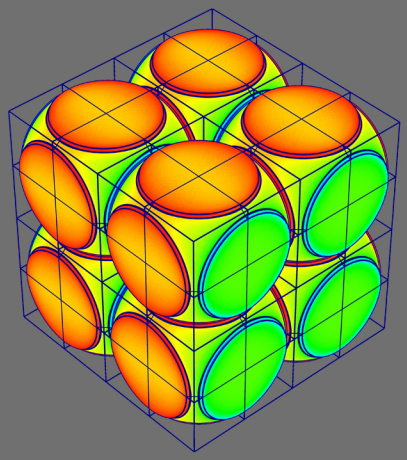
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Коряков М.Н., Маремшаова А.В. Конечно-элементное моделирование температурных полей в тонкостенных многослойных оболочечных элементах конструкций. Математическое моделирование и численные методы, 2023, No 1, с. 43–63

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/301/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.183
09.03.2026 13:56:22

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-4363

Конечно-элементное моделирование температурных полей в тонкостенных многослойных анизотропных оболочках

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, М.Н. Коряков, А.А. Маремшаова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена проблема разработки модели для расчета температурных полей в тонкостенных многослойных криволинейно-анизотропных тонких оболочках произвольной геометрической формы, в том числе составных. Как правило для решения этой задачи используется конкретная координатная запись уравнений теории теплопроводности, что создает определенные трудности для расчета сложных составных оболочек. В данной работе предложено использовать инвариантную запись вариационной постановки задач теории теплопроводности, с последующим применением процедуры конечно-элементного алгоритма. В результаты выведены матричное дифференциальное уравнение для определения температурного поля в узлах конечно-элементной сетки. Разработан программный модуль для конечно-элементного решения задачи нестационарной теплопроводности оболочек. Модуль функционирует в составе программного комплекса SMCM, созданного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерного инженерного моделирования и разработки программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НОЦ «СИМПЛЕКС»). Приведен пример решения задачи расчета нестационарного температурного поля в цилиндрической оболочке с продольно-поперечным подкреплением. Проведено сравнение численного моделирования с аналогичными расчетами в ПК ANSYS, которое показало высокую точность предложенного метода: относительно отклонение результатов не превышает 0,5 %.

Ключевые слова: *тонкостенные оболочки, температурные поля, задача теплопроводности, вариационная постановка. конечно-элементное моделирование*

Введение. Во многих прикладных задачах возникает проблема расчета температурных полей в тонкостенных оболочечных конструкциях [1–6]. Несмотря на существование в настоящее время пакетов прикладных программ, основанных на трехмерном конечно-элементном анализе процессов в элементах конструкций, и мощных вычислительных средств, расчет тонкостенных оболочки представляет особую, достаточно трудную задачу. Прямое применение трехмерных конечно-элементных методов приводит к необходимости использования больших объемов компьютерной памяти для хранения больших объемов матриц, или большого машинного времени при использовании итерационных методов. В этой связи по прежнему актуальным являются численные методы, основанные на двумерной теории оболочек [1–18]. В настоящей работе предложен метод сведения общей трехмерной задачи теплопроводности к двумерной

задаче для тонкостенных оболочек, в также конечно-элементный алгоритм решения двумерной задачи. В основе предлагаемого метода положена вариационная постановка исходной трехмерной задачи.

Геометрия многослойной оболочки. Рассмотрим многослойную тонкую оболочку [19] — область V в трехмерном пространстве, которая ограничена замкнутой поверхностью Σ, состоящей из трех частей: $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_- \cup \Sigma_T$, где $\Sigma_\pm$ — внешняя и внутренняя поверхности оболочки, Σ_T — торцевая поверхность оболочки (рис 1). Поверхности $\Sigma_\pm$ образованы на основе некоторой базовой двумерной поверхности Σ_0, для которой введены ортогональные, вообще говоря, криволинейные координаты X^I, $I = 1,2$ (т.е. введена параметризация поверхности). Вводится трехмерная ортогональная система координат X^i, $i = 1,2,3$, в которой $X^3 = 0$ — это уравнение базовой поверхности конструкции $\sum_0$, называемой далее срединной поверхностью, а поверхности $\Sigma_\pm$ задаются уравнениями $X^3 = \pm\dfrac{h}{2}$, где $h > 0$ — толщина оболочки. Торцевую поверхность Σ_T зададим следующим образом:

$$\Sigma_T = \{X^i \mid X^I \in \partial\sum_0,\ -\frac{h}{2} \le X^3 \le \frac{h}{2}\}, \tag{1}$$

где $\partial\sum_0$ — граница двумерной области $\sum_0$, являющейся замкнутой кривой на поверхности $\sum_0$, без самопересечений.

Тогда область V всей оболочки можно описать следующим образом:

$$\mathrm{V} = \{X^i \mid X^I \in \sum_0,\ -\frac{h}{2} < X^3 < \frac{h}{2}\}. \tag{2}$$

Будем полагать оболочку многослойной, т.е. область V состоит из N слоев V_s

$$V_s = \{X^i \mid X^I \in \sum_0,\ h_{s-1} < X^3 < h_s\}, \quad s = 1,\dots,N, \tag{3}$$

где h_s — толщины слоев. Границы раздела слоев обозначим следующим образом

$$\Sigma_s = \{X^i \mid X^I \in \sum_0,\ X^3 = h_s\}, \quad s = 1,\dots,N. \tag{4}$$

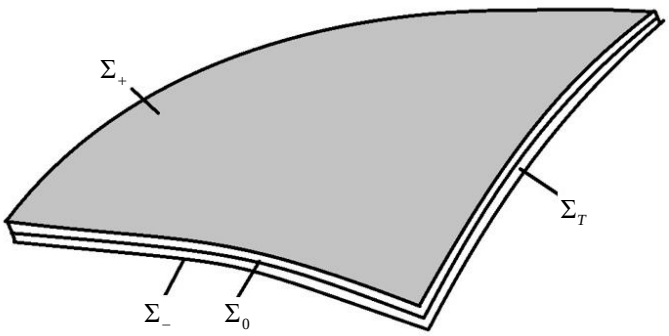


Рис 1. Многослойная оболочка

Постановка трехмерной нестационарной задачи теплопроводности для многослойной оболочки. Рассмотрим постановку трехмерной нестационарной задачи теплопроводности [19] для многослойной оболочки

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}, \text{ в V}, \tag{5}$$

$$\vec{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{g}, \text{ в V} \cup \Sigma, \tag{6}$$

$$\vec{g} = \nabla \theta, \text{ в V} \cup \Sigma, \tag{7}$$

$$\Sigma_s : \vec{n} \cdot [\vec{q}] = 0, \ [\theta] = 0, \tag{8}$$

$$\Sigma_\pm : \vec{n} \cdot \vec{q} = \alpha_\pm (\theta - \theta_{e\pm}), \tag{9}$$

$$\Sigma_T : n \cdot \vec{q} = q_e, \tag{10}$$

$$t = 0, \ \theta = \theta_0, \text{ в V}, \tag{11}$$

где θ — температура, $\vec{q}$ — вектор теплового потока, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, ∇ — набла —оператор [20], $\vec{g}$ — градиент температуры, $\boldsymbol{\lambda}$ — тензор теплопроводности, (5) — уравнение теплопроводности, (6) — закон Фурье, (8) — условия на границе идеального контакта слоев многослойной оболочки, (9) — условие конвективного теплообмена на поверхностях $\Sigma_\pm$, $\alpha_\pm$ — коэффициенты теплообмена, $\theta_{e\pm}$ — заданные температуры внешней среды, $\vec{n}$ — вектор нормали, (10) — условие теплоизоляции на торцевой поверхности.

