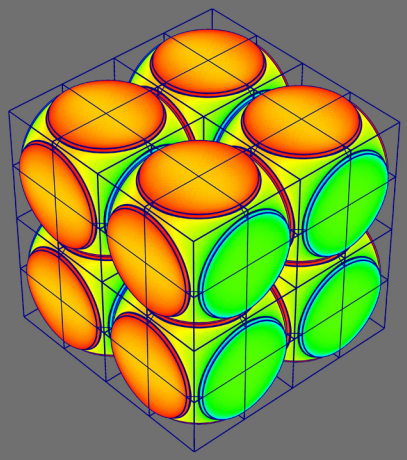
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Хайиткулов Б.Х. Математическое моделирование нестационарной задачи конвекции-диффузии об оптимальном выборе местоположения источников тепла. Математическое моделирование и численные методы, 2023, No 1, с. 32–42.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/300/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 15:31:10

УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-3242

Математическое моделирование нестационарной задачи конвекции–диффузии об оптимальном выборе местоположения источников тепла

© Б.Х. Хайиткулов

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан

Данная работа посвящена численному решению нестационарной задачи оптимального размещения источников тепла минимальной мощности. Постановка задачи требует одновременного выполнения двух условий. Первое условие — обеспечить нахождение температуры в пределе минимальных и максимальных температур за счет оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью в параллелепипеде. Второе условие заключается в том, чтобы суммарная мощность источников тепла, используемых для обогрева, была минимальной. Эта задача изучалась в стационарных условиях в работах других учёных. Однако в нестационарном случае задача не рассматривалось. Поскольку найти непрерывное решение краевой задачи сложно, то ищем численное решение задачи. Трудно найти интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Найдено численное значение функции Грина в виде матрицы. Предложен новый алгоритм численного решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа. Предложена новая методика численного решения. Построена математическая и численная модель процессов, описываемых уравнением конвекции-диффузии, заданным для первой краевой задачи. Краевая задача изучается для трёхмерного случая. Для численного решения задачи использовалась неявная конечно-разностная схема. По этой схеме была создана система разностных уравнений. Сформированная система разностных уравнений приведена к задаче линейного программирования. Задача линейного программирования решается с помощью М-метода. При каждом значении времени решается задача линейного программирования. Предложен новый подход к численному решению задач. Приведена общая блок-схема алгоритма решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью. Разработан алгоритм и программное обеспечение для численного решения задачи. Приведено краткое описание программного обеспечения. На конкретных примерах показано, что численное решение краевой задачи находится в заданных пределах, сумма оптимально размещенных источников тепла с минимальной мощностью дает минимум функционалу. Визуализированы результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: *нестационарные задачи, оптимальное размещение, источники тепла, уравнения конвекции-диффузии, М-метод*

Введение. Одним из самых распространенных объектов в различных сферах деятельности человека является система источников тепла, тепловой баланс в отапливаемых помещениях. Математическое моделирование таких систем ставит задачу об оптимальном размещении источников тепла в отапливаемых помещениях, что

связано с ресурсосберегающими инженерными технологиями. Задача оптимального размещения источников тепла отапливаемых площадей всегда была актуальной при проектных работах в строительстве, теплицах и других технических и технологических сферах. Задачи этого типа были изучены для стационарного случая. Однако задача оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью для нестационарного случая не изучена.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. В работе [3] рассмотрена задача энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В работе [4] изучена дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принцип максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности. В работе [5] изучена задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением теплопроводности. Управляющий параметр задан в граничном условии и достиг минимума функционала, задаваемого интегральным квадратичным выражением. Показан метод нахождения допустимого управления, дающего минимум функционалу.

В работах [6–8] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой. В работе [9] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [10] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в работах [11–13] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе рассмотрена задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и

сведения к задаче линейного программирования. В работе предлагаются метод и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах, путем оптимального размещения источников тепла в параллелепипеде. Для проведения вычислительных экспериментов было разработано программное обеспечение.

