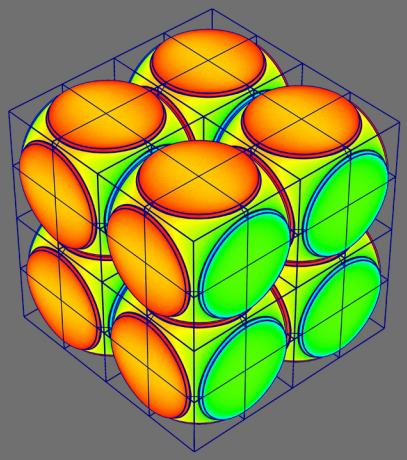
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Темис Ю.М., Зиятдинов И.З. Новый метод вычисления жесткости на кручение в модели естественно-закрученного стержня. Математическое моделирование и численные методы, 2023, No 1, с. 64–80

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/302/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 15:07:07

УДК 624.04 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-6480

Новый метод вычисления жесткости на кручение в модели естественно-закрученного стержня

© Ю.М. Темис[1,2], И.З. Зиятдинов[1]

[1]ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова», Москва, 111116, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На начальных этапах проектирования лопаток компрессоров, винтов, режущих инструментов целесообразно применение конечно-элементной модели, основанной на модели естественно закрученного стержня. Эта модель позволяет учесть влияние угла естественной закрутки на жесткость детали. Жесткость на кручение стержня существенно влияет на параметры жесткости конечно-элементной модели. Показано, что поправка жёсткости на кручение, полученная на основе соотношений технической теории естественно закрученных стержней, позволяет при небольших углах естественной закрутки получать результаты, хорошо согласующиеся с трёхмерным расчётом закрученного стержня МКЭ. При больших удельных углах начальной крутки, техническая теория даёт завышенные значения жесткости на кручение. В статье предложна модификация соотношений технической теории для определения жесткости на кручение с учетом больших углов начальной крутки.

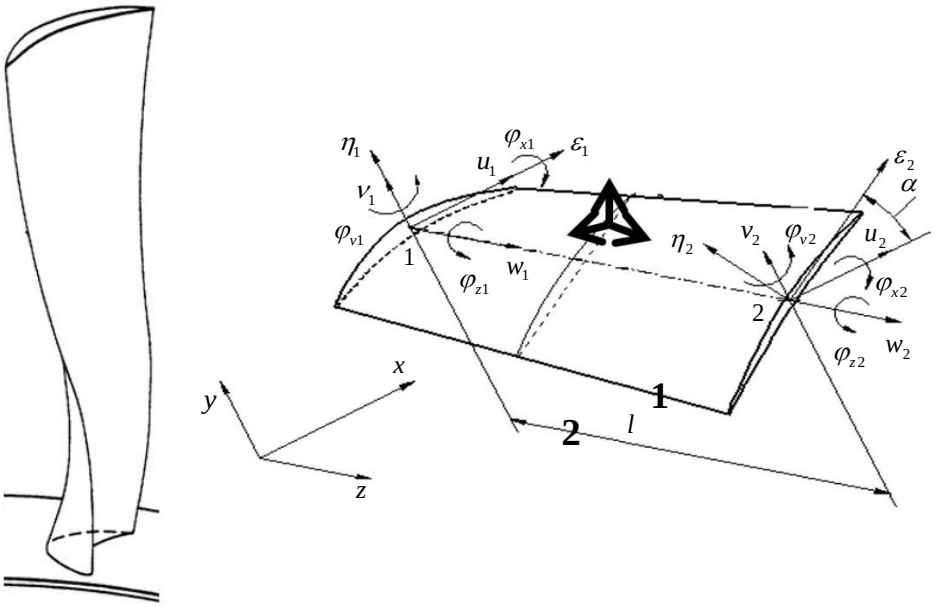
Ключевые слова: *стержневые модели, жёсткость на кручение, техническая теория естественно закрученных стержней*

Введение. Стержневые модели актуальны при проектировании трехмерных конструкций, в которых один характерный размер превалирует остальными. Форма конструкции описывается осевой линией, проходящей через выбранные характерные точки сечений стержня (например, центры масс или центры кручения поперечных сечений). Все перемещения точек стержня являются функциями координаты, отложенной вдоль оси стержня. В такой постановке стержневые модели со сложными пространственными осевыми линиями различными формами поперечных сечений рассматривались в ряде работ [1–18].

Существующие программные комплексы МКЭ позволяют производить исследование напряженно-деформированного состояния различных стержневых конструкций, в которых эффекты кручения и изгиба развязаны. Это позволяет применять зависимости для жесткости на кручение, основанные на представлениях теории кручения стержней Сен-Венана [3, 4]. Однако, как показано в работах [1, 2] тонкостенные стержни и естественно-закрученные стержни (рис.1) при деформировании проявляют ряд особенностей, которые необходимо учитывать при расчете конструкций МКЭ. Здесь и далее будут сохранены обозначения из работы [1].

К таким стержням относится широкий класс деталей (лопатки

компрессоров и турбин, винты, стержни реакторов, теплообменники, режущие инструменты и т.д.). Главной особенностью естественно закрученных стержней является связь кручения с изгибом и растяжением. Существенным для модели закрученного стержня является точность определение крутильной жёсткости.