Слои оболочки полагаем криволинейно-анизотропными [19, 20].

Вариационная постановка нестационарной задачи теплопроводности для оболочки. Введем множество пробных функций v, определенных в области V, гладких в этой области. Домножим (5) на пробную функцию v, и проинтегрируем по всей области V

$$\int_V \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} v dV = -\int_V v \nabla \cdot \vec{q} dV. \tag{12}$$

Преобразуем правую часть в этом уравнении, с учетом граничных условий (9) и (10)

$$\begin{gathered}\int_V v \nabla \cdot \vec{q} dV = \int_V \nabla \cdot (v\vec{q}) dV - \int_V \vec{q} \cdot \nabla v dV = \\ \int_\Sigma \vec{n} \cdot \vec{q} v d\Sigma - \int_V \vec{q} \cdot \nabla v dV = \\ = \int_{\Sigma_T} q_e v d\Sigma + \int_{\Sigma_+} \alpha_+ (\theta - \theta_{e+}) v d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma_-} \alpha_- (\theta - \theta_{e-}) v d\Sigma - \int_V \vec{q} \cdot \nabla v dV.\end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем вариационное уравнение теплопроводности

$$\begin{gathered}\int_V \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} v dV + \int_{\Sigma_T} q_e v d\Sigma + \int_{\Sigma_\pm} \alpha_\pm (\theta - \theta_{e\pm}) v d\Sigma - \\ - \int_V \vec{q} \cdot \nabla v dV = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $\int_{\Sigma_\pm} = \int_{\Sigma_+} + \int_{\Sigma_-}$.

Модель температурного поля для тонкостенной конструкции. Рассмотрим случай тонких оболочек, т.е. для которых выполняется условие $h / L \ll 1$, где $L = diam \Sigma_0$ — характерный размер области Σ_0.

Для таких оболочек будем полагать, что температура распределена по толщине оболочки по линейному закону

$$\theta = \theta^{(0)} + X^3 \theta^{(1)}, \text{ в } \bar{V}, \tag{15}$$

где $\theta^{(0)}, \theta^{(1)} \parallel X^I, I = 1, 2$ — функции определенные на срединной поверхности $\bar{\Sigma}_0$ (черта сверху означает замкнутые области $\bar{V}$ и $\bar{\Sigma}_0$).

Введем радиус-векторы точек оболочки:

$$\vec{x} = \vec{\rho} + X^3 \vec{n}, \quad \vec{\rho}, \vec{u} \parallel X^I, \quad -\frac{h}{2} \le X^3 \le \frac{h}{2}. \tag{16}$$

Тогда можно ввести локальные векторы базиса

$$\vec{r}_I = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^I} = \vec{\rho} + X^3 \vec{n}_I, \quad \vec{r}_3 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^3} = \vec{n}, \tag{17}$$

$$\overrightarrow{\rho_I} = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial X^I}, \ \vec{n}_I = \frac{\partial \vec{n}}{\partial X^I}. \tag{18}$$

Рассмотрим все векторы и тензоры в базисе $\vec{r}_i$, вообще говоря, неортогональном

$$\vec{q} = q^i \vec{r}_i = q_i \overrightarrow{r^i}, \quad \vec{g} = g_i \overrightarrow{r^i} = g^i \vec{r}_i, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda^{ij} \vec{r}_i \otimes \vec{r}_j = \lambda_{ij} \overrightarrow{r^i} \otimes \overrightarrow{r^j}. \tag{19}$$

Тогда:

$$\vec{g} = \nabla \theta = \overrightarrow{r^i} \frac{\partial \theta}{\partial X^i}, \tag{20}$$

$$g_i = \vec{r}_i \cdot \vec{g} = \frac{\partial \theta}{\partial X^i}, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} g_I = \frac{\partial \theta}{\partial X^I} = \theta^{(0)}_{,I} + X^3 \theta^{(1)}_{,I} \equiv g^{(0)}_{,I} + X^3 g^{(1)}_I, \\ g_3 = \frac{\partial \theta}{\partial X^3} = \theta^{(1)}. \end{gathered} \tag{22}$$

Аналогично (15) полагаем, что пробные функции v также линейно распределены по толщине

$$v = v^{(0)} + X^3 v^{(1)}, \tag{23}$$

где $v^{(0)}, \ v^{(1)} \parallel X^I$.

Тогда вектор-градиент пробной функции можно представить следующим образом

$$\vec{g} \equiv \nabla v = g^i \vec{r}_i = g_i \overrightarrow{r^i} = \overrightarrow{r^i} \frac{\partial v}{\partial X^i}, \tag{24}$$

$$g_i = \frac{\partial v}{\partial X^i}, \tag{25}$$

$$\begin{gathered} g_I = \frac{\partial v}{\partial X^I} = v^{(0)}_{,I} + X^3 v^{(1)}_{,I} \equiv g^{(0)}_{,I} + X^3 g^{(1)}_I, \\ g_3 = \frac{\partial v}{\partial X^3} = v^{(1)}. \end{gathered} \tag{26}$$

Вариационное уравнение для тонкой оболочки. Преобразуем интегралы в (14) с учетом (15), (22), (23) и (26).

Так как

$$\vec{q} \cdot \nabla v = \vec{q} \cdot \vec{g} = q^i g_i = q^I g_I + q^3 g_3 = q^I (v^{(0)}_{,I} + X^3 v^{(1)}_{,I}) + q^3 v^{(1)}, \tag{27}$$

то

$$\int_V \vec{q}\cdot\nabla v dV = \int_{-h/2}^{h/2}\int_{\Sigma_0} \vec{q}\cdot\nabla v d\sum dV =$$
$$= \int_{-h/2}^{h/2}\int_{\Sigma_0} q^I (v_{,I}^{(0)} + X^3 v_{,I}^{(1)}) d\sum dX^3 + \int_{-h/2}^{h/2}\int_{\Sigma_0} q^3 v^{(1)} d\sum dX^3. \quad (28)$$

Введем обозначения для средних по толщине тепловых потоков и моментов потоков:

$$\bar{q}^I = \int_{-h/2}^{h/2} q^I dX^3,\ m^I = \int_{-h/2}^{h/2} q^I X^3 dX^3,$$
$$\bar{q}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} q^3 dX^3. \quad (29)$$

Тогда (28) можно записать в виде:

$$\int_V \vec{q}\cdot\nabla v dV = \int_{\Sigma_0} (\bar{q}^I v_{,I}^{(0)} + m^I v_{,I}^{(1)} + \bar{q}^3 v^{(1)}) d\sum. \quad (30)$$

