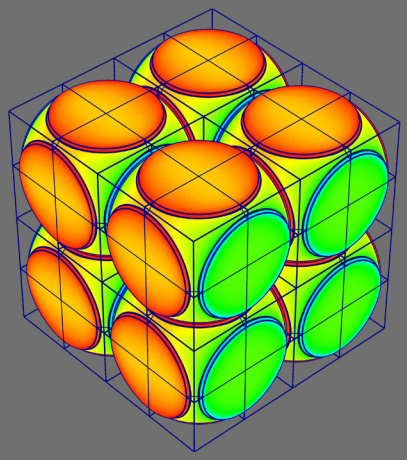
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Горский В. В., Сысенко В. А. Моделирование расхода газа через ламинарный пограничный слой на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №4 (4), с. 88-94

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/30/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 06:48:58

УДК 533.16

Моделирование расхода газа через ламинарный пограничный слой на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке

© В.В. Горский[1,2], В.А. Сысенко[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

[2] ОАО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов Московской обл., 143966, Россия

Приведены результаты оценки точности для инженерной методики расчета массового расхода газа через ламинарный пограничный слой на полусфере из работы [1]. Предложена аналогичная инженерная методика повышенной точности.

Ключевые слова: *массовый расход, пограничный слой, воздушный поток, газовый поток, термохимическое равновесие, тепломассоперенос.*

Введение. Расчет массового расхода газа через ламинарный пограничный слой широко используют в теории пограничного слоя. В процессе численного решения уравнений пограничного слоя этот расход находят изопределяющего его из интегрального выражения [1]. Однако при использовании различных интегральных решений уравнений пограничного слоя информация о расходе газа может быть получена только путем введения определенных допущений о профилях газодинамических функций в пограничном слое.

Для полусферы, в частности, в работе [1] приведена методика расчета расхода газа через ламинарный пограничный слой, полученная способом эффективной длины и скорректированная по результатам строгих численных решений уравнений пограничного слоя. Однако информация о точности этой методики в литературе отсутствует.

Решению этой задачи и рассмотрению возможности построения более корректной методики этого типа на базе систематических решений уравнений ламинарного пограничного слоя и посвящена данная работа.

Расчетно-теоретические исследования, результаты которых приведены далее, получены в широком диапазоне изменения определяющих факторов: числа Маха M_∞ в набегающем воздушном потоке, давления торможения p_0 этого потока и энтальпийного фактора R_h, под которым понимают отношение энтальпии воздуха при температуре «стенки» к энтальпии торможения газового потока. Под термином «стенка» здесь и далее понимают поверхность тела, обтекаемую набегающим на него газовым потоком.

Исследования выполнены для многокомпонентной газовой смеси в пограничном слое на абсолютно каталитичной «стенке», находящейся в состоянии термохимического равновесия с расчетом диффузионного тепломассопереноса в рамках уравнений Стефана – Максвелла.

В процессе проведения исследований принято:

- химический состав газовой смеси ограничен набором химических веществ O, O2, N, N2, NO, Ar, образованных из химических элементов O, N, Ar;
- в нормальных условиях воздух характеризуется следующим мольным химическим составом [2]:

$$\kappa_{O_2} = 0,2095; \quad \kappa_{N_2} = 0,7808; \quad \kappa_{Ar} = 0,0097;$$

- область изменения определяющих параметров задана в виде

$$M_\infty \in \left[4,25\right], \; p_0 \in \left[0,001, p_{max}\right], \; R_h \in \left[R_{h,\,min}, R_{h,\,max}\right];$$

- для расчета переносных свойств многокомпонентной газовой смеси использован метод Гиршфельдера [3];
- использованы потенциальная функция межмолекулярного взаимодействия Леннарда – Джонса [3] и методика расчета параметров этой функции из [4], базирующаяся на современных расчетно-теоретических данных по вязкости воздуха, находящегося в состоянии термохимического равновесия [5, 6];
- использованы уточненные данные по параметрам идеального газа, набегающего на «стенку», полученные методом сплайновой аппроксимации [7];
- давление торможения измеряется в МПа;
- $p_{max} = 10$ при $M_\infty > 10$ и $p_{max} = 1$ в противном случае;
- $R_{h,\,min}$ — значение энтальпийного фактора, соответствующее температуре «стенки», равной примерно 300 K;
- Значение $R_{h,\,max}$ минимально в диапазоне между 0,7 и значением энтальпийного фактора, соответствующим температуре кипения атомарного углерода.