а *б*

Рис. 1. Естественно закрученный стержень:
а — лопатка компрессора, моделируемая естественно закрученным стержнем; *б* — конечный элемент естественно закрученного стержня [1]

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Рассмотрим призматический стержень ось, которого совпадает с осью z декартовой системы координат. Оси x, y параллельны главным осям поперечных сечений стержня. Контуры поперечных сечений стержня (сечения с $z = \text{const}$) описываются уравнением $f(x, y) = 0$.

Связь удельного угла крутки $\frac{d\varphi_z}{dz}$ с приложенным крутящим моментом M при чистом кручении описывается формулой

$$M = K_{кр} \frac{d\varphi_z}{dz} = GJ_{кр} \frac{d\varphi_z}{dz}, \qquad (1)$$

где G — модуль сдвига материала, а $J_{кр}$ — геометрическая жёсткость на кручение, φ_z — угол закрутки относительно оси z (рис. 1*б*).

В задаче Сен-Венана о чистом кручении стержня

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$, а перемещения имеют вид $u = -\dfrac{d\varphi_z}{dz} zy$, $v = \dfrac{d\varphi_z}{dz} zx$, $w = \dfrac{d\varphi_z}{dz} \Phi(x, y)$, где $\Phi(x, y)$ — функция депланации поперечного сечения.

Определение напряженно-деформированного состояния стержня и его жесткости при кручении может быть сведено к решению уравнений Пуассона [19], записанных как для неизвестной функции депланации $\Phi(x, y)$, или для функции напряжений F, такой что

$$\tau_{xz} = G \frac{d\varphi_z}{dz} \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\tau_{yz} = -G \frac{d\varphi_z}{dz} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Жёсткость на кручение сечения $J_{кр}$ определяют [19,20]:

- через функцию депланации

$$J_{кр} = \int_S \left(x\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \right) dS; \qquad (2)$$

- или функцию напряжений

$$J_{кр} = \left[2\int_S F dS + \sum_{i=1}^{N} C_i S_i \right], \qquad (3)$$

где S_i — площадь, ограниченная *i*-м внутренним контуром, а C_i — значение *F* на *i*-том контуре многосвязного сечения.

Для определения жесткости на кручение призматического стержня $J_{кр}$ в работах [1, 19, 20] предложены алгоритмы решения задачи о чистом кручении методом граничных элементов через определение функции депланации или функции напряжений.

Если влияние стеснённости кручения или естественной крутки стержня несущественно, ось стержня может быть выбрана произвольно, и за неё удобно принять ось центров масс поперечных сечений. Для тонкостенных стержней и естественно закрученных стержней за ось стержня удобнее брать ось центров кручения [3] поперечных сечений стержня. В работах [19, 20] предложен алгоритм для определения центра кручения произвольного многосвязного сечения.

Для описания формы естественно закрученного стержня введем винтовую систему координат (рис. 1*б*), связанную с декартовой системой зависимостями

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos(\alpha_0\zeta) - \eta\sin(\alpha_0\zeta), \\ y &= \xi\sin(\alpha_0\zeta) + \eta\cos(\alpha_0\zeta), \\ z &= \zeta. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь α_0 — начальная крутка, а ξ, η — главные локальные координаты поперечного сечения на расстоянии ζ от торцевого сечения. Точки с совпадающими координатами ξ и η в разных сечениях ζ образуют винтовые линии. Уравнение $f(\xi,\eta)=0$ описывает контуры поперечных сечений.

Производные в двух системах координат связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\alpha_0\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi} - \sin(\alpha_0\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin(\alpha_0\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos(\alpha_0\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial\zeta} + \alpha_0\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Для краткости, аналогично [2], в выражении для производной $\frac{\partial}{\partial z}$ введём обозначение

$$\frac{\partial}{\partial\psi} = \left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right). \tag{6}$$

Тензоры напряжений в локальных координатах сечения и глобальных координатах связанны следующим образом

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = T\cdot\begin{bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} & \tau_{\xi z} \\ \tau_{\eta\xi} & \sigma_\eta & \tau_{\eta z} \\ \tau_{z\xi} & \tau_{z\eta} & \sigma_z \end{bmatrix}\cdot T^T, \tag{7}$$

где матрица поворота

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_0\zeta) & -\sin(\alpha_0\zeta) & 0 \\ \sin(\alpha_0\zeta) & \cos(\alpha_0\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи о кручения естественно закрученного стержня методами теории упругости для случая малой начальной крутки получил П.М. Риз [6]. Для малой начальной крутки касательные напряжения $\tau_{\xi z}$, $\tau_{\eta z}$ и деформации $\gamma_{\xi z}$, $\gamma_{\eta z}$ с точностью до α_0

совпадают с касательными напряжениями кручения призматического стержня, однако, помимо депланации и поворота поперечных сечений, также деформируются контуры поперечных сечений и все компоненты тензоров напряжений и деформаций отличны от нуля [6].

Гипотеза о недеформируемых контурах. Для практических расчётов разработаны различные варианты [1, 2, 5] приближённых технических теорий естественно закрученных стержней. В этой работе за основу принимается вариант технической теории, представленный в работах [1, 2]. Значимыми принимаются напряжения σ_z, $\tau_{\xi z}$, $\tau_{\eta z}$ и деформации ε_z, $\gamma_{\xi z}$, $\gamma_{\eta z}$, остальными напряжениями и деформациями пренебрегают. Область применимости этой гипотезы исследована в настоящей работе трёхмерными расчётами МКЭ.

