}^{(1)}>+\varepsilon_{i3k}<\sigma_{3k}^{(1)}>+\varepsilon_{iJk}<\sigma_{Jk}^{(1)}>-\Delta m_i^{(2)})+\ldots=0.\end{gathered} \tag{39}$$

Домножим изначальные уравнения движения и моментов в системе (1) на $\xi\alpha$, подставим в них асимптотические разложения (4) и проинтегрируем по толщине (по локальной координате ξ от -0.5 до 0.5):

$$\begin{gathered}\alpha(<\xi\sigma_{Ji,J}^{(0)}>-<\sigma_{3i}^{(1)}>+<\xi\rho f_i>)+\alpha^2(<\xi\sigma_{Ji,J}^{(1)}>-<\sigma_{3i}^{(2)}>)+\ldots=0,\\ \alpha(<\xi M_{Ji,J}^{(0)}>-<M_{3i}^{(1)}>+\varepsilon_{i3k}<\xi\sigma_{3k}^{(0)}>+\varepsilon_{iJk}<\xi\sigma_{Jk}^{(0)}>-\\ -(m_i^{(1)}{}_{-}+0.5\Delta m_i^{(1)})+<\xi\rho h_{m_i}>)+\alpha^2(<\xi M_{Ji,J}^{(1)}>-<M_{3i}^{(2)}>+\\ +\varepsilon_{i3k}<\xi\sigma_{3k}^{(1)}>+\varepsilon_{iJk}<\xi\sigma_{Jk}^{(1)}>-(m_i^{(2)}{}_{-}+0.5\Delta m_i^{(2)}))+\ldots=0\end{gathered} \tag{40}$$

Здесь учтено, что, $<\xi\sigma_{3i/3}^{(1)}>=-<\sigma_{3i}^{(1)}>$, $<\xi\sigma_{3i/3}^{(2)}>=-<\sigma_{3i}^{(2)}>$, $<\xi M_{3i/3}^{(n)}>=-(m_i^{(n)}{}_{-}+0.5\Delta m_i^{(n)})-<M_{3i}^{(n)}>, n\geq 1$.

Введем обозначения для усилий T_{JI}, моментов μ_{ji} и перерезывающих сил $Q_J, Q_J{}^*$ в пластине (с учетом несимметричности тензора напряжений), а также для моментных усилий T_{ji}^m, моментов моментных напряжений μ_{ji}^m и перерезывающих моментных напряжений Q_J^m, Q_J^{m*}:

$$\begin{gathered}T_{JI}=<\sigma_{JI}>=<\sigma_{JI}^{(0)}>+\alpha<\sigma_{JI}^{(1)}>+\ldots,\\ Q_J=<\sigma_{J3}>=<\sigma_{J3}^{(0)}>+\alpha<\sigma_{J3}^{(1)}>+\ldots,\\ Q_J{}^*=<\sigma_{3J}>=\alpha<\sigma_{3J}^{(1)}>+\alpha^2<\sigma_{3J}^{(2)}>+\ldots,\\ \mu_{ji}=\alpha<\xi\sigma_{ji}>=\alpha<\xi\sigma_{ji}^{(0)}>+\alpha^2<\xi\sigma_{ji}^{(1)}>+\ldots,\\ T_{JI}^m=<M_{JI}>=<M_{JI}^{(0)}>+\alpha<M_{JI}^{(1)}>+\ldots,\\ Q_J^m=<M_{J3}>=<M_{J3}^{(0)}>+\alpha<M_{J3}^{(1)}>+\ldots,\\ Q_J^{m*}=<M_{3J}>=\alpha<M_{3J}^{(1)}>+\alpha^2<M_{3J}^{(2)}>+\ldots,\\ \mu_{JI}^m=<\xi M_{JI}>=\alpha<\xi M_{JI}^{(0)}>+\alpha^2<\xi M_{JI}^{(1)}>+\ldots\end{gathered} \tag{41}$$

Тогда уравнения (39) и (40) можно записать в следующем виде, близком к традиционному виду записи уравнений равновесия и моментов в классической теории упругости пластин:

$$
\begin{gathered}
T_{JI,J} + \bar{F}_I^e = 0, \\
Q_{I,I} + \bar{F}_3^e = \Delta\bar{p}, \\
\mu_{JI,J} - Q_I^* + \bar{\mu}_I^e = 0, \\
T_{JI,J}^m + \varepsilon_{I3K}(Q_K^* - Q_K) + \bar{M}_I^e = \Delta\bar{m}_I, \\
Q_{J,J}^m + T_{12} - T_{21} + \bar{M}_3^e = \Delta\bar{m}_3, \\
\mu_{JI,J}^m - Q_I^{m*} + \varepsilon_{I3K}(\mu_{K3} - \mu_{3K}) + \bar{\mu}_I^{me} = \Delta\bar{m}_I^m,
\end{gathered}
\tag{42}
$$

здесь введены следующие обозначения для внешних массовых сил и моментов, действующих на тонкие пластины:

$$
\begin{gathered}
\bar{F}_i^e = <\rho f_i>,\ \bar{\mu}_I^e = \alpha <\xi\rho f_I>,\ \bar{M}_i^e = <\rho h_{mi}>,\ \bar{\mu}_I^{me} = \alpha <\xi\rho h_{mI}>, \\
\Delta\bar{p} = \alpha^2\Delta p,\ \ \Delta\bar{m}_i = \Delta m_i^{(1)} + \alpha\Delta m_i^{(2)} + ..., \\
\Delta\bar{m}_I^m = \alpha(m_I^{(1)}{}_- + 0.5\Delta m_I^{(1)}) + \alpha^2(m_1^{(2)}{}_- + 0.5\Delta m_1^{(2)}) + ...
\end{gathered}
\tag{43}
$$

Выведем осредненные определяющие соотношения для микрополярных тонких пластин. Подставим выражения (19) и (31) для тензоров напряжений и моментных напряжений 0-го и 1-го приближения $\sigma_{Ij}^{(0)}$, $M_{Ij}^{(0)}$ и $\sigma_{Ij}^{(1)}$, $M_{Ij}^{(1)}$ в (41), тогда, сохраняя главные члены асимптотических разложений (до первого порядка), получим следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
T_{JI} = \bar{C}_{JIMs}\gamma_{Ms}^{(0)} + \bar{B}_{JIMs}\varkappa_{Ms}^{(0)} - \bar{C}_{JIKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - \bar{B}_{JIKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \bar{N}_{JIKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)}, \\
T_{JI}^m = \bar{\tilde{B}}_{JIMs}\gamma_{Ms}^{(0)} + \bar{A}_{JIMs}\varkappa_{Ms}^{(0)} - \bar{B}_{JIKMs}^{m(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - \bar{A}_{JIKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \bar{N}_{JIKm}^{m(1)}k_{m,K}^{(0)}, \\
\mu_{Ji} = \bar{D}_{JiMs}\gamma_{Ms}^{(0)} + \bar{K}_{JiMs}\varkappa_{Ms}^{(0)} - \bar{D}_{JiKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - \bar{K}_{JiKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \bar{\Phi}_{JiKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)}, \\
\mu_{JI}^m = \bar{K}_{JIMs}^m\gamma_{Ms}^{(0)} + \bar{D}_{JIMs}^m\varkappa_{Ms}^{(0)} - \bar{K}_{JIKMs}^{m(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)} - \bar{D}_{JIKMs}^{m(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)} + \bar{\Phi}_{JIKm}^{m(1)}k_{m,K}^{(0)},
\end{gathered}
\tag{44}
$$

где обозначены осредненные жесткости пластины

$$
\begin{gathered}
\bar{C}_{JIMs} = <C_{JIMs}^{(0)}> + \alpha <R_{JIMs}^{(1)}>,\ \bar{B}_{JIMs} = <B_{JIMs}^{(0)}> + \alpha <Z_{JIMs}^{(1)}>, \\
\bar{C}_{JIKMs}^{(1)} = \alpha <C_{JIKMs}^{(1)}>,\ \bar{B}_{JIKMs}^{(1)} = \alpha <B_{JIKMs}^{(1)}>,\ \bar{N}_{JIKm}^{(1)} = \alpha <N_{JIKm}^{(1)}>, \\
\bar{\tilde{B}}_{JIMs} = <\tilde{B}_{JIMs}^{(0)}>,\ \bar{A}_{JIMs} = <A_{JIMs}^{(0)}>,
\end{gathered}
\tag{45}
$$

$$\bar{\tilde{B}}^{(1)}_{JIKMs} = \alpha < \tilde{B}^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{A}^{(1)}_{JIKMs} = \alpha < A^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{N}^{m(1)}_{JIKm} = \alpha < \tilde{N}^{(1)}_{JIKm} >,$$

$$\bar{D}_{JiMs} = \alpha < \xi C^{(0)}_{JiMs} >,\ \bar{K}_{JiMs} = \alpha < \xi B^{(0)}_{JiMs} >,$$

$$\bar{D}^{(1)}_{JiKMs} = \alpha^2 < \xi C^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{K}^{(1)}_{JiKMs} = \alpha^2 < \xi B^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{\Phi}^{(1)}_{JiKm} = \alpha^2 < \xi N^{(1)}_{JIKm} >,$$

$$\bar{K}^{m}_{JiMs} = \alpha < \xi \tilde{B}^{(0)}_{JIMs} >,\ \bar{D}^{m}_{JiMs} = \alpha < \xi A^{(0)}_{JIMs} >,$$

$$\bar{K}^{m(1)}_{JIKMs} = \alpha^2 < \xi \tilde{B}^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{D}^{m(1)}_{JIKMs} = \alpha^2 < \xi A^{(1)}_{JIKMs} >,\ \bar{\Phi}^{m(1)}_{JIKm} = \alpha^2 < \xi \tilde{N}^{(1)}_{JIKm} >,$$