Определяющие соотношения, вытекающие из уравнения (6) имеют вид

$$q^I = -\lambda^{IJ} g_J = -\lambda^{IJ}(\theta_{,J}^{(0)} + X^3\theta_{,J}^{(1)}), \quad (31)$$
$$q^3 = -\lambda^{33} g_3 = -\lambda^{33}\theta^{(1)}. \quad (32)$$

Заметим, что λ^{ij} — здесь компоненты тензора λ в базисе $\vec{r}_i$. Этот базис может не совпадать с базисом $\vec{c}_i$ — криволинейной анизотропии, в котором заданы компоненты $\hat{\lambda}^{ij}$ тензора теплопроводности , тогда:

$$\lambda = \hat{\lambda}^{ij}\vec{c}_i \otimes \vec{c}_j = \lambda^{ij}\vec{r}_i \otimes \vec{r}_j,$$
$$\lambda^{ij} = \hat{\lambda}^{i'j'} Q_{i'}^i Q_{j'}^j, \quad (33)$$

где $Q_{i'}^i$ — матрица преобразования базисов: $\vec{c}_{i'} = Q_{i'}^i \vec{r}_i$.

Для криволинейно-ортотропных материалов слоев оболочки матрица компонент $\hat{\lambda}^{ij}$ — диагональная, при этом матрица λ^{ij} может быть не диагональной, т.к. базис $\vec{c}_i$ — ортонормированный, а $\vec{r}_i$, вообще говоря, нет.

Будем полагать, что векторы $\vec{c}_3$ и $\vec{r}_3$ — коллинеарны (ориентированы по нормали к $\sum_0$), тогда:

$$Q_j^i = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 & 0 \\ Q_2^2 & Q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3^3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} & 0 \\ \lambda^{12} & \lambda^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{33} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Вид матриц (34) учтем при записи соотношений (31), (32).

Подставляем (31) и (32) в (29), получаем

$$\begin{gathered} \bar{q}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{IJ} (\theta_{,J}^{(0)} + X^3 \theta_{,J}^{(1)}) dX^3 = -(\bar{\lambda}^{IJ} \theta_{,J}^{(0)} + N^{IJ} \theta_{,J}^{(1)}), \\ m^I = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{IJ} (\theta_{,J}^{(0)} X^3 + (X^3)^2 \theta_{,J}^{(1)}) dX^3 = -(N^{IJ} \theta_{,J}^{(0)} + D^{IJ} \theta_{,J}^{(1)}), \\ \bar{q}^3 = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{33} \theta^{(1)} dX^3 = -\bar{\lambda}^{33} \theta^{(1)}, \end{gathered} \tag{35}$$

где обозначены:

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{IJ} dX^3, \ \mathrm{N}^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{IJ} X^3 dX^3, \\ \bar{\lambda}^{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{33} dX^3, \ D^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda^{IJ} (X^3)^2 dX^3. \end{gathered} \tag{36}$$

Преобразуем первый интеграл в (14)

$$\begin{gathered} \int_V \rho c \dot{\theta} v dV = \int_{\Sigma_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho c \dot{\theta} (v^{(0)} + X^3 v^{(1)}) dX^3 d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma_0} (\dot{\Theta}^{(0)} v^{(0)} + \dot{\Theta}^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma, \end{gathered} \tag{37}$$

где обозначены

$$\dot{\Theta}^{(0)} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} dX^3, \ \dot{\Theta}^{(1)} \equiv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} X^3 dX^3. \tag{38}$$

Подставляя в эти выражения функции (15), получаем

$$\dot{\Theta}^{(0)} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho c (\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} + X^3 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t}) dX^3 = C^{(0)} \dot{\theta}^{(0)} + C^{(1)} \dot{\theta}^{(1)}, \tag{39}$$

$$\dot{\Theta}^{(1)} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho c (\dot{\theta}^{(0)} + X^3 \dot{\theta}^{(1)}) X^3 dX^3 = C^{(1)} \dot{\theta}^{(0)} + C^{(2)} \dot{\theta}^{(1)}, \tag{40}$$

где обозначены осредненные массовые теплоемкости нулевого, первого и второго приближения

$$C^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho c dX^3,\ C^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho c X^3 dX^3,\ C^{(2)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho c (X^3)^2 dX^3. \quad (41)$$

Преобразуем второй интеграл в (14)

$$\begin{aligned} \int_V q_e v dV &= \int_{\Sigma_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_e (v^{(0)} + X^3 v^{(1)}) dX^3 d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma_0} (q_{Te}^{(0)} v^{(0)} + q_{Te}^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma_0, \end{aligned} \quad (42)$$

где обозначены осредненные тепловые потоки нулевого и первого порядка

$$q_{Te}^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} q_e dX^3,\ q_{Te}^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} q_e X^3 dX^3. \quad (43)$$

Преобразуем третий интеграл в (14)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\pm} \alpha_\pm (\theta - \theta_{e\pm}) v d\Sigma &= \int_{\Sigma_\pm} \alpha_\pm (\theta^{(0)} \pm \frac{h}{2}\theta^{(1)} - \theta_{e\pm})(v^{(0)} \pm \frac{h}{2} v^{(1)}) d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma_\pm} (q_\Sigma^{(0)} v^{(0)} + q_\Sigma^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (44)$$

где обозначены:

$$\begin{aligned} \bar{q}_\Sigma^{(0)} &= (\alpha_+ + \alpha_-)\theta^{(0)} + (\alpha_+ + \alpha_-)\frac{h}{2}\theta^{(1)} - (\alpha_+ \theta_{e+} + \alpha_- \theta_{e-}), \\ \bar{q}_\Sigma^{(1)} &= \frac{h}{2}(\alpha_+ + \alpha_-)\theta^{(0)} + (\alpha_+ + \alpha_-)\left(\frac{h}{2}\right)^2 \theta^{(1)} - (\alpha_+ \theta_{e+} + \alpha_- \theta_{e-})\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

— тепловые потоки на поверхностях Σ_0, приходящие от Σ_+ и Σ_-.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &A^{(0)} \equiv \alpha_+ + \alpha_-,\ A^{(1)} \equiv (\alpha_+ + \alpha_-)\frac{h}{2}, \\ &A^{(2)} \equiv (\alpha_+ + \alpha_-)\left(\frac{h}{2}\right)^2, \\ &q_{\Sigma e}^{(0)} \equiv \alpha_+ \theta_{e+} + \alpha_- \theta_{e-},\ q_{\Sigma e}^{(1)} \equiv (\alpha_+ \theta_{e+} + \alpha_- \theta_{e-})\frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Тогда формулы (45) можно переписать так

$$\begin{cases} q_{\Sigma}^{(0)} = A^{(0)}\theta^{(0)} + A^{(1)}\theta^{(1)} - q_{\Sigma e}^{(0)}, \\ q_{\Sigma}^{(1)} = A^{(1)}\theta^{(0)} + A^{(2)}\theta^{(1)} - q_{\Sigma e}^{(1)}. \end{cases} \tag{47}$$