Так как деформации контура поперечного сечения достаточно малы и имеют различные значения в разных точках сечения, то за критерий применимости гипотезы была принята ошибка в определении потенциальной энергии деформации модели, вырезанной из закрученного стержня. Рассмотрены варианты параметризированных конечно-элементных моделей стержней одинаковой длины с вытянутыми прямоугольными и эллиптическими поперечными сечениями (рис. 2). Углы начальной крутки моделей подбирались таким образом, чтобы безразмерный параметр $(\alpha_0 R)^2$, где $2R$ — максимальный размер сечения (рис. 2), изменялся от 0 до 0,6 с шагом 0,1. Определялась погрешность потенциальной энергии деформации Δ

$$\Delta = \int_S \left(U_i^* - U_i\right) dS \Big/ \int_S U_i dS, \tag{8}$$

где S — площадь сечения,

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\sigma_\xi \varepsilon_\xi + \sigma_\eta \varepsilon_\eta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{\xi\eta}\gamma_{\xi\eta} + \tau_{\xi z}\gamma_{\xi z} + \tau_{\eta z}\gamma_{\eta z}\right)$$

— точное выражение для плотности потенциальной энергии, а

$$U_i^* = \frac{1}{2}\left(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{\xi z}\gamma_{\xi z} + \tau_{\eta z}\gamma_{\eta z}\right)$$

— приближённое выражение с применением гипотезы о деформациях и напряжениях неизменяемого сечения.

Из результатов, представленных на (рис. 2) видно, что для значений $(\alpha_0 R)^2$ вплоть до 0,3 модуль погрешности, при пренебрежении деформациями контуров сечений, не превышает 0,5 %. Для малых $(\alpha_0 R)^2$ пренебрежение плоскими деформациями и напряжениями даёт заниженное значение потенциальной энергии деформаций

поперечного сечения, а для больших значений параметра завышенное. Это связано с тем, что при малых $(\alpha_0 R)^2$ вклад деформаций контура сечения несущественен, а для больших значений этого параметра применение гипотезы равносильно дополнительному закреплению контура сечения.

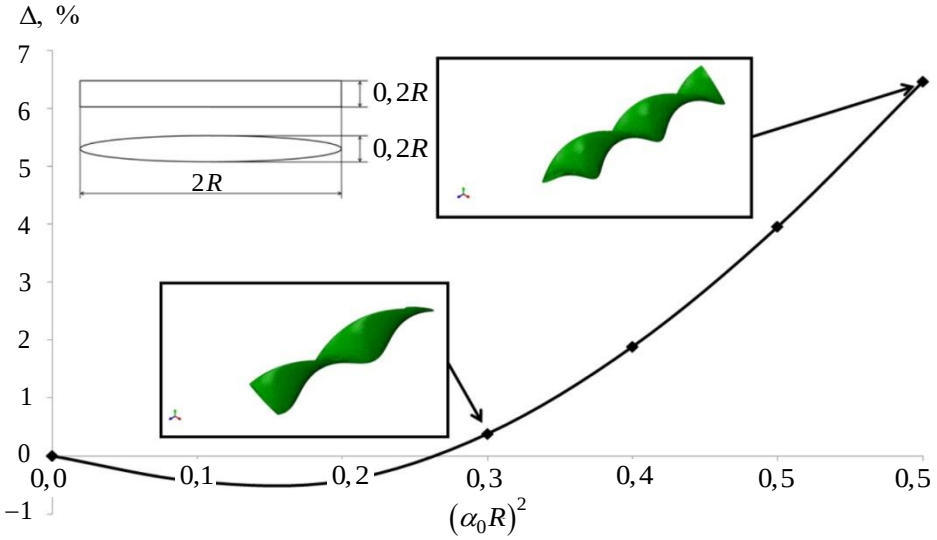


Рис. 2. Оценка применимости гипотезы о недеформируемых контурах поперечных сечений

Из результатов, представленных на (рис. 2*б*) видно, что для значений $(\alpha_0 R)^2$ вплоть до 0,3 модуль погрешности, при пренебрежении деформациями контуров сечений, не превышает 0,5 %. Для малых $(\alpha_0 R)^2$ пренебрежение плоскими деформациями и напряжениями даёт заниженное значение потенциальной энергии деформаций поперечного сечения, а для больших значений параметра завышенное. Это связано с тем, что при малых $(\alpha_0 R)^2$ вклад деформаций контура сечения несущественен, а для больших значений этого параметра применение гипотезы равносильно дополнительному закреплению контура сечения.

Техническая теория естественно закрученных стержней. Выражения для деформаций в технической теории естественно закрученных стержней [1, 2] имеют вид

$$\varepsilon_z = \frac{dw_0}{dz} - x\frac{d^2u_0}{dz^2} - y\frac{d^2v_0}{dz^2} + \frac{d\varphi_z}{dz}\alpha_0\frac{\partial\Phi}{\partial\psi},$$

$$\gamma_{\xi z} = \frac{d\varphi_z}{dz}\frac{\partial F}{\partial\eta},$$

$$\gamma_{\eta z} = -\frac{d\varphi_z}{dz}\frac{\partial F}{\partial \xi}, \qquad \varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta = \gamma_{\xi\eta} = 0, \tag{9}$$

где u_0, v_0, w_0 — перемещения центров кручения поперечных сечений.