В осредненную систему уравнений (42) входят также моменты сдвиговых напряжений μ_{3J}, подставляя в формулу (41) для этих моментов выражения (12) и (34) для $\sigma^{(0)}_{3J}$ и $\sigma^{(1)}_{3J}$, получаем

$$\mu_{3J} = -\hat{\bar{D}}_{IJKs}\gamma^{(0)}_{Ks,I} - \hat{\bar{B}}_{IJKs}\varkappa^{(0)}_{Ks,I} - \bar{\mu}^{f}_{J}, \tag{46}$$

где введены обозначения для осредненных сдвиговых жесткостей

$$\hat{\bar{D}}_{IJKs} = \alpha^2 < \xi\{C^{(0)}_{IJKs}\}_{\xi} >,\ \hat{\bar{B}}_{IJKs} = \alpha^2 < \xi\{B^{(0)}_{IJKs}\}_{\xi} >,,, \quad \bar{\mu}^{f}_{J} = \alpha^2 < \xi\{\rho f_J\}_{\xi} >. \tag{47}$$

Поскольку в систему (42) входит именно разность моментов сдвиговых напряжений $\Delta\mu_K = (\mu_{K3} - \mu_{3K})$, образуем с помощью (44) и (46) одно определяющее соотношение для этой разности

$$\Delta\mu_K = \bar{D}_{K3Ms}\gamma^{(0)}_{Ms} + \bar{K}_{K3Ms}\varkappa^{(0)}_{Ms} - \hat{\bar{D}}^{(1)}_{K3IMs}\gamma^{(0)}_{Ms,I} - \\ -\hat{\bar{K}}^{(1)}_{K3IMs}\varkappa^{(0)}_{Ms,I} + \bar{\Phi}^{(1)}_{K3Is}k^{(0)}_{s,I} + \bar{\mu}^{f}_{K}, \tag{48}$$

где введены обозначения

$$\hat{\bar{D}}^{(1)}_{K3IMs} = \bar{D}^{(1)}_{K3IMs} - \hat{\bar{D}}_{IKMs},\ \hat{\bar{K}}^{(1)}_{K3IMs} = \bar{K}^{(1)}_{K3IMs} - \hat{\bar{B}}_{IKMs}, \tag{49}$$

Также в осредненную систему (42) входят поперечные силы Q_I, Q^{*}_{I} и поперечные силы моментных напряжений Q^{m}_{I} и Q^{m*}_{I}. Поперечные силы Q_I, Q^{*}_{I}, как и в классической теории (для нее $Q_I = Q^{*}_{I}$), будем полагать независимыми неизвестными функциями, а для перерезывающих моментных напряжений Q^{m}_{I} и Q^{m*}_{I} сформулируем дополнительные определяющие соотношения. Подставляя в определения (41) поперечных сил Q^{m}_{I}, Q^{m*}_{I} выражения (12), (19), (31) и (34) для моментных напряжений $M^{(0)}_{J3}, M^{(1)}_{J3}$ и $M^{(0)}_{3J}$, $M^{(1)}_{3J}$, получаем

$$Q^{m*}_{J} = -\bar{B}_{J3Ms}\gamma^{(0)}_{Ms} - \bar{A}_{J3Ms}\varkappa^{(0)}_{Ms} - \bar{B}^{(1)}_{J3KMs}\gamma^{(0)}_{Ms,K} - \bar{A}^{(1)}_{J3KMs}\varkappa^{(0)}_{Ms,K} - \tilde{Q}^{h}_{J}, \tag{50}$$

где обозначены

$$\bar{\tilde{B}}_{J3Ms} =< \tilde{B}^{(0)}_{J3Ms} > +\alpha < \tilde{R}^{(1)}_{J3Ms} >,\ \bar{\tilde{A}}_{J3Ms} =< A^{(0)}_{J3Ms} > +\alpha < \tilde{Z}^{(1)}_{J3Ms} >,$$

$$\bar{\tilde{B}}^{(1)}_{J3KMs} = \alpha < \tilde{B}^{(1)}_{J3KMs} >,\ \bar{\tilde{A}}^{(1)}_{J3KMs} = \alpha < A^{(1)}_{J3KMs} >,\ \bar{N}^{m(1)}_{J3Km} = \alpha < \tilde{N}^{(1)}_{J3Km} >,$$

$$\bar{B}_{J3Ms} = \alpha\varepsilon_{JI3} < \{C^{(0)}_{I3Ks}\}_{\xi} >,\ \bar{A}_{J3Ms} = \alpha\varepsilon_{JI3} < \{B^{(0)}_{I3Ks}\}_{\xi} >,$$

$$\bar{B}^{(1)}_{J3KMs} = \alpha < \{\tilde{B}^{(0)}_{KJMs}\}_{\xi} >,\ \bar{A}^{(1)}_{J3KMs} = \alpha < \{A^{(0)}_{KJMs}\}_{\xi} >, \qquad (51)$$

$$Q^{h}_{J} = \alpha < \{\rho h_{mJ}\}_{\xi} > +\alpha(m^{(1)}_{j_} + m^{(1)}_{j+})/2.$$

В правые части определяющих соотношений (44), (48) и (50) в качестве неизвестных функций входят только тензоры $\gamma^{(0)}_{Ms}$, $\varkappa^{(0)}_{Ms}$ и вектор $k^{(0)}_{m}$, а также их производные. Эти функции зависят только от глобальных координат. Согласно системе (9) эти тензоры выражаются только через 2 вектора – вектор перемещений $u^{(0)}_{l}$ и вектор поворота $k^{(0)}_{m}$ в нулевом приближении с помощью кинематических соотношений

$$\gamma^{(0)}_{Ms} = u^{(0)}_{s,M} - \varepsilon_{iMs}k^{(0)}_{i},\ \varkappa^{(0)}_{Ms} = k^{(0)}_{s,M}. \qquad (52)$$

Таким образом, получена система осредненных уравнений (42), определяющих соотношений (44), (48) и (50) и кинематических соотношений (52). После подстановки уравнений (52) в (44), (48) и (50), а затем в (42) получаем замкнутую систему 10 уравнений относительно 10 неизвестных: 3-х компонент вектора перемещений $u^{(0)}_{i}$, 3-х компонент вектора поворота $k^{(0)}_{i}$ и 4-х перерезывающих сил Q_I, Q^{*}_{I}. Внешние воздействия на пластину: давление $\Delta\bar{p}$, механические моменты $\bar{\mu}^{e}_{I}$, массовые внешние моменты $\bar{M}^{e}_{i}$, массовые внешние моменты моментов $\bar{\mu}^{me}_{I}$ и внешние поверхностные моменты $\Delta\bar{m}_{i}$ в этой системе полагаются заданными.

Напряжения в микрополярной многослойной пластине. Рассмотрим формулы (4) для напряжений σ_{ij} и моментных напряжений M_{ij}, и следуя, ограничимся в асимптотических разложениях для тангенциальных напряжений σ_{IJ}, M_{IJ} и сдвиговых напряжений σ_{J3}, M_{J3} только первым приближением, для сдвиговых напряжений σ_{3J}, M_{3J} — только вторым приближением, а для поперечных напряжений σ_{33}, M_{33} — третьим приближением

$$\sigma_{Ij}=\sigma_{Ij}^{(0)}+\alpha\sigma_{Ij}^{(1)},\ M_{Ij}=M_{Ij}^{(0)}+\alpha M_{Ij}^{(1)},$$

$$\sigma_{3I}=\alpha\sigma_{3I}^{(1)}+\alpha^2\sigma_{3I}^{(2)},\ M_{3I}=\alpha M_{3I}^{(1)}+\alpha^2 M_{3I}^{(2)}, \tag{53}$$

$$\sigma_{33}=\alpha\sigma_{33}^{(1)}+\alpha^2\sigma_{33}^{(2)}+\alpha^3\sigma_{33}^{(3)},\ M_{33}=\alpha M_{33}^{(1)}+\alpha^2 M_{33}^{(2)}+\alpha^3 M_{33}^{(3)},$$