Постановка задачи и ее конечномерная аппроксимация. В области $D=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ p\le z\le q, 0\le t\le T\}$ требуется найти функцию $f(x,y,z,t)\ge 0$ такую, что для любого $t\in[0,T]$ линейный функционал

$$J\{f\}=\int_a^b\int_c^d\int_p^q f(x,y,z,t)dzdydx\to\min \tag{1}$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\chi(x,y,z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-v(x,y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+$$
$$f(x,y,z,t),\quad a<x<b,\ c<y<d,\ p<z<q,\ 0<t\le T,$$
$$u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z),$$
$$u(a,y,z,t)=\mu_1(y,z,t),\ u(b,y,z,t)=\mu_2(y,z,t),$$
$$u(x,c,z,t)=\mu_3(x,z,t),\ u(x,d,z,t)=\mu_4(x,z,t),$$
$$u(x,y,p,t)=\mu_5(x,y,t),\ u(x,y,q,t)=\mu_6(x,y,t),$$
$$a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ p\le z\le q,\ 0<t\le T, \tag{2}$$
$$m(x,y,z,t)\le u(x,y,z,t)\le M(x,y,z,t),\quad (x,y,z,t)\in D, \tag{3}$$

где $u=u(x,y,z,t)$ — температура в точке (x,y,z) параллелепипеда в момент времени t; $\chi(x,y,z)>0$ — коэффициент диффузии (температуропроводности); $v(x,y,z)$ — скорость конвекции по соответствующим направлениям; $u_0(x,y,z)$, $\mu_1(y,z,t)$, $\mu_2(y,z,t)$, $\mu_3(x,z,t)$, $\mu_4(x,z,t)$, $\mu_5(x,y,t)$, $\mu_6(x,y,t)$, $m(x,y,z,t)$, $M(x,y,z,t)$ — заданные непрерывные функции. Функции $m(x,y,z,t)$, $M(x,y,z,t)$ — имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x,y,z,t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Пусть

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\chi(x,y,z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+v(x,y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Оператор L, определенный в $L_2(D)$, имеет обратный L^{-1}. Здесь L^{-1} — интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)–(3) в следующем виде:

$$\begin{gathered} m(x,y,z,t) \le (L^{-1}f)(x,y,z,t) \le M(x,y,z,t), \\ f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in L_2(D), \quad f(x,y,z,t) \ge 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (3)–(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в D равномерную по четырем переменным разностную сетку

$$\begin{gathered} \bar{\omega}^{\tau}_{h_1h_2h_3} = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}_{h_3} \times \bar{\omega}^{\tau}; \\ \{(x_i, y_j, z_k, t_s):\ x_i = ih_1,\ y_j = jh_2,\ z_k = kh_3, \\ t_s = s\tau,\ i = \overline{0, N_1}, \\ j = \overline{0, N_2},\ k = \overline{0, N_3},\ s = \overline{0, N_4}\} \end{gathered}$$

с шагами

$$\begin{gathered} h_1 = (b-a)/N_1,\ h_2 = (d-c)/N_2, \\ h_3 = (q-p)/N_3, \quad \tau = T/N_4. \end{gathered}$$

Неявная разностная схема для задачи (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{u^{s+1}_{ijk} - u^{s}_{ijk}}{\tau} = \chi_{ijk}\left(\dfrac{u^{s+1}_{i+1\,jk} - 2u^{s+1}_{ijk} + u^{s+1}_{i-1\,jk}}{h_1^2} + \dfrac{u^{s+1}_{ij+1k} - 2u^{s+1}_{ijk} + u^{s+1}_{ij-1k}}{h_2^2} + \right. \\ \left. + \dfrac{u^{s+1}_{ijk+1} - 2u^{s+1}_{ijk} + u^{s+1}_{ijk-1}}{h_3^2} \right) - v_{ijk}\left(\dfrac{u^{s+1}_{i+1\,jk} - u^{s+1}_{i-1\,jk}}{2h_1} + \dfrac{u^{s+1}_{ij+1k} - u^{s+1}_{ij-1k}}{2h_2} + \dfrac{u^{s+1}_{ijk+1} - u^{s+1}_{ijk-1}}{2h_3} \right) + \\ f^{s+1}_{ijk}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ k = \overline{1, N_3 - 1},\ s = \overline{0, N_4 - 1}, \\ u^{0}_{ijk} = u_0(x_i, y_j, z_k), \\ u^{s+1}_{0\,jk} = \mu_1(y_j, z_k, t_{s+1}), \quad u^{s+1}_{N_1 jk} = \mu_2(y_j, z_k, t_{s+1}), \\ u^{s+1}_{i0k} = \mu_3(x_i, z_k, t_{s+1}), \quad u^{s+1}_{iN_2 k} = \mu_4(x_i, z_k, t_{s+1}), \\ u^{s+1}_{ij0} = \mu_5(x_i, y_j, t_{s+1}), \quad u^{s+1}_{ijN_3} = \mu_6(x_i, y_j, t_{s+1}), \\ i = 0,1,\ldots,N_1, \quad j = 0,1,\ldots,N_2, \quad k = 0,1,\ldots,N_3, \quad s = 0,1,\ldots,N_4 - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \chi_{ijk} = \chi(x_i, y_j, z_k),\ v_{ijk} = v(x_i, y_j, z_k), \\ f^{s+1}_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k, t_{s+1}). \end{gathered}$$