Соберем теперь все интегралы (28), (37), (42) и (17), и подставим их в (14), тогда получим искомое вариационное уравнение

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\Sigma_0} (q^I g_I^{(0)} + m^I g_{,I}^{(1)} + q^3 v^{(1)}) d\Sigma_0 + \int\limits_{\Sigma_0} (\dot{\Theta}^{(0)} v^{(0)} + \dot{\Theta}^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma + \\ + \int\limits_{\Sigma_0} (q_{Te}^{(0)} v^{(0)} + q_{Te}^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma_0 + \int\limits_{\Sigma_0} (q_{\Sigma}^{(0)} v^{(0)} + q_{\Sigma}^{(1)} v^{(1)}) d\Sigma_0 = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Это уравнение дополняется соотношениями (35), которые запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} -q^I = \lambda^{IJ} g_J^{(0)} + B^{IJ} g_J^{(1)}, \\ -m^I = B^{IJ} \dot{g}_J^{(0)} + D^{IJ} g_J^{(1)}, \\ -q^3 = \lambda^{33} \theta^{(1)}. \end{cases} \tag{49}$$

а также соотношениями (39) и (40), а также соотношения для градиентов температуры в нулевом и первом приближении

$$\begin{gathered} g_I^{(0)} = \theta_{,I}^{(0)},\ g_{,I}^{(1)} = \theta_{,I}^{(1)}, \\ g_I^{(0)} = v_{,I}^{(0)},\ g_{,I}^{(1)} = v_{,I}^{(1)}. \end{gathered} \tag{50}$$

Конечно-элементное решение вариационного уравнения. Выберем в качестве пробной функции вариацию истинного температурного поля

$$v = \delta\theta, \tag{51}$$

тогда согласно (15) имеем

$$v^{(0)} = \delta\theta^{(0)},\ v^{(1)} = \delta\theta^{(1)}. \tag{52}$$

Введем координатную строку неизвестных функций — температур нулевого и первого приближений

$$\underset{1\times 2}{\{u\}}^T = (\theta^{(0)}, \theta^{(1)}). \tag{53}$$

Аппроксимируем срединную поверхность Σ_0 оболочки совокупностью конечных элементов (КЭ) Σ_{e0}, в виде треугольных или четырехугольных элементов, в результате получим конечно-элементную модель (КЭМ) поверхности Σ_0. Для каждого КЭ зададим

определенное число узлов, расположенных в вершинах, на ребрах и во внутренности КЭ [21].

Обозначим $\{y\}^T$ — строку значений неизвестных функций u в узлах КЭ

$$\underset{1\times 2m}{\{y\}^T} = (\{u\}_1, ..., \{u\}_m), \tag{54}$$

где m — число узлов на одном КЭ. На рис. 2 показаны примеры КЭ на срединной поверхности и соответствующие им трехмерные КЭ для оболочечных конструкций, которые могут быть применены с помощью разработанного метода.

Введем, как обычно [21], аппроксимирующее решение в КЭ

$$\underset{2\times 1}{\{u\}} = \underset{2\times 2m}{[\Phi]}\underset{2m\times 1}{\{y\}}, \tag{55}$$

где $\underset{2\times 2m}{[\Phi]}$ — матрица функций формы [21]. Образуем координатную строку градиентов температуры

$$\underset{1\times 5}{\{G\}^T} = (\theta_{,1}^{(0)}, \theta_{,2}^{(0)}, \theta_{,1}^{(1)}, \theta_{,2}^{(1)}, \theta^{(1)}). \tag{56}$$

Эту координатную строку можно представить в виде матричного соотношения

$$\underset{5\times 1}{\{G\}} = \underset{5\times 2}{[L]}\underset{2\times 1}{\{u\}}, \tag{57}$$

где $\underset{5\times 2}{[L]}$ — матрица операторов дифференцирования

$$\underset{5\times 2}{[L]} = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 \\ \nabla_2 & 0 \\ 0 & \nabla_1 \\ 0 & \nabla_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Подставляя соотношения (55) в (57), получаем (59). Введем матрицу операторов дифференцирования

$$\underset{5\times 1}{\{G\}} = \underset{5\times 2}{[L]}\underset{2\times 1}{\{u\}} = \underset{5\times 2m}{[B]}\underset{2m}{\{y\}}, \tag{59}$$

где введена матрица

$$\underset{5\times 2m}{[B]} = \underset{5\times 2}{[L]}\underset{2\times 2m}{[\Phi]}. \tag{60}$$

Введем строку тепловых потоков:

$$\underset{1\times5}{\{q\}^T} = (q^1, q^2, m^1, m^2, q^3), \tag{61}$$

тогда соотношения (49) можно записать в матричной форме:

$$\underset{5\times1}{\{q\}} = \underset{5\times5}{[\Lambda]}\underset{5\times1}{\{G\}}, \tag{62}$$

где введена обобщенная матрица теплопроводности

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} & N^{11} & N^{12} & 0 \\ \lambda^{12} & \lambda^{22} & N^{12} & N^{22} & 0 \\ N^{11} & N^{12} & D^{11} & D^{12} & 0 \\ N^{12} & N^{22} & D^{12} & D^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{33} \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Введем координатную строку

$$\underset{1\times2}{\{\Theta\}^T} = (\Theta^{(0)}, \Theta^{(1)}), \tag{64}$$

тогда из (39) и (40) следует, что имеет место соотношение:

$$\underset{2\times1}{\{\Theta\}} = \underset{2\times2}{[C]}\underset{2\times1}{\{u\}}, \tag{65}$$

где обозначена обобщенная матрица теплоемкости

$$\underset{2\times2}{[C]} = \begin{pmatrix} C^{(0)} & C^{(1)} \\ C^{(1)} & C^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{66}$$

С учетом (55) получаем

$$\underset{2\times1}{\{\Theta\}^{\bullet}} = \underset{2\times2}{[C]}\underset{2\times2m}{[\Phi]}\underset{2m\times1}{\{y\}^{\bullet}}. \tag{67}$$

Преобразуем теперь (47) к матричному виду

$$\underset{2\times1}{\left\{q_\Sigma\right\}} = \underset{2\times2m}{[A_\Sigma]}\underset{2m\times1}{\{y\}} - \underset{2\times1}{\{q_{\Sigma e}\}}, \tag{68}$$

где введены матрицы

$$\begin{gathered} \underset{2\times2m}{[A_\Sigma]} = \underset{2\times2}{[A]}\underset{2\times2m}{[\Phi]}, \\ \underset{2\times2}{[A]} = \begin{bmatrix} A^{(0)} & A^{(1)} \\ A^{(1)} & A^{(2)} \end{bmatrix}, \\ \underset{1\times2}{\left\{q_\Sigma\right\}^T} = (q_\Sigma^{(0)}, q_\Sigma^{(1)}), \\ \underset{1\times2}{\left\{q_{\Sigma e}\right\}^T} = (q_{\Sigma e}^{(0)}, q_{\Sigma e}^{(1)}). \end{gathered} \tag{69}$$