здесь учтены формулы (12). Подставляя в эти формулы выражения (31), (36), а также другие рекуррентные формулы (23) и (24), находим явное выражение для напряжений σ_{ij} и моментных напряжений M_{ij}, в частности

$$\sigma_{Ij}=\hat{C}_{IjKl}^{(0)}\gamma_{Kl}^{(0)}+\hat{B}_{IjKl}^{(0)}\varkappa_{Kl}^{(0)}-\alpha(C_{IjKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)}+B_{IjKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)}-N_{IjKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)}),$$

$$M_{Ij}=\hat{\tilde{B}}_{IjKl}^{(0)}\gamma_{Kl}^{(0)}+\hat{A}_{IjKl}^{(0)}\varkappa_{Kl}^{(0)}-\alpha(\tilde{B}_{IjKMs}^{(1)}\gamma_{Ms,K}^{(0)}+A_{IjKMs}^{(1)}\varkappa_{Ms,K}^{(0)}-\tilde{N}_{IjKm}^{(1)}k_{m,K}^{(0)}),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{3J}=&-\alpha(\{\hat{C}_{IJKl}^{(0)}\}_\xi\gamma_{Kl,I}^{(0)}+\{\hat{B}_{IJKl}^{(0)}\}_\xi\varkappa_{Kl,I}^{(0)}+\{\rho f_J\}_\xi)+\\&+\alpha^2(\{C_{IJKMs}^{(1)}\}_\xi\gamma_{Ms,KI}^{(0)}+\{B_{IJKMs}^{(1)}\}_\xi\varkappa_{Ms,KI}^{(0)}-\{N_{JjKm}^{(1)}\}_\xi k_{m,KI}^{(0)}),\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}M_{3J}=&-\alpha(m_{J\ _}^{(1)}+\Delta m_J^{(1)}(\xi+0.5)+\{\tilde{B}_{IJKl}^{(0)}\}_\xi\gamma_{Kl,I}^{(0)}+\{A_{IJKl}^{(0)}\}_\xi\varkappa_{Kl,I}^{(0)}+\\&+\varepsilon_{JIj}\{C_{IjKl}^{(0)}\}_\xi\gamma_{Kl}^{(0)}+\varepsilon_{JIj}\{B_{IjKl}^{(0)}\}_\xi\varkappa_{Kl}^{(0)}+\{\rho h_{mJ}\}_\xi)-\\&-\alpha^2(m_{J\ _}^{(2)}+\Delta m_J^{(2)}(\xi+0.5)+\{\tilde{B}_{IJKMs}^{(1)}\}_\xi\gamma_{Ms,KI}^{(0)}+\{A_{IJKMs}^{(1)}\}_\xi\varkappa_{Ms,KI}^{(0)}+\\&+\{\tilde{N}_{IJKm}^{(1)}\}_\xi k_{m,KI}^{(0)}+Q_{JKMs}\gamma_{Ms,K}^{(0)}+S_{JKMs}\varkappa_{Ms,K}^{(0)}+\varepsilon_{J3i}\{\{\rho f_i\}_\xi\}_\xi),\end{aligned}$$

где обозначены

$$\begin{aligned}&\hat{C}_{IjKl}^{(0)}=C_{IjKl}^{(0)}+\alpha R_{IjKl}^{(1)},\ \ \hat{B}_{IjKl}^{(0)}=B_{IjKl}^{(0)}+\alpha R_{IjKl}^{(1)},\\&\hat{\tilde{B}}_{IjKl}^{(0)}=\tilde{B}_{IjKl}^{(0)}+\alpha\tilde{R}_{IjKl}^{(1)},\ \ \hat{A}_{IjKl}^{(0)}=A_{IjKl}^{(0)}+\alpha\tilde{Z}_{IjKl}^{(1)}.\end{aligned} \tag{55}$$

Непосредственной проверкой асимптотических формул (54) можно показать, что, когда имеет место случай симметричной теории упругости

$$k_m=0,\ h_{mi}=0,\ B_{ijkl}=0,\ A_{ijkl}=0,\ C_{ijkl}=C_{ijlk},\ C_{ijkl}=C_{jikl},$$

то моментные напряжения являются нулевыми, а тензор напряжений является симметричным для каждого приближения

$$M_{ij}^{(n)}=0,\ \sigma_{ij}^{(n)}=\sigma_{ji}^{(n)}.$$

Задача об изгибе центрально-симметричной многослойной пластины. В качестве примера рассмотрим частный случай — задачу об изгибе тонкой прямоугольной пластины под действием равномер-

ного давления $p_{\pm}$ и поверхностного момента $m^{(1)}_{2\pm}$. Слои пластины будем полагать изотропными, с наличием центральной-симметрии [28] микрополярных упругих свойств, так что все компоненты тензора $B_{ijkl}=0$ и только следующие компоненты тензоров C_{ijkl} и A_{ijkl} являются ненулевыми [2]

$$\begin{gathered} C_{1111}=C_{2222}=C_{3333}=\lambda+\mu,\ \ C_{1122}=C_{1133}=C_{2233}=\lambda, \\ C_{1212}=C_{1313}=C_{2323}=\mu+\psi,\ \ C_{1221}=C_{1331}=C_{2332}=\mu-\psi, \\ A_{1111}=A_{2222}=A_{3333}=\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}\ ,\ \ A_{1122}=A_{1133}=A_{2233}=\tilde{\lambda}, \\ A_{1212}=A_{1313}=A_{2323}=\tilde{\mu}+\tilde{\psi},\ \ A_{1221}=A_{1331}=A_{2332}=\tilde{\mu}-\tilde{\psi}, \end{gathered} \tag{56}$$

где λ, μ, ψ, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\psi}$ — независимые константы модели микрополярной изотропной среды (различные для каждого слоя, т.е. зависящие от ξ).

Будем также полагать, что слои пластины расположены симметрично относительно $\xi=0$, так что члены вида $<\xi \boldsymbol{F}>=0$ равны нулю, где $\boldsymbol{F}$ — компоненты произвольного тензора, симметричного относительно плоскости $\xi=0$, в частности

$$\bar{N}^{(1)}_{JjKm}=\alpha<N^{(1)}_{JjKm}>=<\xi C^{(0)}_{IjKp}\varepsilon_{m3p}>=0,\ \tilde{N}^{(1)}_{IjKm}=0. \tag{57}$$

Положим также, что все нулевыми являются все функции $m^{(n)}_{i\pm}=0$ за исключением $m^{(1)}_{2\pm}$, а также, что внешних массовых сил и моментов нет: $f_i=0$, $h_{mi}=0$. Тогда согласно (43) имеем: $\bar{F}^e_i=0$, $\bar{\mu}^e_I=0$, $\bar{M}^e_i=0$, $\bar{\mu}^{me}_I=0$.

С учетом сделанных ограничений будем искать решение системы осредненных уравнений (44), (48), (50) и (52) в следующем виде:

$$u^{(0)}_1, u^{(0)}_3, k^{(0)}_2, Q_1, Q^*_1 \,//\, x, \tag{58}$$

где $x_1\equiv x$, а остальные компоненты векторов $u^{(0)}_l$, $k^{(0)}_m$ и Q_2, Q^*_2 полагаем равными нулю.

С учетом всех перечисленных допущений, после подстановки (58) в кинематические соотношения (52), получаем

$$\begin{gathered} \gamma^{(0)}_{11}=u^{(0)}_{1,1},\ \ \gamma^{(0)}_{13}=u^{(0)}_{3,1}+k^{(0)}_2,\ \ \gamma^{(0)}_{22}=\gamma^{(0)}_{23}=\gamma^{(0)}_{12}=\gamma^{(0)}_{21}=0, \\ \varkappa^{(0)}_{12}=k^{(0)}_{2,1},\ \ \text{остальные}\ \ \varkappa^{(0)}_{Ms}=0. \end{gathered} \tag{59}$$

Подставляя (58) в (44), (48) и (50), получаем следующие ненулевые соотношения

$$T_{11}=\bar{C}_{1111}\gamma_{11}^{(0)}-\bar{C}_{11111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)}-\bar{C}_{11113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},\ T_{22}=\bar{C}_{2211}\gamma_{11}^{(0)}-\bar{C}_{22111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)}-\bar{C}_{22113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},$$

$$T_{12}^{m}=\bar{A}_{1212}\varkappa_{12}^{(0)}-\bar{A}_{12112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},\ T_{21}^{m}=\bar{A}_{2112}\varkappa_{12}^{(0)}-\bar{A}_{21112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},$$

$$\mu_{11}=\bar{D}_{1111}\gamma_{11}^{(0)}-\bar{D}_{11111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)}-\bar{D}_{11113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},$$

$$\mu_{22}=\bar{D}_{2211}\gamma_{11}^{(0)}-\bar{D}_{22111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)}-\bar{D}_{22113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)}, \qquad (60)$$

$$\mu_{12}^{m}=\bar{D}_{1212}^{m}\varkappa_{12}^{(0)}-\bar{D}_{12112}^{m(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},\ \mu_{21}^{m}=\bar{D}_{2112}^{m}\varkappa_{12}^{(0)}-\bar{D}_{21112}^{m(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},$$

$$\Delta\mu_{1}=\bar{D}_{1313}\gamma_{13}^{(0)}-\hat{\bar{D}}_{13111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)},$$

$$Q_{2}^{m}=-\bar{\tilde{A}}_{23112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},\ Q_{2}^{m*}=-\bar{A}_{23112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)}.$$

Остальные функции T_{JI}, T_{IJ}^{m}, μ_{Ji}, μ_{JI}^{m}, Q_{1}^{m}, Q_{2}^{m*} в данной задаче равны нулю.