Результаты расчетно-теоретических исследований. Массовый расход газа через пограничный слой exp относится к числу важных характеристик пограничного слоя и определяется интегральным выражением вида

$$\exp = 2\pi r \int_0^{y_e} \rho u dy, \qquad (1)$$

где y — координата, отсчитываемая от «стенки» в направлении внешней нормали к ней; r — удаление образующей сферы от оси,

проходящей через ее «критическую точку» в направлении вектора скорости набегающего газового потока; ρ, u — плотность газовой смеси и тангенциальная составляющая вектора скорости в пограничном слое. Индекс e относится к внешней границе пограничного слоя.

При использовании переменных ξ, η Лиза – Дородницына $\xi(s) = \int_0^s \rho_e \mu_e u_e r^2 ds'$; $\eta(s, y) = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy'$ и безразмерной функции тока f, определяемой выражением $f = u/u_e$, формула (1) принимает вид

$$\exp = 2\pi f_e \sqrt{2\xi}. \quad (2)$$

Здесь s — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль образующей сферы от ее «критической точки», т.е. от точки торможения набегающего на сферу газового потока; f_e — значение безразмерной функции тока на условной внешней границе пограничного слоя, на которой координата η_e удовлетворяет условию $|1 - f_\eta| < 0,005$ при $\eta > \eta_e$. Индекс η означает частную производную по этой координате.

Численное интегрирование уравнений пограничного слоя в данной работе проведено на неравномерной сетке по координате η, в которой шаг между узлами этой координаты увеличивается по определенному закону по мере удаления от «стенки».

В работе [1] приведена следующая приближенная формула для расчета массового расхода газа через тонкий ламинарный пограничный слой на непроницаемой «стенке» для полусферы:

$$\exp(s) = 2\pi 3,3 \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x_{\text{eff}}(s)}. \quad (3)$$

Здесь μ_e — коэффициент динамической вязкости газа; $x_{\text{eff}}(s)$ — длина цилиндра, обтекаемого газовым потоком с параметрами, соответствующими точке полусферы с координатой s, для которого выполняются условия [8]:

- равенства удельного теплового потока в его концевом сечении аналогичному потоку на полусфере в точке с координатой s;
- равенства интегрального теплового потока к поверхности цилиндра аналогичному потоку на поверхности полусферы, ограниченной сверху сечением с координатой s.

На рис. 1 приведены результаты сопоставления расхода газа через пограничный слой по поверхности полусферы, рассчитанные по формуле (3), с аналогичными результатами численных решений уравнений пограничного слоя. Здесь $\Xi_{\exp} = \exp_{\text{lit}}/\exp_{\text{num}}$; $\alpha_{\text{eff}} = \pi/2 - s$ — эффективный угол атаки, рад; $\alpha_{\text{eff, lim}} = \max(\alpha_{\text{eff}}; 0,01)$ — эффектив-

ный угол атаки, ограниченный снизу значением, равным 0,01; $\exp_{num}$ — толщина потери импульса, найденная в результате численного решения уравнений пограничного слоя.

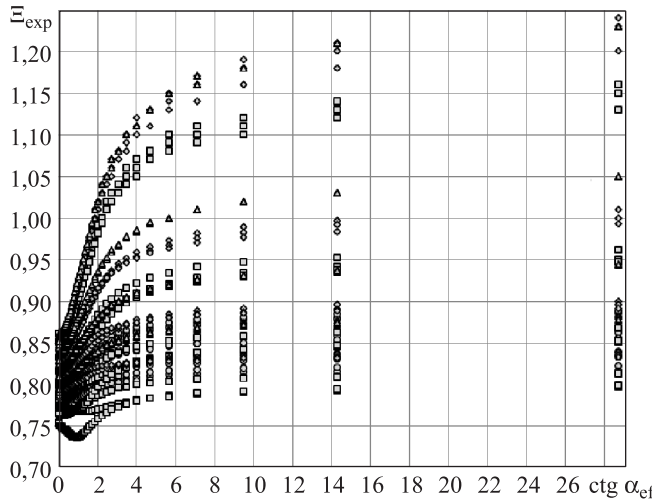


Рис. 1. Зависимость отношения массового расхода газа через ламинарный пограничный слой, полученного по формуле (3) из работы [1] и в результате численного решения уравнений пограничного слоя, от эффективного угла атаки:

M_∞ = 25 (○○○); 15 (□□□); 8 (◊◊◊); 4 (ΔΔΔ)

Как следует из рассмотрения представленных данных, погрешность инженерного расчета по формуле (3) не превышает примерно 25 %, что является приемлемым для многих технических приложений. В то же время актуально проведение исследований, направленных на создание аналогичной инженерной методики расчета расхода газа через пограничный слой, характеризуемой существенно меньшей погрешностью, чем формула (3).

Как показали результаты проведенных исследований, наиболее просто эта задача решается путем:

- введения поправочной функции к формуле (3), т.е. расчета расхода газа через пограничный слой по формуле

$$\exp_{eng}\left(\alpha_{eff}\right) = \exp_{lit}\left(\alpha_{eff}\right) F_{exp}\left(R_h, \alpha_{eff,\,lim}\right); \qquad (4)$$

- введения функции $\xi\left(\alpha_{eff,\,lim}\right)$, определенной на области $\left[0,1\right]$, вида

$$\zeta\left(\alpha_{eff,\,lim}\right) = \frac{1}{3}\min\left[6, \operatorname{ctg}\left(\alpha_{eff,\,lim}\right)\right]\left\{1 - \frac{1}{12}\min\left[6, \operatorname{ctg}\left(\alpha_{eff,\,lim}\right)\right]\right\};$$

- расчета поправочной функции по формуле

$$F_{\text{exp}} = \left[0,8 + \left(0,0056 + 0,2789 R_h - 0,3961 R_h^2 + 1,0883 R_h^3 \right) \zeta \left(\alpha_{\text{eff, lim}} \right) \right]^{-1}.$$

На рис. 2 представлено сопоставление расходов газа через ламинарный пограничный слой на поверхности полусферы, рассчитанных по формулам (3) и (4), с аналогичными данными, полученными в рамках численного решения уравнений пограничного слоя. Здесь $\Xi_{\text{exp}, k} = \text{exp}_k / \text{exp}_{\text{lit}}$; $k = \text{lit, eng, num}$.

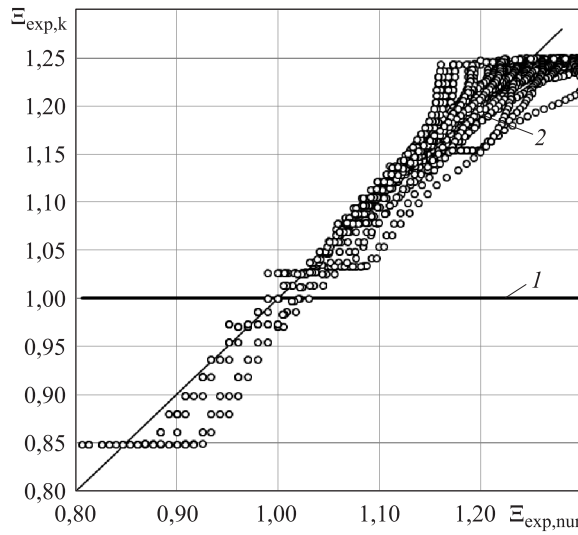


Рис. 2. Сопоставление массового расхода газа через ламинарный пограничный слой на полусфере, рассчитанного по формулам (3) и (4), с аналогичными данными, полученными в рамках численного решения уравнений пограничного слоя:
1 — k = lit; *2* — k = eng

Из представленных на этом рисунке данных следует, что переход в инженерных расчетах от использования формулы (3) к применению формулы (4) позволяет качественно снизить погрешность. Так, в частности, максимальная погрешность вычислений снижается при этом с 25 до 9 %.

Выводы. Установлено, что погрешность широко используемой на практике инженерной формулы, предназначенной для расчета толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое на полусфере, сопряжена с внесением в расчет погрешностей, достигающих 25 %.

Предложена модификация этой формулы, применение которой позволяет снизить максимальную погрешность вычислений до 9 %.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др. *Конвективный теплообмен летательных аппаратов*. Москва, Физматлит, 2014, 377 с.