Введем также координатный столбец тепловых потоков на торцевой поверхности

$$\underset{1\times 2}{\{q_T\}^T} = (q_T^{(0)}, q_T^{(1)}). \tag{70}$$

Тогда вариационное уравнение (48) можно записать для отдельного КЭ в матричной форме

$$\int\limits_{\Sigma_{e0}} (\underset{1\times 5}{\{q\}^T}\, \underset{5\times 1}{\delta\{G\}} + \underset{1\times 2}{\{\dot{\Theta}\}^T}\, \underset{2\times 1}{\delta\{u\}} + \underset{1\times 2}{\{q_T\}^T}\, \underset{2\times 1}{\delta\{u\}} + \underset{1\times 2}{\{q_\Sigma\}^T}\, \underset{2\times 1}{\delta\{u\}})d\Sigma = 0. \tag{71}$$

Подставляя в это уравнение соотношения (57), (63), (68), (69) и (55), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\underset{1\times 2m}{\{\dot{y}\}^T}\, \underset{2m\times 2m}{[M]} + \underset{1\times 2m}{\{y\}^T}\, \underset{2m\times 2m}{[K]} + \underset{2m\times 1}{\{f\}} = 0, \tag{72}$$

где введены обозначения для основных матриц

$$\begin{gathered}
\underset{2m\times 2m}{[K]} = \int\limits_{\Sigma_{e0}} \underset{2m\times 5}{[B]^T}\, \underset{5\times 5}{[\Lambda]}\, \underset{5\times 2m}{[B]} d\Sigma, \\
\underset{2m\times 2m}{[M]} = \int\limits_{\Sigma_{e0}} \underset{2m\times 2}{[\Phi]^T}\, \underset{2\times 2}{[C]}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} d\Sigma, \\
\underset{2m\times 1}{\{f\}} = \underset{2m\times 1}{\{f_1\}} + \underset{2m\times 1}{\{f_2\}}, \\
\underset{2m\times 1}{\{f_1\}} = \int\limits_{\Sigma_{e0}} \underset{1\times 2}{\{q_T\}^T}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} d\Sigma, \quad \underset{2m\times 1}{\{f_2\}} = \int\limits_{\Sigma_{e0}} \underset{1\times 2}{\{q_\Sigma\}^T}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} d\Sigma.
\end{gathered} \tag{73}$$

Преобразуем $\{f_2\}$ с учетом (69)

$$\underset{2m\times 1}{\{f_2\}} = \int\limits_{\Sigma_{e0}} (\underset{1\times 2m}{\{y\}^T}\, \underset{2m\times 2}{[\Phi]^T}\, \underset{2\times 2}{[A]}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} - \underset{1\times 2}{\{q_{\Sigma e}\}^T}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]}) d\Sigma_0 = \underset{1\times 2m}{\{y\}^T}\, \underset{2m\times 2m}{[\hat{A}]} - \{f_3\}.$$

где обозначены:

$$\begin{gathered}
\underset{2m\times 2m}{[\hat{A}]} = \int\limits_{\Sigma_e} \underset{2m\times 2}{[\Phi]^T}\, \underset{2\times 2}{[A]}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} d\Sigma, \\
\underset{2m\times 1}{\{f_3\}} = \int\limits_{\Sigma_e} \underset{1\times 2}{\{q_{\Sigma e}\}^T}\, \underset{2\times 2m}{[\Phi]} d\Sigma.
\end{gathered} \tag{74}$$

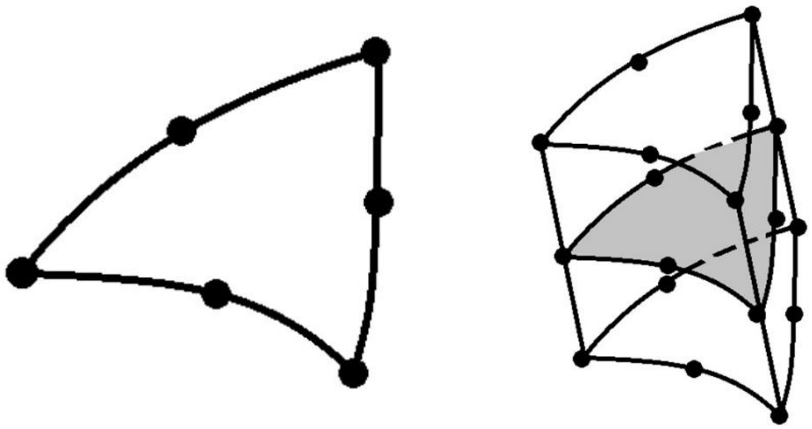
Тогда уравнение (73) принимает вид:

$$\underset{2m\times 2m}{[M]}\, \underset{2m\times 1}{\{\dot{y}\}} + \left(\underset{2m\times 2m}{[K]} + \underset{2m\times 2m}{[\hat{A}]} \right) \underset{2m\times 1}{\{y\}} + \underset{2m\times 1}{\{f_1\}} - \underset{2m\times 1}{\{f_3\}} = 0 \tag{75}$$

— это итоговое разрешающее уравнение разработанного метода.

Разработка программного модуля и результаты его тестирования. Был разработан программный модуль в составе ПК SMCM, созданного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерного инженерного моделирования и разработки программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НОЦ «СИМПЛЕКС») [22], который реализует предложенный метод решения нестационарной задачи теплопроводности для тонких оболочек.

КЭ сетки для данного метода были построены 2 способами: был разработан тестовый генератор призматических КЭ сеток (рис. 2), на основе генератора 2D оболочечных сеток, разработанного в ПК SMCM, а также использовались призматические сетки на основе оболочечных сеток, полученные с помощью ПК ANSYS.



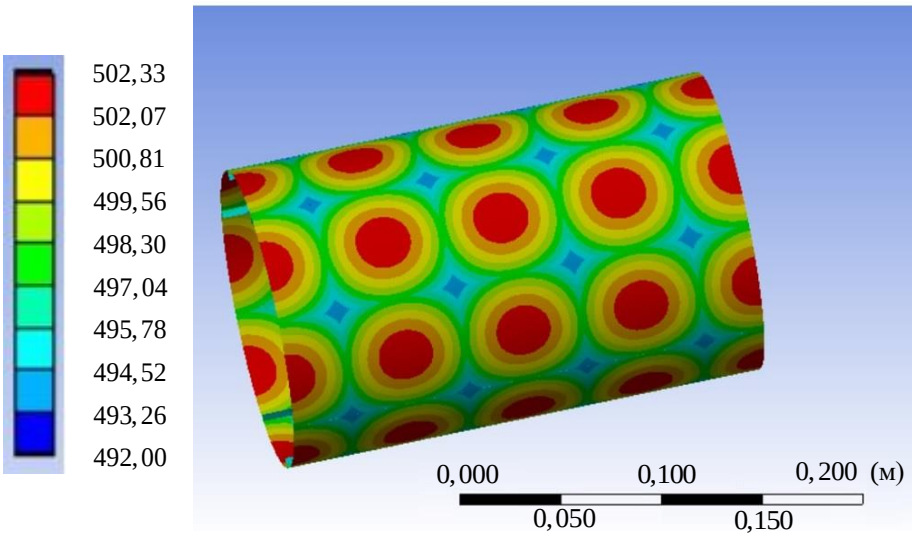
а *б*

Рис. 2. Призматическая КЭ сетка:
а — узловой КЭ на срединной поверхности оболочки;
б — 18 узловой призматический трехмерный КЭ,
соответствующий узловой КЭ