В данной задаче

$$X_{11}^{\{11\}}=C_{3131}^{-1},\ G_{3113}=X_{11}^{\{11\}}C_{3113}=C_{3113}C_{3131}^{-1},\ <G_{3113}>_{\xi}=<C_{3113}C_{3131}^{-1}>_{\xi},$$

$$Z_{131}^{\{11\}}=C_{1331}X_{11}^{\{11\}}=C_{1331}C_{3131}^{-1},\ Z_{113}^{\{11\}}=C_{1133}X_{33}^{\{11\}}=C_{1133}C_{3333}^{-1},$$

$$C_{11113}^{(1)}=C_{1111}^{(0)}<G_{3113}>_{\xi}+Z_{113}^{\{11\}}\{C_{1313}^{(0)}\}_{\xi},$$

$$C_{13111}^{(1)}=C_{1313}^{(0)}<G_{3311}>_{\xi}+Z_{131}^{\{11\}}\{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi},$$

$$\bar{C}_{11113}^{(1)}=\alpha<C_{11113}^{(1)}>=0,\ C_{22113}^{(1)}=C_{2211}^{(0)}<G_{3113}>_{\xi},\ \bar{C}_{22113}^{(1)}=\alpha<C_{22113}^{(1)}>=0,$$

$$\bar{D}_{11113}^{(1)}=\alpha^{2}<\xi C_{1111}^{(0)}<G_{3113}>_{\xi}>,\ \bar{D}_{22113}^{(1)}=\alpha^{2}<\xi C_{2211}^{(0)}<G_{3113}>_{\xi}>,$$

$$C_{13113}^{(1)}=C_{1313}^{(0)}<G_{3113}>_{\xi}+Z_{133}^{\{11\}}\{C_{1313}^{(0)}\}_{\xi}, \qquad (61)$$

$$X_{13}^{\{11\}}=C_{3133}^{-1}=0,\ G_{3111}=X_{13}^{\{11\}}C_{3311}=0,$$

$$C_{11111}^{(1)}=C_{1111}^{(0)}<G_{3111}>_{\xi}=0,\ \bar{D}_{11111}^{(1)}=\alpha^{2}<\xi C_{11111}^{(1)}>=0,$$

$$\bar{D}_{JIMs}=\alpha<\xi C_{JIMs}^{(0)}>=0,\ \bar{D}_{JiMs}^{m}=\alpha<\xi A_{JIMs}^{(0)}>=0,$$

$$C_{1313}^{(0)}=C_{1313}-C_{1331}G_{3113},\ \bar{C}_{1313}=<C_{1313}^{(0)}>,\ \bar{C}_{13111}^{(1)}=\alpha<\{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi}>,$$

$$A_{12112}^{(1)}=A_{1212}^{(0)}<V_{3212}>_{\xi},\ \bar{A}_{12112}^{(1)}=\alpha<A_{12112}^{(1)}>=0,$$

$$A_{23212}^{(1)}=A_{2323}^{(0)}<V_{3312}>_{\xi},\ \bar{A}_{23112}^{(1)}=\alpha<\{A_{1212}^{(0)}\}_{\xi}>,\ \bar{\tilde{A}}_{23112}^{(1)}=\alpha<A_{23112}^{(1)}>=0.$$

Здесь $\bar{C}_{IJ113}^{(1)}=0$ и $\bar{A}_{IJK12}^{(1)}=0$ в силу симметрии пластины относительно $\xi=0$.

Из (60) с учетом (61) получаем

$$T_{11} = \bar{C}_{1111}\gamma_{11}^{(0)},\ T_{22} = \bar{C}_{2211}\gamma_{11}^{(0)},$$

$$T_{12}^{m} = \bar{A}_{1212}\varkappa_{12}^{(0)},\ T_{21}^{m} = \bar{A}_{2112}\varkappa_{12}^{(0)},$$

$$\mu_{11} = -\bar{D}_{11113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},\ \mu_{22} = -\bar{D}_{22113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)}, \qquad (62)$$

$$\mu_{12}^{m} = -\bar{D}_{12112}^{m(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},\ \mu_{21}^{m} = -\bar{D}_{21112}^{m(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},$$

$$\Delta\mu_1 = -\hat{\bar{D}}_{13111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)},\ Q_2^{m} = 0,\ Q_2^{m*} = -\bar{A}_{23112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)}.$$

Подставляя функции (62) в систему (42), находим тождественно ненулевые уравнения этой системы

$$T_{11,1} = 0,\ Q_{1,1} = \Delta\bar{p},\ \mu_{11,1} = Q_1^{*},$$

$$T_{12,1}^{m} + Q_1 - Q_1^{*} = \Delta\bar{m}_2, \qquad (63)$$

$$\mu_{12,1}^{m} - Q_2^{m*} + \Delta\mu_1 = \Delta\bar{m}_2^{m}.$$

Остальные уравнения системы (42) удовлетворяются тождественно, т.к. все члены, входящие в эти уравнения обращаются в ноль.

Подставляя в систему (63) независимые уравнения из (59) и (62)

$$T_{11} = \bar{C}_{1111}\gamma_{11}^{(0)},\ \mu_{11} = -\bar{D}_{11113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},\ \Delta\mu_1 = -\hat{\bar{D}}_{13111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)},$$

$$T_{12}^{m} = \bar{A}_{1212}\varkappa_{12}^{(0)},\ \mu_{12}^{m} = -\bar{D}_{12112}^{m(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)},\ Q_2^{m*} = -\bar{A}_{23112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)}, \qquad (64)$$

$$\gamma_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)},\ \gamma_{13}^{(0)} = u_{3,1}^{(0)} + k_2^{(0)},\ \varkappa_{12}^{(0)} = k_{2,1}^{(0)},$$

получим систему 5-и уравнений относительно 5-х неизвестных функций (58).

Найдем решение этой системы.

Из первых двух уравнений системы (63) находим

$$T_{11} = T_{11}^{0},\ Q_1 = Q_1^{0} + \int_0^x \Delta\bar{p}dx,\ \gamma_{11}^{(0)} = T_{11}^{0} / \bar{C}_{1111}, \qquad (65)$$

где $T_{11}^{0},\ Q_1^{0}$ — константы интегрирования. Тогда из оставшихся уравнений системы (63) получаем

$$\bar{D}_{12112}^{m(1)}\varkappa_{12,11}^{(0)} - \bar{A}_{23112}^{(1)}\varkappa_{12,1}^{(0)} = -\Delta\bar{m}_2^{m},$$

$$\bar{D}_{11113}^{(1)}\gamma_{13,11}^{(0)} = \Delta\bar{m}_2 - Q_1 - \bar{A}_{1212}\varkappa_{12,1}^{(0)}, \qquad (66)$$

$$Q_1^{*} = Q_1 - \Delta\bar{m}_2 + \bar{A}_{1212}\varkappa_{12,1}^{(0)},$$

3 уравнения для определения 3-х функций $\varkappa_{12}^{(0)}$, $\gamma_{13}^{(0)}$ и Q_1^*, здесь учтено, что в силу (65) $\Delta\mu_1 = 0$.

Решая систему (66) относительно $\varkappa_{12}^{(0)}$ и $\varkappa_{13}^{(0)}$, получаем решение в явной форме, например, для случая $\Delta\bar{m}_2^m = const$, $\Delta\bar{m}_2 = const$, $\Delta\bar{p} = const$:

$$\varkappa_{12}^{(0)} = C_0 e^{A_0 x} + A_1 \Delta\bar{m}_2^m x + \varkappa_0, \quad A_0 = \bar{A}_{23112}^{(1)} / \bar{D}_{12112}^{m(1)}, \quad A_1 = 1/\bar{A}_{23112}^{(1)},$$
$$\gamma_{13}^{(0)} = \frac{1}{\bar{D}_{11113}^{(1)}}\left(-\frac{\Delta\bar{p}x^3}{6} + \frac{x^2}{2}(\Delta\bar{m}_2 - \bar{A}_{1212}A_1\Delta\bar{m}_2^m - Q_1^0) - C_0\bar{A}_{1212}A_0 e^{A_0 x}\right) + \tag{67}$$
$$+C_1 x + C_2,$$

где C_0, C_1, C_2, $\varkappa_0$ — константы интегрирования.

Из последних 3-х уравнений в (64) находим $u_1^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, $k_2^{(0)}$

$$u_1^{(0)} = xT_{11}^0 / \bar{C}_{1111} + u_0,$$
$$k_2^{(0)} = \frac{C_0}{A_0}e^{A_0 x} + A_1\Delta\bar{m}_2^m\frac{x^2}{2} + \varkappa_0 x + C_3,$$
$$u_3^{(0)} = -\frac{\Delta\bar{p}x^4}{24\bar{D}_{11113}^{(1)}} + \left(\frac{\Delta\bar{m}_2 - Q_1^0}{\bar{D}_{11113}^{(1)}} - (1+\frac{\bar{A}_{1212}}{\bar{D}_{11113}^{(1)}})A_1\Delta\bar{m}_2^m\right)\frac{x^3}{6} + \tag{68}$$
$$+\left(\frac{C_1}{\bar{D}_{11113}^{(1)}} - \varkappa_0\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{C_2}{\bar{D}_{11113}^{(1)}} - C_3\right)x + C_4\left(\frac{\bar{A}_{1212}}{\bar{D}_{11113}^{(1)}} + 1\right)\frac{C_0}{A_0}e^{A_0 x},$$

где C_3, C_4 — константы интегрирования.