Оценим влияние начальной крутки на деформации стержня. При чистом кручении на торцах стержня выполняется условие

$$\int_S \sigma_z dS = 0. \tag{10}$$

С учётом выражения для деформации ε_z

$$\begin{aligned} E\int_S \left(\frac{dw_0}{dz} - x\frac{d^2u_0}{dz^2} - y\frac{d^2v_0}{dz^2} + \frac{d\varphi_z}{dz}\alpha_0\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right) dS = \\ = E\left(S\frac{dw_0}{dz} - S_y\frac{d^2u_0}{dz^2} - \right. \\ \left. -S_x\frac{d^2v_0}{dz^2} + \frac{d\varphi_z}{dz}\alpha_0\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где S_y, S_x — статические моменты поперечного сечения, которые не равны нулю в случае несовпадения центров кручения и масс поперечного сечения. Так как в наиболее простом случае симметричного поперечного сечения статические моменты равны нулю, то из (11) следует

$$\frac{dw_0}{dz} = -\frac{1}{S}\frac{d\varphi_z}{dz}\alpha_0\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dS = 0. \tag{12}$$

Таким образом, за параметр поперечного сечения, определяющего степень влияния начальной крутки на деформацию растяжения можно естественно закрученного стержня можно взять величину интеграла

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dS.$$

С учётом (2) и (6) вычисление этого интеграла даёт

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dS = \int_S \left(\eta\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) dS = \\ = \int_S \left(\eta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \eta\right) - \xi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \xi\right) + r^2\right) dS = J_p - J_{кр}, \end{aligned} \tag{13}$$

где r — расстояние до центра кручения, а $J_p = \int_S r^2 dS$ — момент сечения [1, 2].

Из (13) очевидно, наибольшее значение естественная крутка имеет для стержней с $J_p \gg J_{кр}$, то есть для стержней с вытянутым поперечным сечением. Также в случае стержней с вытянутыми поперечными сечениями применимо упрощённое выражение для ε_z

$$\varepsilon_z = \frac{dw_0}{dz} - x\frac{d^2u_0}{dz^2} - y\frac{d^2v_0}{dz^2} + \frac{d\varphi_z}{dz}\alpha_0 r^2. \tag{14}$$

На основе технической теории естественно закрученных стержней в работах [1, 2] с использованием МКЭ, были исследованы статическое равновесие и собственные формы и частоты колебаний лопаток компрессоров ГТД. Как показали расчёты, результаты, полученные при помощи модели естественно закрученного стержня при небольших значениях $(\alpha_0 R)^2 \le 0{,}1$, соответствовали результатам, полученным на основе геометрически нелинейных моделей оболочки и трёхмерным объемным моделям.

Жёсткость на кручение естественно закрученного стержня определяется аналогично жёсткости стеснённого кручения в теории тонкостенных стержней В.З. Власова [3]. Поправки к касательным напряжениям определяются из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\eta z}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} + \alpha_0 \frac{\partial \sigma_z}{\partial \psi} = 0, \tag{15}$$

граничного условия на боковой поверхности

$$\tau_{\xi z}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \tau_{\eta z}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \alpha_0 \sigma_z \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0, \tag{16}$$

и условий на торцах

$$\begin{gathered} \int_S \sigma_z dS = 0, \ \int_S \xi\sigma_z dS = 0, \\ \int_S \eta\sigma_z dS = 0, \\ \int_S \left(\xi\tau_{\eta z} - \eta\tau_{\xi z}\right) dS = M. \end{gathered} \tag{17}$$

В рассматриваемом случае симметричного сечения с учётом, что $\frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0$, для касательных напряжений справедлива зависимость

$$\tau_{\xi z} = \frac{d\varphi_z}{dz} G \frac{\partial F}{\partial \eta} - \alpha_0 \eta \sigma_z,$$
$$\tau_{\eta z} = \alpha_0 \xi \sigma_z - \frac{d\varphi_z}{dz} G \frac{\partial F}{\partial \xi}. \tag{18}$$

Откуда с учётом (13) выражение для крутящего момента M имеет вид

$$M = \int_S \left(\xi \tau_{\eta z} - \eta \tau_{\xi z} \right) dS = \frac{d\varphi_z}{dz} G J_{кр} + \frac{d\varphi_z}{dz} \alpha_0^2 E \int_S r^2 \left(r^2 - \frac{J_p}{S} \right) dS =$$
$$= \frac{d\varphi_z}{dz} \left(G J_{кр} + \alpha_0^2 E \left(J_r - \frac{J_p^2}{S} \right) \right), \tag{19}$$

откуда исходя из определения (1) жёсткость на кручение естественно закрученного стержня с симметричными поперечными сечениями примет вид [1, 2]

$$K_{кр} = G J_{кр} + \alpha_0^2 E \left(J_r - \frac{J_p^2}{S} \right). \tag{20}$$

Однако, начиная с $\left(\alpha_0 R\right)^2 \approx 0{,}1$, техническая теория начинает давать завышенное значение для жёсткости на кручение. На рис. 3 представлены результаты сравнения жёсткости на кручения технической теории с результатами трёхмерных расчётов МКЭ

$$\Delta = \left(K_{кр}^{Т.Т.} - K_{кр}^{МКЭ} \right) \Big/ K_{кр}^{МКЭ}.$$

Уточнение технической теории. Таким образом, для расчётов стержней с $\left(\alpha_0 R\right)^2 > 0{,}1$ необходимо уточнение технической теории. Для получения поправок к технической теории естественно закрученных стержней без её усложнения, обратим внимание на обстоятельство, отмеченное в работах [1, 2], для вытянутых поперечных сечений деформация ε_z приблизительно равна деформации винтового волокна ε_ζ

$$\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\xi l^2 + \varepsilon_\eta m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{\xi\eta} lm + \gamma_{\eta z} mn + \gamma_{\xi z} nl, \tag{21}$$

где

$$l = \frac{-\alpha_0 \eta}{\sqrt{1 + \alpha_0^2 r^2}},\ l = \frac{\alpha_0 \eta}{\sqrt{1 + \alpha_0^2 r^2}},\ l = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_0^2 r^2}}$$

— направляющие косинусы винтового волокна.