Введем обозначения

$$\overline{XYZ} = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_{ijk}}{h_1^2} + \frac{2\chi_{ijk}}{h_2^2} + \frac{2\chi_{ijk}}{h_3^2} \right),$$

$$X^+ = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_1^2} + \frac{v_{ijk}}{2h_1} \right), \; X^- = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_1^2} - \frac{v_{ijk}}{2h_1} \right),$$

$$Y^+ = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_2^2} + \frac{v_{ijk}}{2h_2} \right), \; Y^- = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_2^2} - \frac{v_{ijk}}{2h_2} \right),$$

$$Z^+ = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_3^2} + \frac{v_{ijk}}{2h_3} \right), \; Z^- = \left(-\frac{\chi_{ijk}}{h_3^2} - \frac{v_{ijk}}{2h_3} \right).$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{XYZ} & Z^+ & 0 & \dots & 0 & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Z^- & \overline{XYZ} & Z^+ & 0 & \dots & 0 & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & 0 & \dots & 0 & Z^- & \overline{XYZ} & Z^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & 0 & \dots & 0 & Z^- & \overline{XYZ} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$G = A^{-1}.$$

Аппроксимируем задачу (1)–(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область D по x, y, z, t соответственно на N_1, N_2, N_3, N_4 равных частей:

$$D = \bigcup_{s=1}^{N_4} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{k=1}^{N_3} D_{ijk}^s,$$

где

$$D_{ijk}^s = \{(x,y,z,t), x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j, z_{k-1} \le z \le z_k, t_{s-1} \le t \le t_s\},$$

$$i = \overline{1, N_1}, \; j = \overline{1, N_2},$$

$$k = \overline{1, N_3}, \; s = \overline{1, N_4}.$$

В пространстве $L_2(D)$ функции

$$f_{ijk}^s = f(x_i, y_j, z_k, t_s), \; (x,y,z,t) \in D_{ijk}^s,$$

$$(i = \overline{1, N_1 - 1}, \; j = \overline{1, N_2 - 1}, \; k = \overline{1, N_3 - 1}, \; s = \overline{1, N_4})$$

определяются как кусочно-постоянные функции. Отсюда получим

$$f(x,y,z,t) \approx \sum_{s=1}^{N_4} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{k=1}^{N_3-1} f_{ijk}^s.$$

Пусть

$$g_{rw} = G,\ m_{ijk}^s = m(x_i, y_j, z_k, t_s),\ M_{ijk}^s = M(x_i, y_j, z_k, t_s),$$
$$\tilde{f}_w^s = f_{ijk}^s,\ r = w,\ N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)(N_3 - 1),$$
$$w = (i-1)(N_2 - 1)(N_3 - 1) + (j-1)(N_3 - 1) + k,$$
$$r = \overline{1, N},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ k = \overline{1, N_3 - 1},\ s = \overline{1, N_4}.$$

Подставим выражение $f(x,y,z,t)$ в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$J_s\{f\} = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{k=1}^{N_3-1} (\mathrm{mes} D_{ijk}^s) f_{ijk}^s \to \min,\quad s = 1, 2, ..., N_4,$$
$$m_{ijk}^s \le \sum_{w=1}^{N} g_{rw} \tilde{f}_w^s \le M_{ijk}^s,\ r = 1, 2, ..., N, \qquad (6)$$
$$i = \overline{1, N_1 - 1},\quad j = \overline{1, N_2 - 1},\quad k = \overline{1, N_3 - 1},\quad s = \overline{1, N_4},$$
$$\tilde{f}_w^s \ge 0,\ w = 1, 2, ..., N,\quad s = 1, 2, ..., N_4.$$

Задача (6) решается М-методом [14–15]. Численное решение задачи (2) находится с помощью

$$u_{ijk}^s = \sum_{w=1}^{N} g_{rw} \tilde{f}_w^s.$$

Найденная $\tilde{f}_w^s$ является функцией, дающей минимум функционалу (1).