Для нахождения 9 констант интегрирования u_0, $\varkappa_0$, T_{11}^0, Q_1^0, C_0 ,…, C_4 присоединим к системе (63), (64) следующие граничные условия:

$$x = 0:\ u_3^{(0)} = 0, u_1^{(0)} = 0,\ \mu_{11} = 0,\ k_2^{(0)} = 0,\ \varkappa_{12}^{(0)} = 0,$$
$$x = 1:\ u_3^{(0)} = 0,\ T_{11} = 0,\ \mu_{11} = 0,\ \mu_{11} = 0,\ k_2^{(0)} = 0, \tag{69}$$

Вычислим теперь напряжения в слоях. Для этого подставим решение (58), (59) в соотношения (54), тогда получим

$$\sigma_{11} = C_{1111}^{(0)}\gamma_{11}^{(0)} - \alpha C_{11113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},$$
$$\sigma_{22} = C_{2211}^{(0)}\gamma_{11}^{(0)} - \alpha C_{22113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)},$$
$$\sigma_{13} = C_{1313}^{(0)}\gamma_{13}^{(0)} - \alpha C_{13113}^{(1)}\gamma_{13,1}^{(0)} - \alpha C_{13111}^{(1)}\gamma_{11,1}^{(0)} + \alpha^2 C_{131113}^{(2)}\gamma_{13,11}^{(0)}, \tag{70}$$
$$\sigma_{31} = -\alpha\{C_{1111}^{(0)}\}_\xi\gamma_{11,1}^{(0)} + \alpha^2\{C_{11113}^{(1)}\}_\xi\gamma_{13,11}^{(0)},$$
$$\sigma_{33} = -\alpha^3((p_- + \Delta p(\xi + 0.5)) + \{C_{131113}^{(2)}\}_\xi\gamma_{13,111}^{(0)}),$$

где

$$C^{(2)}_{131113} = -C^{(0)}_{1313} < G_{3311} < G_{3113} >_\xi >_\xi - \\ -C^{(0)}_{1313} < X^{\{11\}}_{33}\{C^{(0)}_{1313}\}_\xi >_\xi + Z^{\{11\}}_{131}\{C^{(1)}_{11113}\}_\xi . \qquad (71)$$

6. Пример численных расчетов. Для численных расчетов рассмотрим частный случай, когда $\Delta\bar{m}_2 = 0$ и $\Delta\bar{m}^m_2 = 0$. В этом случае из выражений (68) с условиями (69) следует, что компонента вектора поворота $k^{(0)}_2$ и перемещение $u^{(0)}_1$ равны нулю во всей пластине:

$$k^{(0)}_2 = 0,\ u^{(0)}_1 = 0,\ u^{(0)}_3 = -\frac{\Delta\bar{p}}{24\bar{D}^{(1)}_{11113}}\left(x^4 - 2x^3 + x\right),\ \gamma^{(0)}_{11} = 0. \qquad (72)$$

Моментные напряжения в данном случае отсутствуют $M_{ij} = 0$, но напряжения σ_{ij} остаются несимметричными из-за несимметрии компонент тензора модулей упругости: C_{ijkl} по 1 и 2, а также по 3 и 4 индексам. Для изотропных сред в данной задаче эта несимметрия сводится к существованию 3-х различных модулей сдвига C_{1313}, $C_{1331} = C_{3113}$ и C_{3131}. Сделаем еще одно допущение

$$C_{1331} = C_{3113} = \sqrt{C_{1313}C_{3131}}. \qquad (73)$$

Тогда имеется только 2 независимых модуля сдвига C_{1313} и C_{3131}, а из выражений (60) следует, что

$$C^{(0)}_{1313} = C_{1313} - C_{1331}G_{3113} = C_{1313} - C^{-1}_{3131}G^2_{3113} = 0,\ C^{(1)}_{13113} = 0, \\ C^{(2)}_{131113} = Z^{\{11\}}_{131}\{C^{(1)}_{11113}\}_\xi = C_{1331}C^{-1}_{3131}\{C^{(0)}_{1111} < C_{3113}C^{-1}_{3131} >_\xi\}_\xi, \\ C^{(1)}_{11113} = C^{(0)}_{1111} < C_{3113}C^{-1}_{3131} >_\xi,\ \ C^{(1)}_{22113} = C^{(0)}_{2211} < C_{3113}C^{-1}_{3131} >_\xi, \\ \bar{D}^{(1)}_{11113} = \alpha^2 < \xi C^{(0)}_{1111} < C_{3113}C^{-1}_{3131} >_\xi > . \qquad (74)$$

Выражения (70) с учетом (72) - (74) принимают следующий вид

$$\sigma_{11} = -\alpha C^{(1)}_{11113}\gamma^{(0)}_{13,1},\ \sigma_{22} = -\alpha C^{(1)}_{22113}\gamma^{(0)}_{13,1}, \\ \sigma_{13} = \alpha^2 C^{(2)}_{131113}\gamma^{(0)}_{13,11},\ \sigma_{31} = \alpha^2\{C^{(1)}_{11113}\}_\xi\gamma^{(0)}_{13,11}, \\ \sigma_{33} = -\alpha^3((p_- + \Delta p(\xi + 0.5)) + \{C^{(2)}_{131113}\}_\xi\gamma^{(0)}_{13,111}), \qquad (75)$$

$$\gamma^{(0)}_{13,1} = -\frac{\Delta\bar{p}}{2\bar{D}^{(1)}_{11113}}x(x-1),\ \gamma^{(0)}_{13,11} = -\frac{\Delta\bar{p}}{2\bar{D}^{(1)}_{11113}}(2x-1),\ \gamma^{(0)}_{13,111} = -\frac{\Delta\bar{p}}{\bar{D}^{(1)}_{11113}}.$$

Численные расчеты проводились для прогиба и тензора напряжений в случае однослойной пластины из ортотропного материала в виде

модельного стеклопластика при следующих значениях компонент тензора модулей упругости:

$$C_{1111} = C_{2222} = 30\ ГПа,\ C_{3333} = 3\ ГПа,\ C_{1122} = 3\ ГПа,$$
$$C_{1133} = C_{2233} = 4\ ГПа,\ C_{1313} = 8\ ГПа,\ C_{3131} = 6\ ГПа. \tag{76}$$

Различие в последних двух константах появляется из-за влияния моментной теории. Параметр α был принят равным 0,04. Зададим давление на внешнюю поверхность пластины $\tilde{p}_+ = 10^5\ Па$, а внутреннюю поверхность оставим свободной ($\tilde{p}_- = 0$), тогда $\Delta p = \dfrac{\Delta\tilde{p}}{\alpha^3} = 1.562\ ГПа$.

С учетом того, что пластина однослойная, формула для прогиба в (72) упрощается:

$$u_3^{(0)} = -\frac{\Delta p C_{3131}}{2C_{1111}^{(0)} C_{3113}}\left(x^4 - 2x^3 + x\right). \tag{77}$$

Формула (77) отличается от формулы для прогиба в классической теории наличием члена $\dfrac{C_{3131}}{C_{3113}}$. Это отличие моментной теории от классической появляется вследствие несимметричности тензора модулей упругости в моментной теории. Для классической, симметричной теории упругости этот член равен единице. Графики зависимости прогиба $u_3^{(0)}$ от продольной координаты x в моментной и классической теориях показаны на рис. 1. Графики имеют одну и ту же форму, но значения прогиба в моментной теории меньше по модулю, чем в классической теории, на всей области определения.

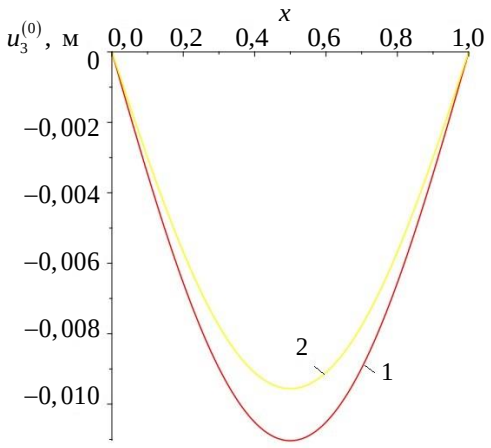
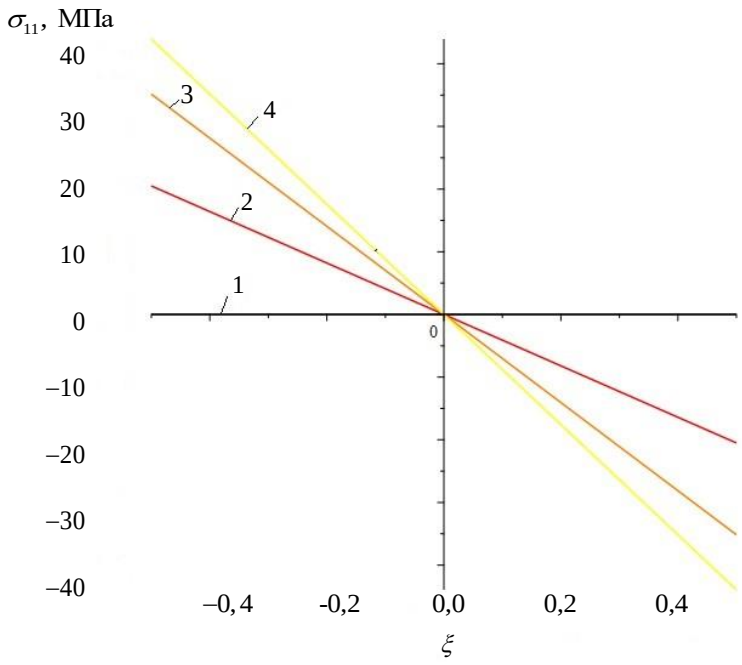
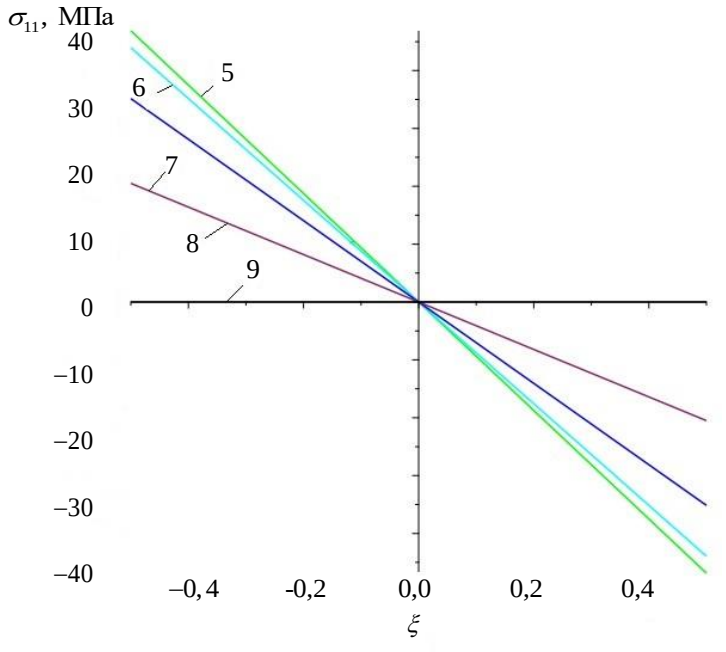