Учитывая, что деформации в локальных координатах определяются выражениями

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\xi}=\frac{\partial u}{\partial \xi},\\ \varepsilon_{\eta}=\frac{\partial v}{\partial \eta},\\ \varepsilon_{\mathrm{z}}=\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\alpha_0\frac{\partial w}{\partial \psi},\\ \gamma_{\xi\eta}=\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\\ \gamma_{\xi\mathrm{z}}=\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\alpha_0\frac{\partial u}{\partial \psi}=-\frac{d\varphi_{\mathrm{z}}}{d\zeta}\eta+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\alpha_0\frac{\partial u}{\partial \psi},\\ \gamma_{\eta\mathrm{z}}=\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\alpha_0\frac{\partial v}{\partial \psi}=\frac{d\varphi_{\mathrm{z}}}{d\zeta}\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\alpha_0\frac{\partial v}{\partial \psi},\end{gathered}\tag{22}$$

после несложных преобразований получим из (21)

$$\varepsilon_{\zeta}=\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{d\varphi_{\mathrm{z}}}{d\zeta}\alpha_0 r^2\right)\left(1+\alpha_0^2 r^2\right)^{-1}.\tag{23}$$

Рассмотрим пару векторов $\mathbf{e_1}=(1,0,-\alpha_0\eta)$ и $\mathbf{e_2}=(0,1,\alpha_0\xi)$ (рис. 1*б*). Оба вектора лежат в плоскости перпендикулярной винтовому волокну, и с точностью до α_0 образуют с направляющим вектором винтового волокна правую тройку векторов, $\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2}=-\alpha_0^2\xi\eta$. Тензор напряжений в тройке векторов винтового волокна приближённо связан с тензором напряжений в локальных координатах выражением

$$\begin{bmatrix}\tilde{\sigma}_{\xi} & \tilde{\tau}_{\xi\eta} & \tilde{\tau}_{\xi\zeta}\\ \tilde{\tau}_{\eta\xi} & \tilde{\sigma}_{\eta} & \tilde{\tau}_{\eta\zeta}\\ \tilde{\tau}_{\zeta\xi} & \tilde{\tau}_{\zeta\eta} & \tilde{\sigma}_{\zeta}\end{bmatrix}=T_{\zeta}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{\xi} & \tau_{\xi\eta} & \tau_{\xi\mathrm{z}}\\ \tau_{\eta\xi} & \sigma_{\eta} & \tau_{\eta\mathrm{z}}\\ \tau_{\mathrm{z}\xi} & \tau_{\mathrm{z}\eta} & \sigma_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}\cdot T_{\zeta}^{T},\tag{24}$$

где матрица поворота

$$T_{\zeta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \alpha_0\eta\\ 0 & 1 & -\alpha_0\xi\\ \alpha_0\xi & -\alpha_0\eta & 1\end{bmatrix}.$$

С учётом принятого допущения о равенстве нулю σ_{ξ}, σ_{η} и $\tau_{\xi\eta}$, касательные напряжения в плоскости перпендикулярной винтовому

волокну с достаточной точностью будут равны

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\xi\zeta} &= \tau_{\xi z} + \alpha_0 \eta \sigma_z, \\ \tilde{\tau}_{\eta\zeta} &= \tau_{\eta z} - \alpha_0 \xi \sigma_z,\end{aligned} \tag{25}$$

что с учётом (18) даёт

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\xi\zeta} &= \frac{d\varphi_z}{d\zeta} G \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \tilde{\tau}_{\eta\zeta} &= -\frac{d\varphi_z}{d\zeta} G \frac{\partial F}{\partial \xi}.\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, касательные напряжения в площадках нормальных винтовым волокнам с достаточной точностью совпадают с касательными напряжениями кручения незакрученного стержня.

Учитывая два члена в разложении в ряд Тейлора знаменателя для выражения деформации винтового волокна, получим

$$\varepsilon_\zeta \approx \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{d\varphi_z}{d\zeta} \alpha_0 r^2 \right) \left(1 - \alpha_0^2 r^2 \right). \tag{27}$$

Очевидно, что направления винтовых волокон не совпадают. Поэтому для определения жёсткости на кручение удобнее использовать вариационный принцип. Ограничимся случаем симметричного поперечного сечения и пренебрежём надавливанием волокон.