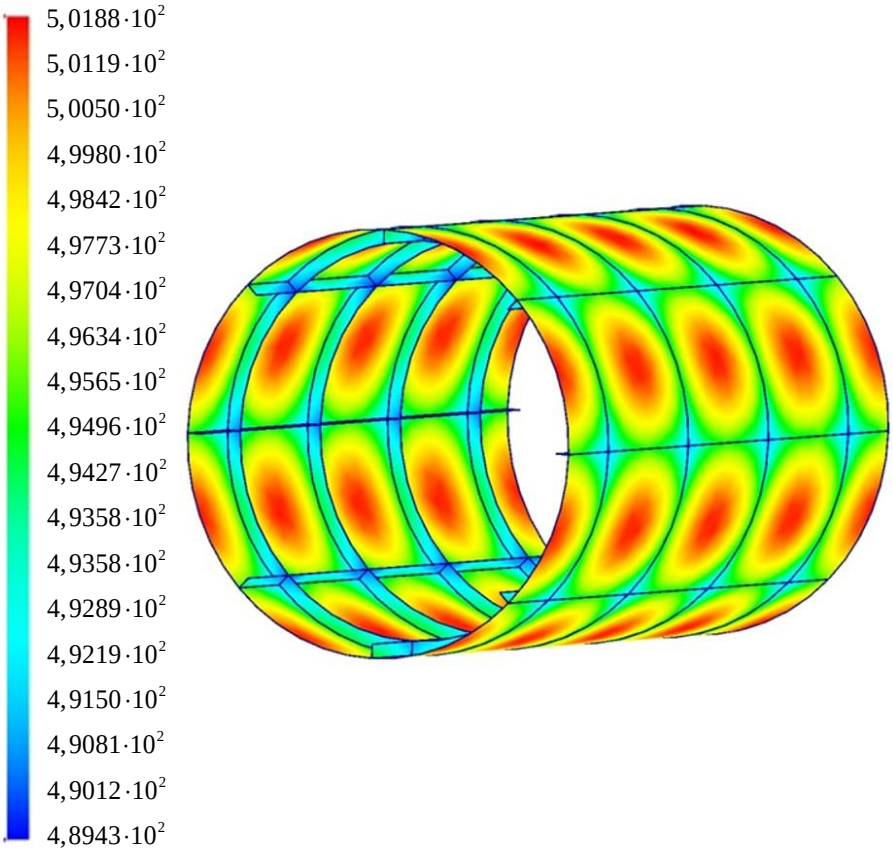
Было проведено тестирование разработанного программного модуля для тонкостенной цилиндрической оболочечной конструкции с продольно-поперечным подкреплением (рис. 3), причем элементы подкрепления рассматривались также как оболочечные элементы, а не как фиктивные слои, как это реализуется во многих моделях оболочек.

При тестовых расчетах использовались следующие исходные данные: все элементы оболочки — однослойные, материал слоев — типичный молибденовый сплав с характеристиками: $\rho = 10200$ кг/м^3, $\lambda^{\alpha\alpha} = 135$ Вт/м·К, $c = 244$ Дж/кг·К, $\alpha_+ = 250$ Вт/м^2·К, $\alpha_- = 0$, $\theta_{e+} = 10^3$ К, $h = 5$ мм. Время нагрева: 60 секунд.

Результаты расчетов показаны на рис. 3…6.

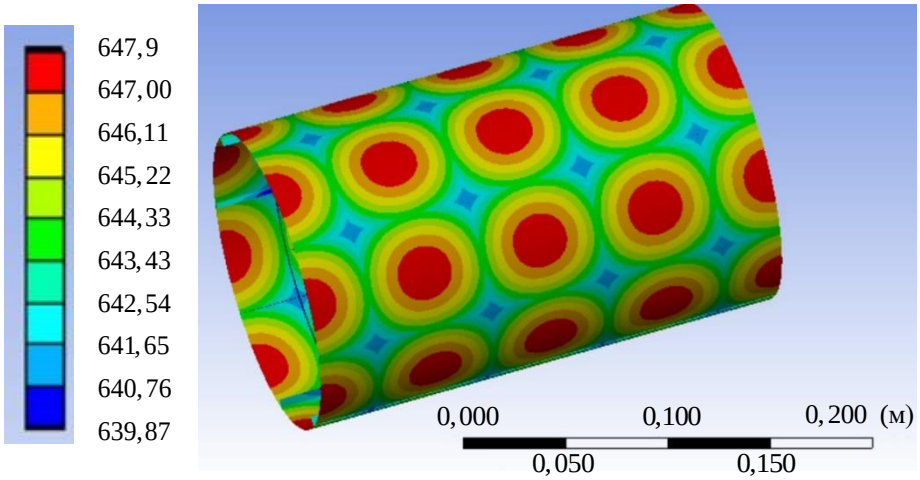


а

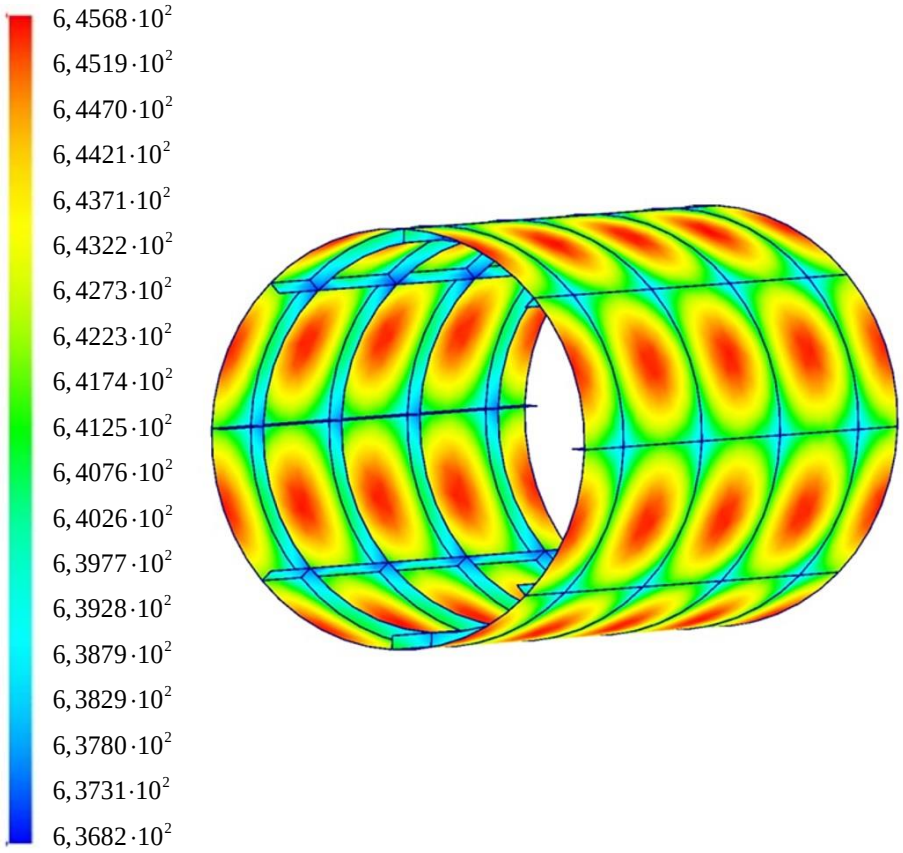


б

Рис. 3. Температурное поле в оболочечной конструкции на срединной поверхности при $t = 20$ с, К:
а — ПК ANSYS; *б* — ПК SMCM