Рис 1. Графики зависимости прогиба $u_3^{(0)}$ от продольной координаты x (1 — классическая теория, 2 — моментная теория)



а



б

Рис. 2. Графики зависимости изгибного напряжения σ_{11} от ξ при различных значениях x (1 — $x=0$, 2 — $x=0{,}125$, 3 — $x=0{,}25$, 4 — $x=0{,}375$, 5 — $x=0{,}5$, 6 — $x=0{,}625$, 7 — $x=0{,}75$, 8 — $x=0{,}875$, 8 — $x=1$)

Формулы (73) для изгибных и поперечных напряжений для однослойной пластины имеют следующий вид:

$$\sigma_{11} = 6\frac{\Delta\tilde{p}}{\alpha^2}\xi(x^2 - x) \text{ и } \sigma_{22} = 6\frac{\Delta\tilde{p}}{\alpha^2}\frac{C^{(0)}_{2211}}{C^{(0)}_{1111}}\xi(x^2 - x). \quad (78)$$

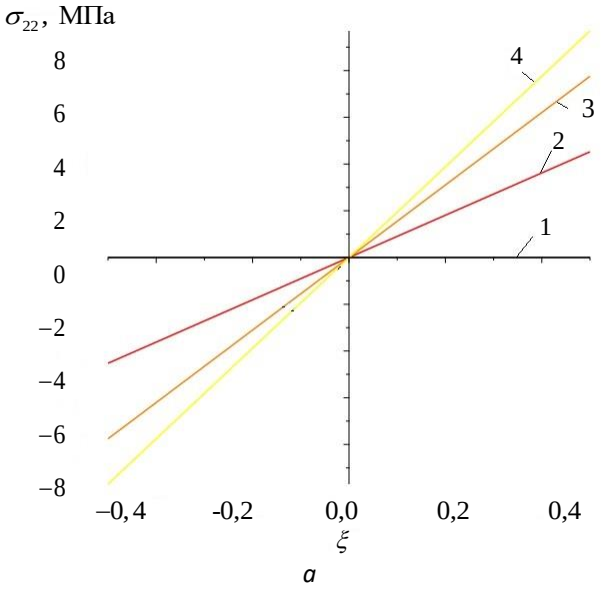
Графики этих напряжений в зависимости от толщинной координаты ξ при различных значениях продольной координаты x показаны на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

Изгибные напряжения имеют линейную зависимость от толщинной координаты, равны нулю на срединной поверхности пластины и достигают свои минимальные и максимальные значения на внутренней и внешней поверхностях соответственно. Эти результаты совпадают с результатами для классической теории, так как отсутствует какая-либо зависимость от констант моментной теории.

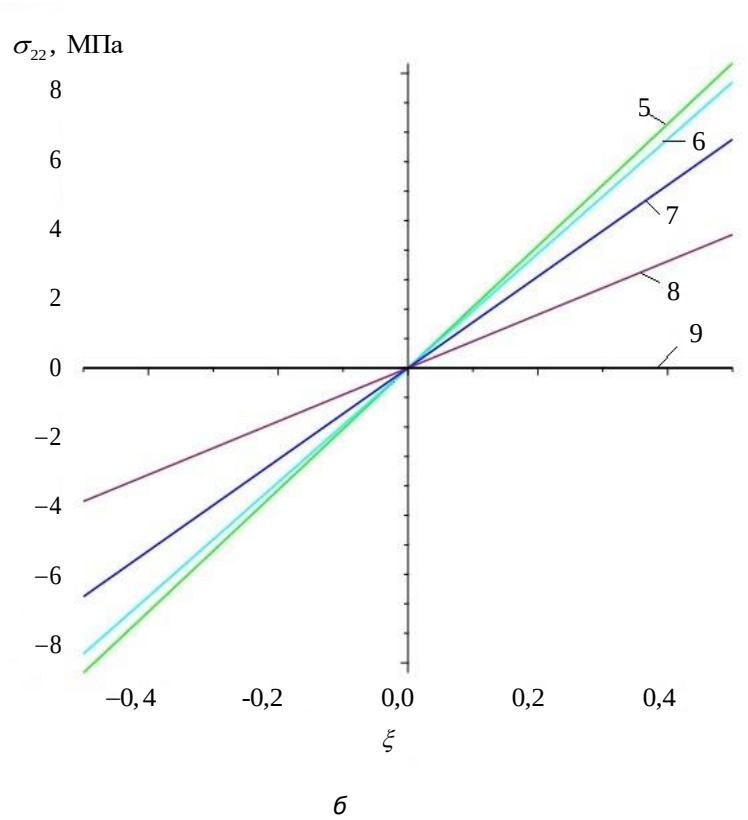
Напряжения межслойного сдвига σ_{31} и σ_{13} согласно формулам (74) для однослойной пластины принимают следующий вид:

$$\sigma_{31} = 6\frac{\Delta\tilde{p}}{\alpha}\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right), \ \sigma_{13} = 6\frac{\Delta\tilde{p}}{\alpha}\frac{C_{1331}}{C_{3131}}\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right). \quad (79)$$

Графики зависимости напряжения σ_{31} от толщинной координаты ξ при различных значениях продольной координаты показаны на рис. 4. Это напряжение имеет квадратичную зависимость от локальной координаты и линейную от глобальной координаты, равно нулю на внутренней и внешней поверхностях пластины и достигает экстремума на срединной поверхности пластины. Как и в случае изгибных напряжений, эти напряжения совпадают с классической теорией.



а

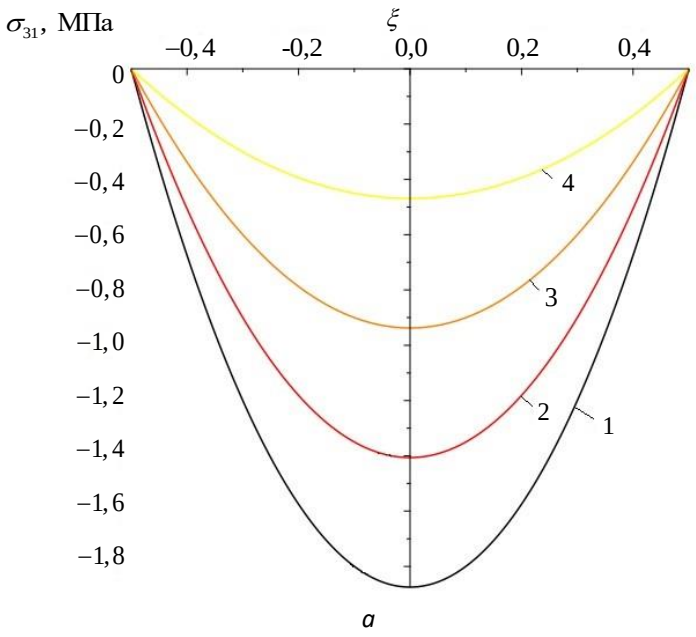


б

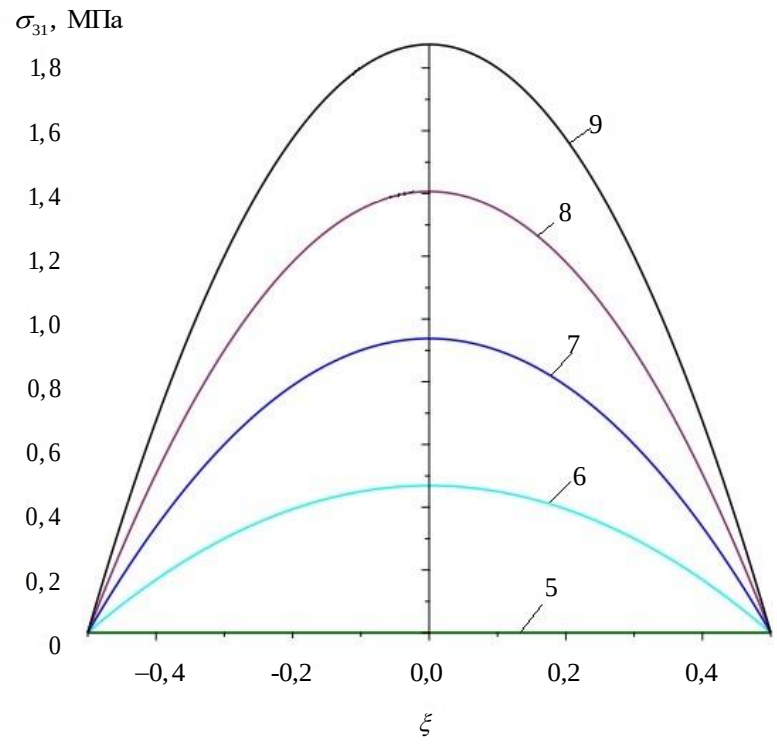
Рис. 3. Графики зависимости изгибного напряжения σ_{22} от ξ при различных значениях x (1 — $x=0$, 2 — $x=0{,}125$, 3 — $x=0{,}25$, 4 — $x=0{,}375$, 5 — $x=0{,}5$, 6 — $x=0{,}625$, 7 — $x=0{,}75$, 8 — $x=0{,}875$, 9 — $x=1$)