Результаты вычислительных экспериментов. Для приближенного решения задачи (1)–(6) разработано программное обеспечение на языке C#. Оно позволяет представлять все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, а также функции температуры, начальные и краевые условия, в виде скриптов. Для представления результатов разработаны графические модули.

Эксперимент 1. Требуется найти оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью в параллелепипеде. Задача решалась при следующих входных данных: в расчетной области используется куб $x, y, z \in [0, 1]$ с функциями температуропроводности $\chi(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$ м^2/с и компонентами скорости

$v(x,y,z)=xyz$ м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями:

$$u_0(x,y,z)=2+x^2+y^2+z^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_1(y,z,t)=2+y^2+z^2+t^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_2(y,z,t)=3+y^2+z^2+t^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_3(x,z,t)=2+x^2+z^2+t^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_4(x,z,t)=3+x^2+z^2+t^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_5(x,y,t)=2+x^2+y^2+t^2 \text{ м/с},$$
$$\mu_6(x,y,t)=3+x^2+y^2+t^2 \text{ м/с}.$$

Минимальная и максимальная температуры задаются функциями $m(x,y,z,t)=1+x^2+y^2+z^2+t^2$ К, $M(x,y,z,t)=4+x^2+y^2+z^2+t^2$ К, а окончание времени $T=1$. Расчетная сетка с числом источников

$$(N_1-1)\times(N_2-1)\times(N_3-1)\times N_4=6\times6\times6\times7.$$

Минимальное значение функционала при численном решении равно $J_{\min}=13{,}59$ К·м/с. На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (6). Представлены результаты с минимальным (границы с синим цветом, ниже), максимальным (границы с красным цветом, выше) и приближенным (зеленым цветом, посередине) значением температуры. На рис. 2 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью в виде гистограммы.

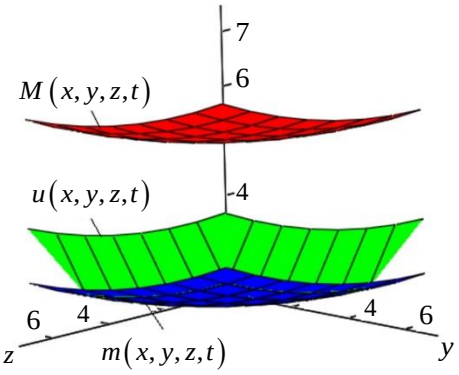


Рис. 1. График решения задачи (6) при $x=0{,}5;\ t=T$

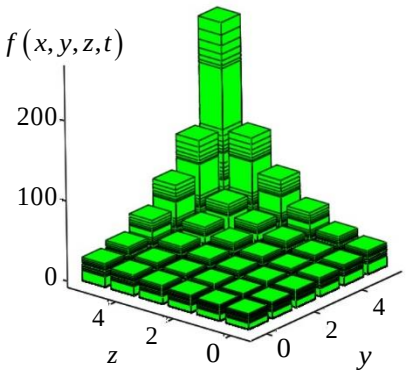


Рис. 2. Оптимальное расположение источников тепла $f(x,y,z,t)$

Эксперимент 2. Требуется найти оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью в параллелепипеде. Задача решалась при следующих значениях входных параметров (рис. 3, 4):

$$x, y, z \in [0,1],\ \chi(x,y,z) = xyz\ \text{м}^2/\text{с},\ v(x,y,z) = x^2y^2z^2\ \text{м/с},$$
$$u_0(x,y,z) = 2 + x^2 + y^2 + z^2\ \text{м/с},\ \mu_1(y,z,t) = 2 + y^2 + z^2 + t^2\ \text{м/с},$$
$$\mu_2(y,z,t) = 3 + y^2 + z^2 + t^2\ \text{м/с},\ \mu_3(x,z,t) = 2 + x^2 + z^2 + t^2\ \text{м/с},$$
$$\mu_4(x,z,t) = 3 + x^2 + z^2 + t^2\ \text{м/с},\ \mu_5(x,y,t) = 2 + x^2 + y^2 + t^2\ \text{м/с},$$
$$\mu_6(x,y,t) = 3 + x^2 + y^2 + t^2\ \text{м/с},$$
$$m(x,y,z,t) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2\ \text{К},$$
$$M(x,y,z,t) = 4 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2\ \text{К},\ T = 1,$$
$$(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times (N_3 - 1) \times N_4 = 6 \times 6 \times 6 \times 7,$$
$$J_{\min} = 21{,}69\ \text{К} \cdot \text{м/с}.$$