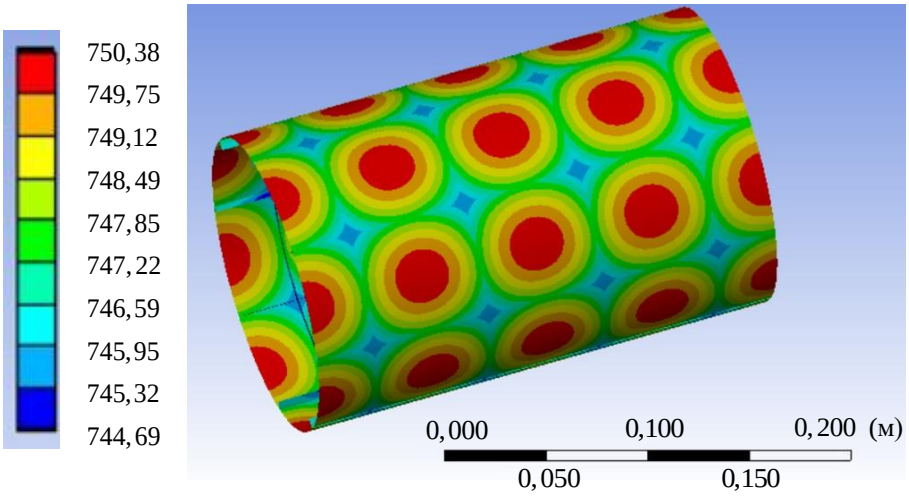


а

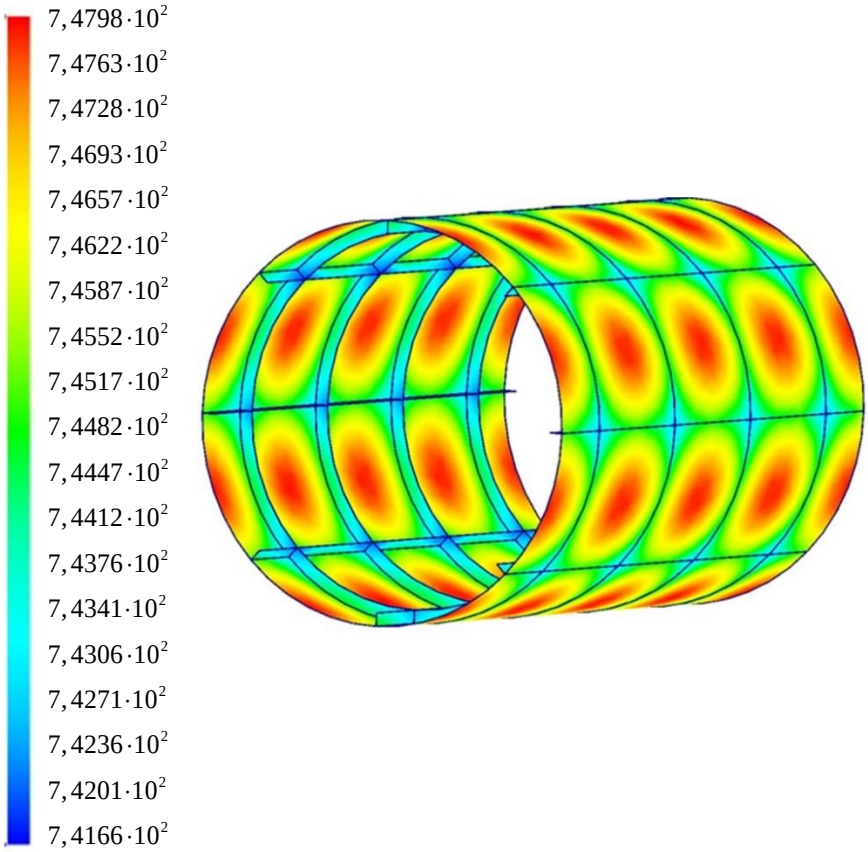


б

Рис. 4. Температурное поле в оболочечной конструкции на срединной поверхности при $t = 40$ с, К:
а — ПК ANSYS; *б* — ПК SMCM



а



б

Рис. 5. Температурное поле в оболочечной конструкции на срединной поверхности при $t = 60$ с, К:
а — ПК ANSYS; *б* — ПК SMCM

Для оценки качества полученного решения проводилось сравнение с результатами, полученными с помощью оболочечного решателя ПК ANSYS. Результаты сравнения решений температурного поля на срединной поверхности оболочечной конструкции приведены в таблице 1. Относительное отклонение результатов расчетов вычислялось по формуле: $\Delta = \frac{\theta_A - \theta_M}{\theta_A} \cdot 100\ \%$, где θ_A — значение температуры, вычисленное с помощью ПК ANSYS, а θ_M — значение температуры, вычисленное с помощью ПК SMCM.

Результаты тестовых расчетов показали, что разработанный метод и программный модуль в составе ПК SMCM, обеспечивают хорошее согласование расчетов, получаемых с помощью ПК ANSYS.

Таблица 1

Результаты сравнения температурного поля на срединной поверхности оболочечной конструкции, полученные с помощью ПК SMCM и ПК ANSYS

Время t, с	Максимальная/ минимальная температура θ_M, К (ПК SMCM)	Максимальная/ минимальная температура θ_M, К (ПК ANSYS)	Относительная погрешность Δ, %
20	501,88 / 489,40	503,33 / 492,00	0,28 / 0,53
40	645,68 / 636,80	647,90 / 639,90	0,34 / 0,49
60	747,98 / 741,66	750,38 / 744,69	0,32 / 0,40