Для напряжения σ_{13} подобно прогибу $u_3^{(0)}$ наблюдается отличие моментной теории от классической теории, которое обусловлено несимметрией модулей упругости, поскольку $C_{3131} \neq C_{1331}$. Для классической теории симметричной упругости $C_{3131} = C_{1331}$ и из (78) следует, что напряжения межслойного сдвига совпадают: $\sigma_{31} = \sigma_{13}$

Графики зависимости напряжения межслойного сдвига σ_{13} от толщинной координаты ξ при различных значениях продольной изображены на рис. 5, а различия для данной компоненты тензора напряжений с классической теорией наглядно показаны на рис. 6 (в виде сравнения графиков этой компоненты в классической и моментной теориях при одном и том же значении продольной координаты $x=0{,}125$). Эти графики в целом повторяют очертания таковых для классической теории и совпадают в точках $\xi=-0.5$ и $\xi=0.5$, но экстремум компоненты σ_{13} в моментной теории больше по модулю, чем в классической.

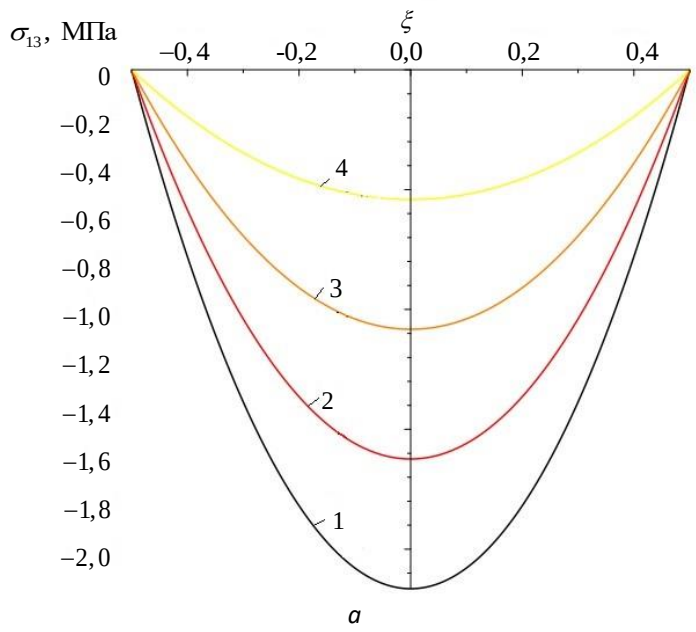


а

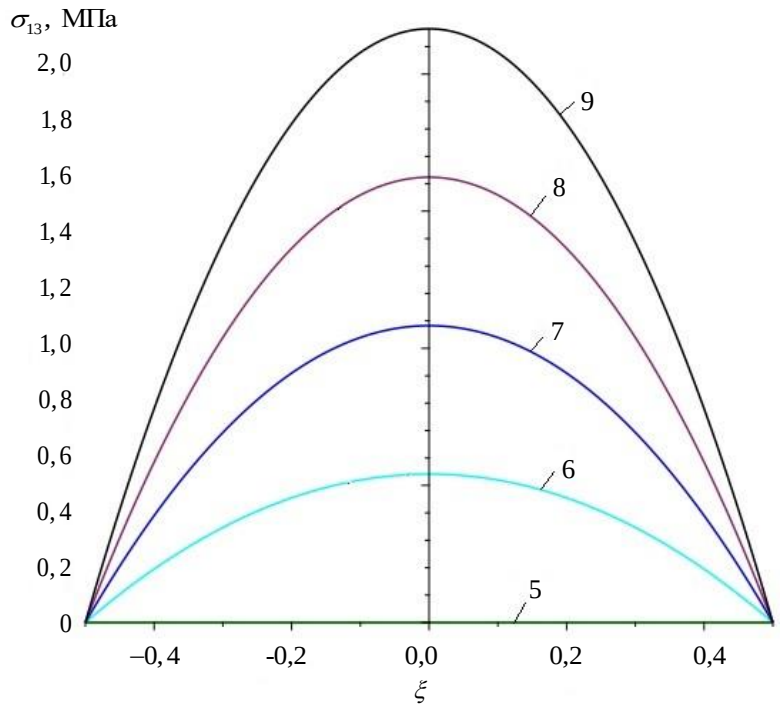


б

Рис. 4. Совместные графики зависимости напряжений межслойного сдвига σ_{31} от ξ при различных значениях x (1 — $x=0$, 2 — $x=0{,}125$, 3 — $x=0{,}25$, 4 — $x=0{,}375$, 5 — $x=0{,}5$, 6 — $x=0{,}625$, 7 — $x=0{,}75$, 8 — $x=0{,}875$, 9 — $x=1$)



а



б

Рис. 5. Совместные графики зависимости напряжений межслойного сдвига σ_{13} от ξ при различных значениях x (1 — $x=0$, 2 — $x=0{,}125$, 3 — $x=0{,}25$, 4 — $x=0{,}375$, 5 — $x=0{,}5$, 6 — $x=0{,}625$, 7 — $x=0{,}75$,

8 — $x = 0{,}875$, 9 — $x = 1$)

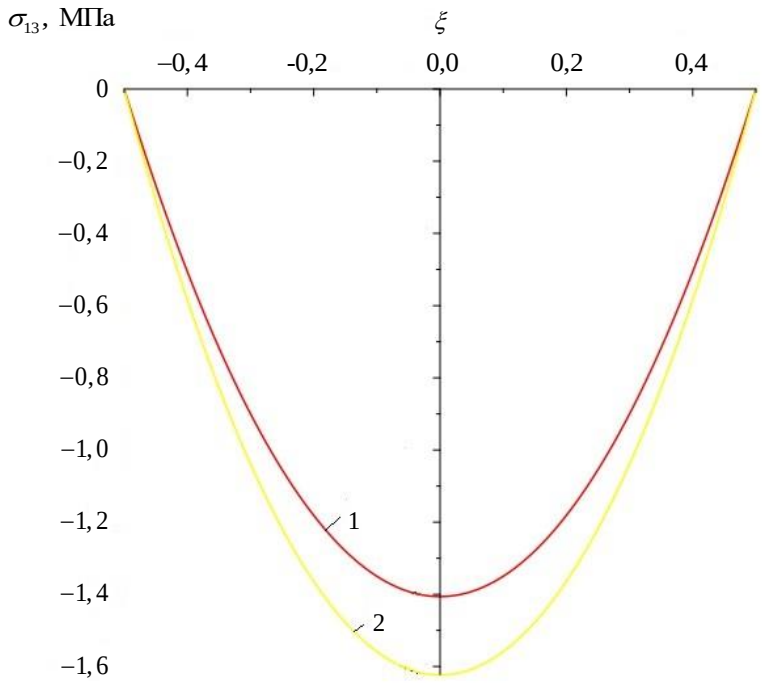


Рис. 6. Совместные графики зависимости напряжений межслойного сдвига σ_{13} от ξ для классической и моментной теорий при $x = 0{,}125$ (1 — классическая теория, 2 — моментная теория)

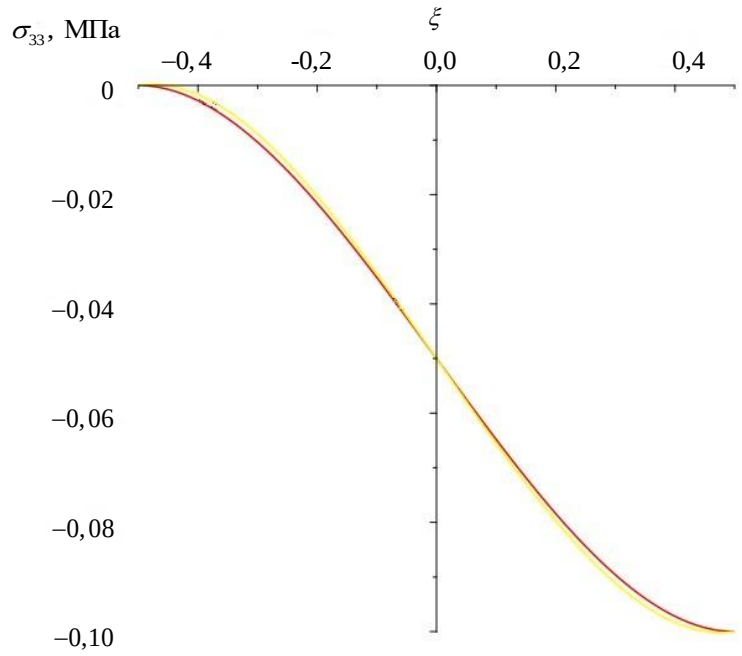


Рис. 7. Совместные графики зависимости напряжений межслойного сдвига

σ_{33} от ξ для классической и моментной теорий при $x = 0{,}125$
(1 — классическая теория, 2 — моментная теория)