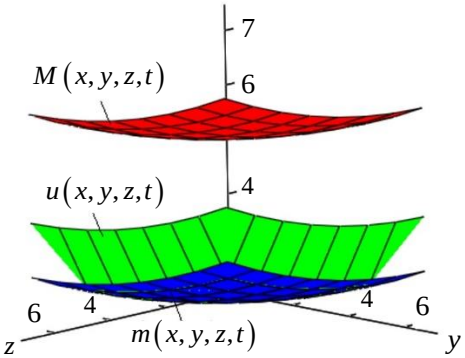


Рис. 3. График решения задачи (6) при $x = 0{,}5;\ t = T$

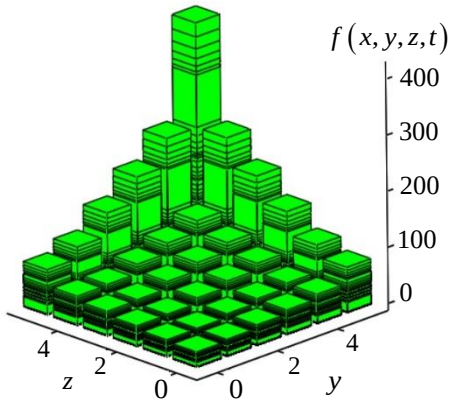


Рис. 4. Оптимальное расположение источников тепла $f(x,y,z,t)$

Как видно из рис. 1 и 3, решение краевой задачи лежит в пределе минимальных и максимальных температур, т.е. удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение $u(x,y,z,t)$ практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал $J_s\{f\}$ достигает минимума.

На рис. 2 и 4 мощность оптимально размещенных источников тепла отображается в виде гистограммы. Высота столбцов на гистограмме указывает на мощность источников тепла. Черные линии на рисунке образованы наложением источников тепла в каждый фиксированный момент времени.

Выводы. Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в параллелепипеде. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного

решения задач линейного программирования. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект ОТ-Ф4-33).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н. Задача оптимального выбора координат доразбуривания добывающих скважин на нефтяных месторождениях. *Автоматика и телемеханика*, 2002, № 11, с. 3–12.

[2] Мирская С.Ю, Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. *Технико-технологические проблемы сервиса*, 2014, № 4(30), с. 75–78.

[3] Сабденов К.О, Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*, 2015, т. 326, № 8, с. 53–60.

[4] Исламов Г.Г, Коган Ю.В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2008, вып. 1, с. 121–126.

[5] Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управлении процессом теплопроводностис квадратичным функционалом качества. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2017, т. 57, № 12, с. 2053–2064.

[6] Хайиткулов Б.Х. Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*, 2021, № 57, с. 45–52.

[7] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.

[8] Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 85–98.

[9] Тухтасинов М.Т., Абдуолимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. *Бюллетень Института математики*, 2019, № 5, с. 1–10.

[10] Лебо И.Г., Симаков А.И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. *Вестник МГТУ МИРЭА*, 2019, № 3(4), с. 195–205.

[11] Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1998, т. 38, № 2, с. 207–219.

[12] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва, ЛИБРОКОМ, 2015, 248 с.

[13] Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2012, т. 15, № 4, с. 359–369.

[14] Dantzig G.B. *Linear programming and extensions*. Princeton, Princeton University Press, 2016, 656 p.

[15] Фомин Г.П. *Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 3-е изд.* Москва, Финансы и статистика, 2009, 640 с.

Статья поступила в редакцию 11.07.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Хайиткулов Б.Х. Математическое моделирование нестационарной задачи конвекции–диффузии об оптимальном выборе местоположения источников тепла. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 1, с. 32–42.

Хайиткулов Бобомурод Хайитович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Алгоритмы и технологии программирования» Национального Университета Узбекистана. e-mail: b.hayitqulov@mail.ru

Mathematical modeling of the non-stationary convection-diffusion problem on the optimal choice of heat sources location