Полная вариация потенциальной энергии системы

$$\delta \Pi = \delta \left(U - W \right),$$

где

$$U = \int_V U_i dV$$

— потенциальная энергия упругих деформаций, а $W = \varphi_z M$ — работа крутящего момента. С учётом принятых допущений вариация потенциальной энергии деформаций будет равна

$$\begin{aligned}\delta U = \delta \left(\frac{dw_0}{d\zeta} \right) EL \int_S \left(\frac{dw_0}{d\zeta} + \frac{d\varphi_z}{d\zeta} \right) \left(1 - \alpha_0^2 r^2 \right)^2 dS + \\ + \delta \left(\varphi_z \right) \int_S \left(E \left(\frac{dw_0}{d\zeta} + \frac{d\varphi_z}{d\zeta} \right) \alpha_0 r^2 \left(1 - \alpha_0^2 r^2 \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{d\varphi_z}{d\zeta} G \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right) dS.\end{aligned} \tag{28}$$

Так как вариация работы крутящего момента не зависит от вариации осевой деформации $\delta\left(\frac{dw_0}{d\zeta}\right)$, первый интеграл в (28) должен быть тождественно равен нулю, что даёт связь между осевой деформацией и кручением

$$\int_S \left(\frac{dw_0}{d\zeta}+\frac{d\varphi_z}{d\zeta}\right)\left(1-\alpha_0^2 r^2\right)^2 dS = 0, \tag{29}$$

откуда после интегрирования получаем

$$\frac{dw_0}{d\zeta} = -\frac{d\varphi_z}{d\zeta}\left(\frac{\alpha_0 J_{r^2} - 2\alpha_0^3 J_{r^4} + \alpha_0^5 J_{r^6}}{S - 2\alpha_0^2 J_{r^2} + \alpha_0^4 J_{r^4}}\right), \tag{30}$$

где

$$J_{r^n} = \int_S r^n dS.$$

С учётом (28) и (30)

$$\delta U = \delta\left(\varphi_z\right)\frac{d\varphi_z}{d\zeta}\left(GJ_{кр} + \right.$$

$$\left. +E\left(\alpha_0^2 J_{r^4} - 2\alpha_0^4 J_{r^6} + \alpha_0^6 J_{r^8} - \frac{\left(\alpha_0 J_{r^2} - 2\alpha_0^3 J_{r^4} + \alpha_0^5 J_{r^6}\right)^2}{S - 2\alpha_0^2 J_{r^2} + \alpha_0^4 J_{r^4}}\right)\right),$$

откуда так как вариация работы крутящего момента равна

$$\delta W = \delta\varphi_z M,$$

исходя из (1) получим уточнённое выражение для жёсткости на кручение

$$K_{кр} = GJ_{кр} + $$

$$+E\left(\alpha_0^2 J_{r^4} - 2\alpha_0^4 J_{r^6} + \alpha_0^6 J_{r^8} - \frac{\left(\alpha_0 J_{r^2} - 2\alpha_0^3 J_{r^4} + \alpha_0^5 J_{r^6}\right)^2}{S - 2\alpha_0^2 J_{r^2} + \alpha_0^4 J_{r^4}}\right) \tag{31}$$

которое при $\left(\alpha_0 R\right)^2 \ll 1$ переходит в зависимость технической теории естественно закрученных стержней [11]

$$K_{кр} = GJ_{кр} + \alpha_0^2 E\left(J_r - \frac{J_p^2}{S}\right).$$

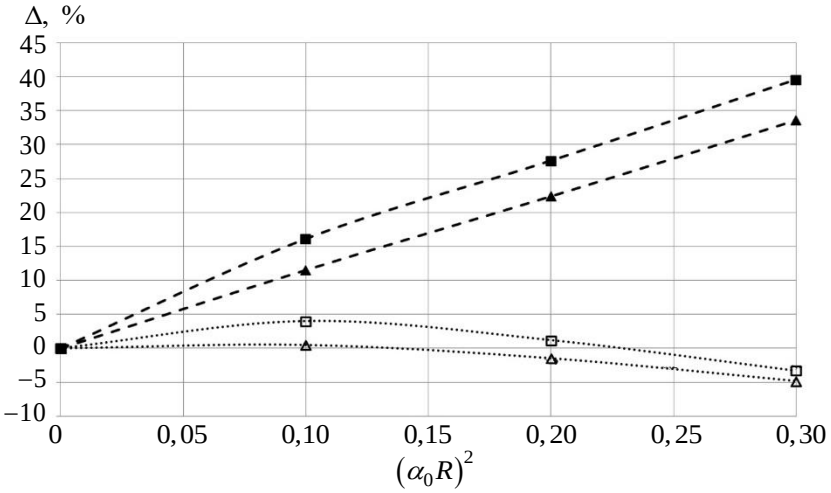


Рис. 3. Отклонение значений жёсткости на кручение, полученных с применением технической теории от результатов, полученных трёхмерными расчётами МКЭ; квадратные маркеры отмечают результаты для стержней с эллиптическим поперечным сечением, треугольные маркеры — результаты для стержней с прямоугольным поперечным сечением; сплошные маркеры и крупная штриховка соответствуют базовой технической теории [1, 2], пустые маркеры и пунктир соответствуют уточнённой технической теории

Результаты численного моделирования. На рис. 3 представлено сравнение полученной зависимости с результатами расчета жесткости кручения закрученных стержней методом конечных элементов с использованием трехмерных объемных моделей. Расчёты проводились для стержней с прямоугольными и эллиптическими поперечными сечениями с соотношением сторон 1 к 10 к 100 для различных углов начальной крутки. Можно видеть, что при увеличении начальной крутки, зависимость жёсткости на кручения от $(\alpha_0 R)^2$ существенно отличается от линейной зависимости. Предложенная поправка позволяет получать значения жёсткости на кручения, хорошо согласующиеся с результатами трёхмерных расчётов, без значительного усложнения модели.