Поперечное напряжение σ_{33} (последняя формула в (70)) не зависит от продольной координаты и имеет кубическую зависимость от толщинной координаты ξ. Оно также отличается от соответствующего напряжения в классической теории, так как в выражение для σ_{33} входят разные модули сдвига C_{1313} и C_{3131}. Графики напряжения σ_{33} для моментной и классической теориях показаны на рис. 7. Графики совпадают при $\xi = -0.5$, $\xi = 0$ и $\xi = 0.5$, но при этом при $\xi \in (-0.5;0)$ значения σ_{33} в моментной теории меньше по модулю, чем в классической, а при $\xi \in (0;0.5)$ – наоборот.

Заключение.

1. Разработана асимптотическая теория микрополярных упругих многослойных тонких пластин, построенная из общих уравнений трехмерной моментной теории несимметричной упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру – отношению толщины пластины к ее характерной длине.

2. На основе этой теории сформулированы и решены в явном виде локальные задачи моментной теории упругости, получены рекуррентные соотношения для всех компонент тензоров напряжений, моментных напряжений, деформаций, перемещений и поворотов.

Сформулирована замкнутая система осредненных уравнений для теории тонких микрополярных упругих пластин.

Получены явные аналитические выражения для всех 9 компонент тензора напряжений и 9 компонент тензора моментных напряжений в пластине, включая напряжения межслойного сдвига и поперечное напряжение.

3. Рассмотрена задача об изгибе центрально-симметричной шарнирно опертой пластины из изотропных микрополярных материалов под действием равномерно распределенного давления и внешних моментов, получено точное аналитическое решение этой задачи.

4. Проведено численное моделирование для случая однослойной микрополярной пластины при изгибе только внешним давлением. Показано, что из-за несимметрии тензора модулей упругости в данной задаче существуют 2 модуля межслойного сдвига, это приводит к несимметрии касательных напряжений σ_{31} и σ_{13} для моментной теории. Следует отметить, что такое различие часто наблюдается экспериментально для слоистых анизотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.

[2] Новацкий В. *Теория упругости*. Москва, Мир, 1975, 872 с.
[3] Лурье А.И. *Теория упругости*. Москва, Наука, 1970, 940 с.
[4] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. *Теория упругости*. Москва, Наука, 1979, 560 с.
[5] Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. Москва, Изд-во МГУ, 1995, 366 с.
[6] Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. *Теория упругости и пластичности*. Москва, Физматлит, 2002, 416 с.
[7] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[8] Cosserat E., Cosserat F. *Th´eorie des corps d´eformables*. Herman et Fils, Paris, 1909, 226 p.
[9] Truesdell C.A., Toupin R.A. The Classical Field Theories. *Encyclopedia of Physics*, vol. 3, no. 1, 1960, pp. 226-858.
[10] Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theory. Vol. 1. Foundations and Solids*. New York, Springer, 1999, 325 p.
[11] Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua. *Continuum models for materials with micro-structure*, vol. 1, 1995, p. 1-22.
[12] Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of Microplar Mechanics. *Springer Briefs in Applied Sciences and Technology*, 2012, pp. 1-10. DOI:10.1007/978-3-642-28353-6.
[13] Altenbach H., Eremeyev V.A. Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications. *CISM International Centre for Mechanicsl Sciences*, vol. 541, 2013, 388 p.
[14] Nikabadze M., Ulukhanyan A., Sakhvadze G. To the mathematical modeling of deformation of micropolar thin bodies with two small sizes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, art. no. 012040.
[15] Никабадзе М.У. Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек. *Прикладная математика и математическая физика*, 2015, т. 1, № 1, с. 101-118.
[16] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal Solids and Struct*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333-350.
[17] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71-79.
[18] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Scintific Publishing, 2000, 739 p.
[19] Kolpakov A.G. *Stressed composite structures: Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Springer Verlag, 2004, 228 p.
[20] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
[21] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–99.
[22] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
[23] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[24] Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

[25] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I. D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, iss. 145-148, pp. 7211–7220.

[26] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I. D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.

[27] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е., Белькова К.В., Борин Д.М. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 4, с. 3–30.

[28] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.

[29] Димитриенко Ю.И. *Тензорный анализ. Т.1. Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

Статья поступила в редакцию 12.05.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Бойко С.В. Асимптотическая теория многослойных тонких микрополярных упругих пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 2, с. 34–66.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Бойко Сергей Владимирович — магистр кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sboiko1997@gmail.com

Asymptotic theory of thin multilayer micropolar elastic plates

© Yu.I. Dimitrienko, S.V. Boyko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of development of a theory for calculating the stress-strain state of thin multilayer elastic plates in the moment (micropolar) theory, is considered. The solution of this problem is built using an asymptotic analysis of the general equations for a 3-dimensional quasi-static problem of the moment theory of elasticity. The asymptotic analysis is carried out with respect to a small parameter representing the ratio of the plate thickness to its characteristic length. Recurrent formulations of local problems of the moment theory of elasticity are obtained. Explicit analytical solutions are obtained for these problems. The derivation of the averaged system of equations for multilayer plates is presented. It is

shown that the asymptotic theory makes it possible to obtain an explicit analytical expression for all 9 components of the stress tensor and the moment stress tensor (in general) in the plate. As a special case, the problem of calculating the stress-strain state of a centrally symmetrical hingedly fixed plate when bending under the action of a uniformly distributed pressure. A complete analytical solution of this problem for all non-zero components of the stress tensor and the moment stress tensor is obtained. A numerical analysis of the solution of the problem for a single layer plate for the stress tensor is carried out, basing on the obtained expressions. A comparative analysis of the obtained results with similar calculations for the classical theory of elasticity is carried out, with revealing of similarities and differences for all components of the stress tensor.

***Keywords**: asymptotic theory, small parameter, multilayer thin plates, micropolar theory, bending, stress tensor*

REFERENCES

[1] Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti [Mathematical theory of elasticity]*. Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.

[2] Novatsky V. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Mir Publ., 1975, 872 p.

[3] Lurie A.I. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p.

[4] Timoshenko S. P., Goodyear J. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.

[5] Pobedrya B.E. *CHislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]*. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1995, 366 p.

[6] Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Tarlakovsky D.V. *Teoriya uprugosti i plastichnosti [Theory of elasticity and plasticity]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 416 p.

[7] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[8] Cosserat E., Cosserat F. *Th´eorie des corps d´eformables*. Herman et Fils, Paris, 1909, 226 p.

[9] Truesdell C.A., Toupin R.A. The Classical Field Theories. *Encyclopedia of Physics*, vol. 3, no. 1, 1960, pp. 226-858.

[10] Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theory. Vol. 1. Foundations and Solids*. New York, Springer, 1999, 325 p.

[11] Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua. *Continuum models for materials with micro-structure*, vol. 1, 1995, p. 1-22.

[12] Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of Microplar Mechanics. *Springer Briefs in Applied Sciences and Technology*, 2012, pp. 1-10. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.

[13] Altenbach H., Eremeyev V.A. Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications. *CISM International Centre for Mechanicsl Sciences*, vol. 541, 2013, 388 p.

[14] Nikabadze M., Ulukhanyan A., Sakhvadze G. To the mathematical modeling of deformation of micropolar thin bodies with two small sizes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, art. no. 012040.

[15] Nikabadze M.U. Nekotorye varianty uravnenij mikropolyarnyh teorij obolochek [Some versions of the equations of micropolar shell theories]. *Prikladnaya matematika i matematicheskaya fizika [Applied Mathematics and Mathematical Physics]*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 101-118.

[16] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal Solids and Struct*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333-350.
[17] Shenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross–sections. *Mechanics*, 2006, vol. 6, iss. 6, pp. 71-79.
[18] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Scintific Publishing, 2000, 739 p.
[19] Kolpakov A.G. *Stressed composite structures: Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Springer Verlag, 2004, 228 p.
[20] Nazarov S.A., Sweers G.H., Slutskij A.S. omogenization of a thin plate reinforced with periodic families of rigid rods. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, iss. 8, pp. 1127–1168.
[21] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–99.
[22] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. The asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2015, vol. 6, iss. 1, pp. 13–51.
[23] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
[24] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.
[25] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I. D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, iss. 145-148, pp. 7211–7220.
[26] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I. D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.
[27] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E., Bel'kova K.V., Borin D.M. Modeling of thermal stresses in composite shells based on asymptotic theory. Part 2. Calculation of cylindrical shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 4, pp. 3–30.
[28] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]*. Moscow, Higher School Publ., 2001, 576 p.
[29] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis*. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Boyko S.V., Student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sboiko1997@gmail.com