Выводы. Разработана математическая модель расчета нестационарных температурных полей в тонкостенных оболочечных многослойных конструкциях. Модель основана на вариационной постановке нестационарной задачи теплопроводности в произвольных криволинейных координатах. Предложена методика конечно-элементной решения вариационной постановки задачи. Разработан программный модуль, реализующий данную методику. Проведенные тестовые результаты расчетов температурных полей для случая одностороннего нагрева цилиндрической подкрепленной оболочки и их сравнение с аналогичными результатами расчетов в ПК ANSYS показали, что разработанный алгоритм и программный модуль обеспечивают достаточно хорошее совпадение результатов. Разработанная математическая модель и программный модуль могут быть применены для практического решения задач расчета нестационарных температурных полей в оболочках сложной геометрической формы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. Москва, Физматлит, 2018, 448 с.
[2] Подстригач Я.С., Швец Р.Н. *Термоупругость тонких оболочек*. Киев, Наукова думка, 1983, 343 с.
[3] Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. Киев, Наукова думка, 1970, 308 с.
[4] Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. *Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек*. Киев, Наукова думка, 1986, 223 с.
[5] Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. Ленинград, Политехника, 1991, 656 с.
[6] Бакулин В.Н. *Методы оптимального проектирования и расчёта композиционных конструкций*. Том 1. Москва, Физматлит, 2008, 256 с.
[7] Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. Москва, Физматгиз, 1961, 384 с.
[8] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.
[9] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1980, 375 с.
[10] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 271 с.
[11] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.
[12] Гольденвейзер А.Л. *Теория тонких упругих оболочек*. Москва, Наука, 1976, 512 с.
[13] Zhang D., Luo Zh., Xuan W. Simulation analysis of temperature field in the heat transfer process of shell. *Physics Procedia*, 2012, vol. 25, pp. 92–98.
[14] Feng X., Liu W., Liu Ch. Thermal-mechanical coupling analysis of functionally graded cylindrical shells. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 576, art. no. 012006.
[15] De Sousa Alves B., Laforest M., Sirois F. 3-D finite-element thin-shell model for high-temperature superconducting tapes. *IEEE Transactions on Applied Superconductivit*, 2022, vol. 32, iss. 2, art. no. 7500411.
[16] Sargsyan S.H. Thermoelasticity of thin shells on the basis of asymmetrical theory of elasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 2009, vol. 32, no. 8, pp. 791–818.
[17] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с. 16–40.
[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные метод*ы, 2018, № 3, с. 114–132.
[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[20] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление.* Москва, Высшая школа, 2001, 575 с.
[21] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 542 с.

[22] Свидетельство № 2020663790 *Программа TermalStressPCM_HT_Manipula для конечно-элементного расчета термонапряжений в конструкциях конического типа из тканевых полимерных композиционных материалов при воздействии высокотемпературного газового потока, с учетом криволинейной анизотропии и термодеструкции материала*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, М.Н. Коряков, С.В. Сборщиков, А.А. Захаров, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2020662965; заявл. 26.10.2020; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 02.11.2020 — [1].

Статья поступила в редакцию 14.11.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Коряков М.Н., Маремшаова А.В. Конечно-элементное моделирование температурных полей в тонкостенных многослойных оболочечных элементах конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 1, с. 43–63.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Коряков Михаил Николаевич — ведущий инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru

Маремшаова Анастасия Александровна — инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru

Finite element modeling of temperature fields in thin-walled multilayer anisotropic shells

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, M.N. Koryakov, A.A. Maremshaova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of developing a model for calculating temperature fields in thin-walled multilayer curvilinear-anisotropic thin shells of arbitrary geometric shape, including composite ones, is considered. As a rule, to solve this problem, a specific coordinate notation of the equations of the theory of heat conduction is used, which creates certain difficulties for calculating complex composite shells. In this paper, it is proposed to use an invariant record of the variational formulation of problems in the theory of heat

conduction, followed by the application of the finite element algorithm procedure. As a result, a matrix differential equation is derived for determining the temperature field at the nodes of a finite element mesh. A software module has been developed for the finite element solution of the problem of non-stationary thermal conductivity of shells. The module functions as part of the SMCM software package, created at the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Systems, Bauman Moscow State Technical University (REC SIMPLEX). An example of solving the problem of calculating a non-stationary temperature field in a cylindrical shell with longitudinal-transverse reinforcement is given. Comparison of numerical simulation with similar calculations in the ANSYS software was carried out, which showed the high accuracy of the proposed method: the relative deviation of the results does not exceed 0,5 %.

Keywords*: thin-walled shells, temperature fields, heat conduction problem, variational statement, finite element modeling*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composite structures under high temperatures*. Springer, 2016, 434 p.
[2] Podstrigach Ya.S., Shvets R.N. *Termouprugost' tonkih obolochek* [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 343 p.
[3] Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1970, 308 s.
[4] Karnaukhov V.G., Kirichok I.F. *Svyazannye zadachi teorii vyazkouprugih plastin i obolochek* [Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986, 223 p.
[5] Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I. *Linejnaya teoriya tonkih obolochek* [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Polytechnic Publ., 1991, 656 p.
[6] Bakulin V.N. *Metody optimal'nogo proektirovaniya i raschyota kompozicionnyh konstrukcij* [Methods of optimal design and calculation of composite structures. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 256 p.
[7] Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnyh obolochek* [Theory of anisotropic shells]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 384 p.
[8] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnyh plastin I obolochek iz kompozicionnyh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
[9] Bolotin V.V., Novikov Yu.N. *Mekhanika mnogoslojnyh konstrukcij* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 375 p.
[10] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstrukcii iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 271 p.
[11] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.
[12] Goldenweiser A.L. *Teoriya tonkih uprugih obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 512 p.
[13] Zhang D., Luo Zh., Xuan W. Simulation analysis of temperature field in the heat transfer process of shell. *Physics Procedia*, 2012, vol. 25, pp. 92–98.
[14] Feng X., Liu W., Liu Ch. Thermal-mechanical coupling analysis of functionally graded cylindrical shells. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 576, art. no. 012006.

[15] De Sousa Alves B., Laforest M., Sirois F. 3-D finite-element thin-shell model for high-temperature superconducting tapes. *IEEE Transactions on Applied Superconductivit*, 2022, vol. 32, iss. 2, art. no. 7500411.
[16] Sargsyan S.H. Thermoelasticity of thin shells on the basis of asymmetrical theory of elasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 2009, vol. 32, no. 8, pp. 791–818.
[17] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Timoshenko-type asymptotic theory for thin multi-layered plates shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 16–40.
[18] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Modeling of the stresses in thin composite cylindrical shells based on the asymptotic theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 114–132.
[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 575 p.
[21] Zenkevich O. *Metod konechnyh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 542 p.
[22] Certificate no. 2020663790 *Programma TermalStressPCM_HT_Manipula dlya konechno-elementnogo rascheta termonapryazhenij v konstrukciyah konicheskogo tipa iz tkanevyh polimernyh kompozicionnyh materialov pri vozdejstvii vysokotemperaturnogo gazovogo potoka, s uchetom krivolinejnoj anizotropii i termodestrukcii materiala* [TermalStressPCM_HT_Manipula program for finite element calculation of thermal stresses in conical-type structures made of fabric polymer composite materials under the influence of high-temperature gas flow, taking into account curvilinear anisotropy and thermal degradation of the material] / Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, M.N. Koryakov, S.V. Sobshchikov, A.A. Zakharov, I.O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2020662965; application 26.10.2020; registered in the register of computer programs 02.11.2020 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Koryakov M.N., lead engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru

Maremshaova A.A., engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: maremshaowa.nasti@mail.ru