© B.Kh. Khayitkulov

National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Uzbekistan

This work is devoted to the numerical solution of the non-stationary problem of optimal placement of heat sources of minimum power. The statement of the problem requires the simultaneous fulfillment of two conditions. The first condition is to ensure that the temperature is within the limits of minimum and maximum temperatures due to the optimal placement of heat sources with a minimum power in the parallelepiped. The second condition is that the total power of the heat sources used for heating is minimal. This problem was studied under stationary conditions in the works of other scientists. However, the problem was not considered in the non-stationary case. Since it is difficult to find a continuous solution to the boundary value problem, we are looking for a numerical solution to the problem. It is difficult to find an integral operator with a continuous kernel (Green's function). The numerical value of the Green's function is found in the form of a matrix. A new algorithm for the numerical solution of a non-stationary optimal control problem for the placement of heat sources with a minimum power in processes described by parabolic partial differential equations is proposed. A new technique for numerical solution is proposed. A mathematical and numerical model of the processes described by the convection-diffusion equation given for the first boundary value problem is constructed. The boundary value problem is studied for the three-dimensional case. An implicit finite difference scheme was used to solve the problem numerically. According to this scheme, a system of difference equations was created. The formed system of difference equations is reduced to a linear programming problem. The problem of linear programming is solved using the M-method. For each time value, a linear programming problem is solved. A new approach to the numerical solution of problems is proposed. A general block diagram of the algorithm for solving the non-stationary problem of optimal control of the placement of heat sources with a minimum power is given. An algorithm and software for the numerical solution of the problem have been developed. A brief description of the software is given. On specific examples, it is shown that the numerical solution of the boundary value problem is within the specified limits, the sum of optimally placed heat sources with a minimum power gives a minimum to the functional. The results of the computational experiment are visualized.

Keywords: *non-stationary problems, optimal placement, heat sources, convection-diffusion equations, big M method*

REFERENCES

[1] Akhmetzyanov A.V., Kulibanov V.N. Optimal choice of coordinates for oil well drilling. *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, no. 11, pp. 1699–1706.

[2] Mirskay S.Yu., Sidelnikov V.I. Efficient heating of the room as the optimal control problem. *Tehniko-tehnologicheskie problemy servisa* [Technical and Technological Problems of Service], 2014, no. 4(30), pp. 75–78.
[3] Sabdenov K.O., Baytasov T.M. Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov* [News of Tomsk Polytechnic University. Geo-Resource Engineering], 2015, vol. 326, no. 8, pp. 53–60.
[4] Islamov G.G., Kogan Yu.V. The difference-differential problem of control by diffusion process. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, iss. 1, pp. 121–126.
[5] Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Control of a heat conduction process with a quadratic cost functional. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 2005–2016.
[6] Khaitkulov B.Kh. Finite-difference method for solving non-stationary problems of convection-diffusion control. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2021, no. 57, pp. 45–52.
[7] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.
[8] Khaitkulov B.Kh. Conservative difference schemes for the optimal selection of the location of heat sources in the rod. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 3, pp. 85–98.
[9] Tukhtasinov M., Abduolimova G.M., Khayitkulov B.Kh. Granichnoe upravlenie rasprostraneniem tepla v ogranichennom tele [Boundary control of heat propagation in a bounded body]. *Bjulleten' Instituta matematiki* [Bulletin of the Institute of Mathematics], 2019, no. 1, pp. 1–10.
[10] Lebo I.G., Simakov A.I. Solution of the equation "convection-diffusion" for modelling of heat transfer in high temperature gases and plasma. *Vestnik MGTU MIREA* [Bulletin of MSTU MIREA], 2019, no. 3(4), pp. 195–205.
[11] Vabishevich P.N., Samarskiy A.A. Raznostnye skhemy dlya nestacionarnyh zadach konvekcii-diffuzii [Difference schemes for nonstationary convection-diffusion problems]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1998, vol. 38, no. 2, pp. 207–219.
[12] Samarskiy A.A., Vabishevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach konvekcii-diffuzii* [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow, LIBROCOM Publ., 2015, 248 p.
[13] Vabishchevich P.N., Vasil'eva M.V. Explicit-implicit schemes for convection-diffusion-reaction problems. *Numerical Analysis and Applications*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 297–306.
[14] Dantzig G.B. *Linear programming and extensions*. Princeton, Princeton University Press, 2016, 656 p.
[15] Fomin G.P. *Matematicheskie metody i modeli v kommercheskoj deyatel'nosti: uchebnik. – 3-e izd.* [Mathematical methods and models in commercial activity: textbook. – 3rd ed.]. Moscow, Finance and Statistics Publ., 2009, 640 p.

Khayitkulov B.Kh., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor of the Department of Algorithms and Programming Technologies of the National University of Uzbekistan. e-mail: b.hayitqulov@mail.ru