[2] Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С. и др. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000 К и давлений от 0,00001 до 100 атмосфер).* Москва, ВЦ АН СССР, 1962, 268 с.

[3] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. *Молекулярная теория газов и жидкостей*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961, 929 с.

[4] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.

[5] Соколова И.А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент. В кн.: *Физическая кинетика, Аэрофизические исследования*. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР. Сб. трудов № 4, 1974, с. 39–104.

[6] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, no. 11, pp. 279–289.

[7] Горский В.В. Метод сплайновой аппроксимации. *Журнал вычислительной математики и математической физики РАН*, 2007, т. 47, № 6, с. 939–943.

[8] Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике*. В.К. Кошкин, ред. Москва, Машиностроение, 1975, 624 с.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Горский В.В., Сысенко В.А. Моделирование расхода газа через ламинарный пограничный слой на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 88–94.

Горский Валерий Владимирович родился в 1939 г., окончил Московский авиационный институт им. Серго Ордоникидзе в 1963 г. Главный научный сотрудник ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ.

Сысенко Валентина Алексеевна родилась в 1978 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2001 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела аэродинамики ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Автор 12 научных работ в области прикладной математики. e-mail: dv-sys@yandex.ru

Simulation of gas flow through the laminar boundary layer on the hemisphere surface in a supersonic air flow

© V.V. Gorskiy[1,2], V.A. Sysenko[2]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia",
Reutov-town, Moscow Region, 143966, Russia

The article presents estimated accuracy of the engineering design procedure of the mass flow rate of gas through the laminar boundary layer on a hemisphere of [1]. A similar engineering method of extra accuracy is proposed.

Keywords: *mass flow, boundary layer, air flow, gas flow, thermochemical equilibrium, heat and mass transfer.*

REFERENCES

[1] Zemlyanskiy B.A., Lunev V.V., Vlasov V.I. *Konvektivnyi teploobmen letatelnykh apparatov* [Thermal convection of Aircraft]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 377 p.

[2] Predvoditelev A.S., Stupochenko E.V., Pleshanov A.S. *Tablitsy termodinamicheskikh funktsiy vozdukha (dlya temperature ot 200 do 6000 K i davleniya ot 0,00001 do 100 atm.)* [Tables of air thermodynamic functions (for temperatures between 200 and 6000 K and pressures from 0.00001 to 100 atm)]. Moscow, Vychislitelnyi Tsentr AN SSSR Publ., 1962, 268 p.

[3] Girshfelder G., Kertis Ch., Berd R. *Molekulyarnaya teoriya gazov i zhidkostey* [Molecular theory of gases and liquids]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1961, 929 p.

[4] Gorskiy V.V., Fedorov S.N. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal — Journal of Engineering Thermophysics,* 2007, vol. 80, no. 5, pp. 97–101.

[5] Sokolova I.A. Koeffitsienty perenosa i integraly stolknoveniy vozdukha i ego component [Transfer coefficients and collision integrals of air and its components]. In: *Fizicheskaya kinetika. Aerofizicheckie issledovaniya* [Physical kinetics. Aerophysical research]. Novosibirsk, Proceedings of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics SO AS USSR, no. 4, 1974, pp. 39–104.

[6] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, no. 11, pp. 279–289.

[7] Gorskiy V.V. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i vychislitelnoy fiziki RAN — Journal of Computational Mathematics and Computational Physics RAS*, 2007, vol. 47, no. 6, pp. 939–943.

[8] Avduevskiy V.S., Galitseyskiy B.M., Glebov G.A. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Fundamentals of heat transfer in the aviation and aerospace technology]. Koshkin V.K., ed. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 624 p.

Gorskiy V.V. (b.1939) graduated from Moscow Aviation Institute named after Sergo Ordzhonikidze in 1963. Senior staff scientist at the JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia". Dr. Sci. (Eng.), professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 133 publications. Scientific interests: ablation heat protection, high temperature heat-mass transfer, numerical methods of solving equations of mathematical physics.

Sysenko V.A. (b.1978) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2001. Ph.D., senior scientist of the Aerodynamics Department at the JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia". Author of 12 publications in the field of applied mathematics. Scientific interests: high temperature heat-mass transfer, numerical methods of solving equations of mathematical physics. e-mail: dv-sys@yandex.ru