Выводы. Обобщая вышеизложенное, следует сделать вывод, что модель закрученных стержней позволяет быстро получать точные предсказания жёсткости на кручение для $(\alpha_0 R)^2 < 0{,}1$. При увеличении начальной крутки техническая теория начинает давать завышенные значения крутильной жёсткости. В практически важном случае стержней с поперечным сечением ($J_p \gg J_{кр}$),развитие идеи винтового волокна из технической теории позволяет получить к ней поправки, расширяющие область её применения вплоть до $(\alpha_0 R)^2 \sim 0{,}3$. В этой статье принималось, что центр кручения совпадает с центром масс

стержня, исключительно для упрощения рассмотрения кручения без необходимости учёта изгиба. Однако из формулы (37) видно, что начальная крутка влияет на изгиб и в случае совпадения центра масс и центра кручения. Нетрудно осуществить уточнение модели закрученного стержня, представленной в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Темис Ю.М., Карабан В.В. *Труды ЦИАМ. № 1319: Геометрически нелинейная конечно-элементная модель закрученного стержня в задачах статического и динамического расчета лопаток*. Москва, ЦИАМ, 2019, 19 с.

[2] Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф. *Теория закрученных стержней*. Киев, Наукова думка, 1983, 186 с.

[3] Власов В.З. *Тонкостенные упругие стержни*. Москва, Физматгиз, 1959, 568 с.

[4] Светлицкий В.А. *Механика гибких стержней и нитей*. Москва, Машиностроение, 1978, 222 с.

[5] Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю. Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней. *Доклады Академии наук СССР*, 1939, т. 24, № 1–9, с. 23–26.

[6] Риз П.М. Деформации и напряжения естественно закрученных стержней. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*, 1939, т. 3, вып. 4, с. 449–476.

[7] Temis J.M., Fyodorov I.M. A comparison of methods for the stability analysis of beams with varying cross sections under nonconservative loading. *Proceedings. 2005 International Conference Physics and Control, St. Petersburg, Russia*, 2005, pp. 306-311. DOI: 10.1109/PHYCON.2005.1513998

[8] Панасенко Н.Н., Юзиков В.П., Синельщиков А.В. Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля в 2-х частях. Часть 1. *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*, 2015, № 2, с. 89–100.

[9] Meier C., Popp A., Wall W.A. Geometrically exact finite element formulations for slender beams: Kirchhoff–Love theory versus Simo–Reissner theory. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2019, vol. 26, pp. 163–243.

[10] Chai T.Y. *Warping behavior of cantilever steel beam with openings*. Diss. Of Master of Engineering (Civil-Structure). Malaysia, 2005.

[11] Lisi D. *A beam finite element model including warping. Application to the dynamic and static analysis of bridge decks*. Diss. of Master of Civil Engineering. Italy, Milan, 2012.

[12] Kourtis L.C., Kesari H, Carter D.R., Beaupré G.S. Transverse and torsional shear stresses in prismatic bodies having inhomogeneous material properties using a new 2D stress function. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2009, vol. 4, no. 4, pp. 659–674.

[13] Malcolm D.J., Laird D.L. Modeling of blades as equivalent beams for aeroelastic analysis. *ASME 2003 Wind Energy Symposium*, 2003, art. no. WIND2003-870, pp. 293–303.

[14] Branner K., Blasques J.P.A.A., Kim T., Fedorov V., Berring P., Bitsche R., Berggreen C. Anisotropic beam model for analysis and design of passive controlled wind turbine blades. *DTU Wind Energy*, 2012, art. no. 0001.

[15] Bitsche P., Berggreen R., Temis J.M. Multidisciplinary technology for blade bending-torsion flutter prediction. *8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*, 2010, pp. 530–537.

[16] Couturier Ph. *Structural modelling of composite beams with application to wind turbine rotor blades*. Diss. of Ph.D. degree Kgs. Lyngby, DTU Mechanical Engineering, 2016, 202 p.

[17] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. *Сопротивление материалов*. Москва, Наука, 1986, 560 с.

[18] Дубровин В. М., Бутина Т.А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня в точной постановке задачи. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 3–16.

[19] Карабан В.В. Автоматизированная система определения геометрических характеристик произвольных одно- и многосвязных сечений. *Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении: тезисы докладов международной научно-технической конференции. Секция 5*, Казань, 1995, с. 56–58.

[20] Темис Ю.М., Карабан В.В. Определение геометрической жесткости на кручение одно- и многосвязных машиностроительных и лопаточных профилей с особенностями с использованием МГЭ. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: межвузовский сборник*, 1997, вып. 55, с. 137–149.

Статья поступила в редакцию 05.12.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Темис Ю.М., Зиятдинов И.З. Новый метод вычисления жесткости на кручение в модели естественно-закрученного стержня. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 1, с. 64–80.

Темис Юрий Моисеевич — д-р техн. наук, руководитель отдела, ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова», профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: jmtvmz@gmail.com

Зиятдинов Ильяз Зиннурович — инженер, ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова». e-mail: ilyaz.ziyatdinov@gmail.com

A new method for calculating the torsional stiffness of a naturally twisted bar

© Y.M. Temis[1,2], I.Z.Ziyatdinov[1]

[1]CIAM, Moscow, 111116, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

At the initial stages of designing compressor blades, screws, cutting tools, it is advisable to use a finite element model based on a model of a naturally twisted beam. This model takes into account the influence of the angle of natural twist on the rigidity of the part. The torsional stiffness of a bar significantly affects the stiffness parameters of the finite element model. It is shown that the torsional stiffness correction obtained on the basis of the relations of the technical theory of naturally twisted beams makes it possible to obtain results at small angles of natural twist that are in good agreement with the three-dimensional calculation of a twisted FEM beam. At large specific angles of initial twist, the technical theory gives overestimated values of the torsional stiffness. The article proposes a modification of the relations of the technical theory to determine the torsional rigidity, taking into account large angles of initial twist.

Keywords: *beam models, torsional stiffness, technical theory of naturally twisted beams*

REFERENCES

[1] Temis Yu.M., Karaban V.V. Trudy CIAM. № 1319: *Geometricheski nelinejnaya konechno-elementnaya model' zakruchennogo sterzhnya v zadachah statich-eskogo i dinamicheskogo rascheta lopatok* [Proceedings of CIAM. No. 1319: Geometrically nonlinear finite element model of a twisted rod in problems of static and dynamic calculation of blades]. Moscow, CIAM, 2019, 19 p.

[2] Vorobyev Yu.S., Shorr B.F. *Teoriya zakruchennyh sterzhnej* [Theory of twisted rods]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 186 p.

[3] Vlasov V.Z. *Tonkostennye uprugie sterzhni* [Thin-walled elastic rods]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 568 p.

[4] Svetlitsky V.A. *Mekhanika gibkih sterzhnej i nitej* [Mechanics of flexible rods and threads]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 222 p.

[5] Lurie A.I., Janelidze G.Yu. Zadacha Sen-Venana dlya estestvenno-skruchennyh sterzhnej [The Saint-Venant problem for naturally twisted rods]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1939, vol. 24, no. 1-9, pp. 23–26.

[6] Riz P.M. On the deformations and stresses of naturally twisted bars. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1939, vol. 3, iss. 4, pp. 449–476.

[7] Temis J.M., Fyodorov I.M. A comparison of methods for the stability analysis of beams with varying cross sections under nonconservative loading. *Proceedings. 2005 International Conference Physics and Control, St. Petersburg, Russia*, 2005, pp. 306-311. DOI: 10.1109/PHYCON.2005.1513998

[8] Panasenko N.N., Yuzikov V.P., Sinelshchikov A.V. Finite element model of the spatial structures from thin-walled open section bars in 2 parts. Part 1. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Marine engineering and technologies*, 2015, no. 2, pp. 89–100.

[9] Meier C., Popp A., Wall W.A. Geometrically exact finite element formulations for slender beams: Kirchhoff–Love theory versus Simo–Reissner theory. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2019, vol. 26, pp. 163–243.

[10] Chai T.Y. *Warping behavior of cantilever steel beam with openings*. Diss. of Master of Engineering (Civil-Structure). Malaysia, 2005.

[11] Lisi D. *A beam finite element model including warping. Application to the dynamic and static analysis of bridge decks*. Diss. of Master of Civil Engineering. Italy, Milan, 2012.

[12] Kourtis L.C., Kesari H, Carter D.R., Beaupré G.S. Transverse and torsional shear stresses in prismatic bodies having inhomogeneous material properties using a new 2D stress function. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2009, vol. 4, no. 4, pp. 659–674.

[13] Malcolm D.J., Laird D.L. Modeling of blades as equivalent beams for aeroelastic analysis. *ASME 2003 Wind Energy Symposium*, 2003, art. no. WIND2003-870, pp. 293–303.

[14] Branner K., Blasques J.P.A.A., Kim T., Fedorov V., Berring P., Bitsche R., Berg-green C. Anisotropic beam model for analysis and design of passive controlled wind turbine blades. *DTU Wind Energy*, 2012, art. no. 0001.

[15] Bitsche P., Berggreen R., Temis J.M. Multidisciplinary technology for blade bending-torsion flutter prediction. *8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*, 2010, pp. 530–537.

[16] Couturier Ph. *Structural modelling of composite beams with application to wind turbine rotor blades*. Diss. of Ph.D. degree Kgs. Lyngby, DTU Mechanical Engineering, 2016, 202 p.

[17] Birger I.A., Mavlyutov R.R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 p.

[18] Dubrovin V.M., Butina T.A. Modeling the stability of compressed and twisted rods in precise problem statement. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 3–16.

[19] Karaban V.V. Avtomatizirovannaya sistema opredeleniya geometricheskih harakteristik proizvol'nyh odno- i mnogosvyaznyh sechenij [Automated system for determining the geometric characteristics of arbitrary single- and multi-connected sections]. *Aktual'nye problemy matematicheskogo modelirovaniya i avtomatizirovannogo proektirovaniya v mashinostroenii: tezisy dokladov mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii. Sekciya 5* [Actual problems of mathematical modeling and computer-aided design in mechanical engineering: abstracts of reports of the international scientific and technical conference. Section 5], Kazan, 1995, pp. 56–58.

[20] Temis Yu.M., Karaban V.V. Opredelenie geometricheskoj zhestkosti na kruchenie odno- i mnogosvyaznyh mashinostroitel'nyh i lopatochnyh profilej s osobennostyami s ispol'zovaniem MGE [Determination of geometric torsional stiffness of single- and multi-connected machine-building and blade fillets with features using MGE]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoe modelirovanie fiziko-mekhanicheskih processov: mezhvuzovskij sbornik* [Applied problems of strength and plasticity. Numerical modeling of physical and mechanical processes: Intercollegiate Collection], 1997, issue 55, pp. 137-149.

Temis Y.M., Dr. Sci. (Eng.), head of department, CIAM, Professor of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: jmtvmz@gmail.com

Ziyatdinov I.Z., engineer, CIAM. e-mail: ilyaz.ziyatdinov@gmail.com