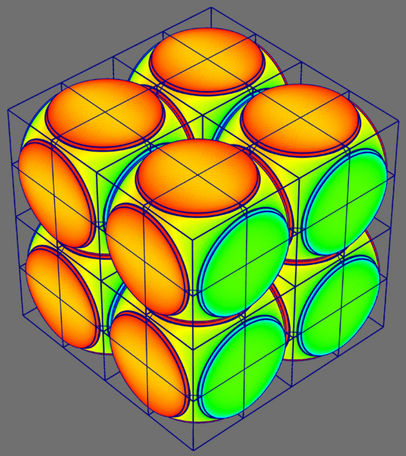
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Гаврюшин С. С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №1 (1), с. 115-130

УДК 539.3:621.01

Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек

© С.С. Гаврюшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Излагаются теоретические основы методики и алгоритмы, разработанные для анализа устойчивости и закритического поведения тонких упругих оболочек. Обсуждается задача численного анализа процесса нелинейного деформирования сферического купола, нагруженного равномерным внешним давлением. Описывается алгоритм численного анализа, основанный на использовании метода продолжения решения по параметру в сочетании с приемом смены подпространства управляющих параметров. Эффективность предложенного алгоритма иллюстрируется примерами расчетов.

Ключевые слова: *гибкая оболочка, нелинейное деформирование, устойчивость, закритическое поведение, численный алгоритм.*

Введение. Исследования в области нелинейного деформирования тонкостенных оболочек имеют большую историю и не потеряли актуальности в наши дни. Практическая важность правильного и точного расчета тонкостенных конструкций, деталей, гибких элементов постоянно привлекала к исследованию многочисленных прикладных задач внимание крупных специалистов. Революционные изменения, связанные с широким использованием современных вычислительных средств в научных исследованиях, заставляют по-новому осмыслить стратегию нелинейного анализа, позволяя отказаться при составлении расчетных схем от многих допущений, казавшихся естественными и неизбежными, и предоставляя возможность существенно расширить класс исследуемых задач.

В настоящей работе дан обзор развития основных идей в области численного моделирования процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. Основное внимание уделяется задаче о напряженном и деформированном состоянии сферической оболочки, нагруженной внешним давлением (задаче, признанной расчетчиками в качестве классической модели). Результаты исследований сферической оболочки выходят далеко за рамки данной конкретной задачи, поскольку позволяют отрабатывать численные алгоритмы и осмысливать характерные особенности поведения тонкостенных конструкций при больших перемещениях. Следует отметить возросшую роль численных методов и алгоритмов расчета, приспособленных для решения задач на современных ЭВМ, в первую очередь метода конечных элементов [1]. Вместе с тем в ряду численных алгоритмов достойное место занимают алгоритмы, базирующиеся на численном решении краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Исторический обзор. Первые экспериментальные исследования поведения сферических оболочек, согласно литературным источникам [2], датируются 1902 годом и принадлежат К. Баху, который обнаружил, что при некотором внешнем давлении, названном впоследствии критическим, сферическая форма оболочки оказывается неустойчивой и на ней появляются вмятины. В 1915 г. Р. Цолли рассмотрел в линейной постановке задачу устойчивости замкнутой тонкой упругой сферической оболочки с учетом допущения о ее пологости и получил формулу для определения наименьшего критического давления. Несколько позднее, в 1917 г., независимое исследование в этой области было проведено Л.С. Лейбензоном, поэтому формула для критического давления сферической оболочки получила известность как формула Цолли – Лейбензона:

$$Q_{\text{кр}} = \frac{2E}{\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}}\left(\frac{h}{R}\right)^2, \tag{1}$$

где E — модуль упругости материала оболочки; μ — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки; R — радиус кривизны сферической оболочки.

Определенные этапы в развитии исследования нелинейного поведения оболочек связаны с опубликованием в 1938 г. К. Маргерром [3] дифференциальных уравнений для тонких упругих пологих оболочек конечного прогиба. Появилась возможность учесть нелинейность в процессе деформирования оболочки и получить аналитическое описание процесса потери ее устойчивости посредством прощелкивания и ее закритического поведения. Впоследствии, в 1950 г., Е. Рейсснер [4] предложил уточненную систему дифференциальных уравнений конечных прогибов. Более подробно история развития теории и практики расчетов сферических оболочек отражена в книгах [2, 5–10], а также в обзорах [11, 12].

Решение Месколла. Несмотря на очевидный прогресс, в области расчетной практики возникла проблема, заключающаяся в том, что полученные исследователями теоретические значения верхних критических нагрузок для рассмотренных куполов, как правило, оказались существенно больше экспериментальных (рис. 1).

При анализе экспериментальных результатов создавалось впечатление, что значения верхних и нижних критических нагрузок не подчиняются какой-либо логической закономерности. Для объяснения данных фактов потребовались более корректные исследования, которые бы позволили оценить влияние начальных несовершенств формы купола и уточнить характер процесса нелинейного деформирования, в том числе и в закритической области. К 1966 г. относится одно из первых численных решений задачи об осесимметричном закритическом поведении пологого сферического купола (рис. 2), которое принадлежит Дж. Месколлу [13]. Решение было получено по уравнениям, приведенным в [4], посредством конечно-разностной формализации и итерационного метода Ньютона.

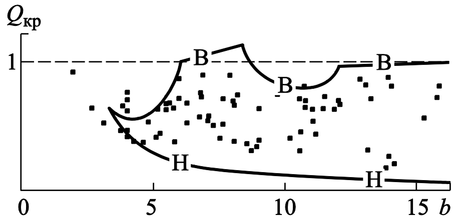


Рис. 1. Теоретическая зависимость верхних (В) и нижних (Н) критических нагрузок пологого сферического купола $Q_{кр}$ от параметра тонкостенности b в сравнении с результатами экспериментов (.)

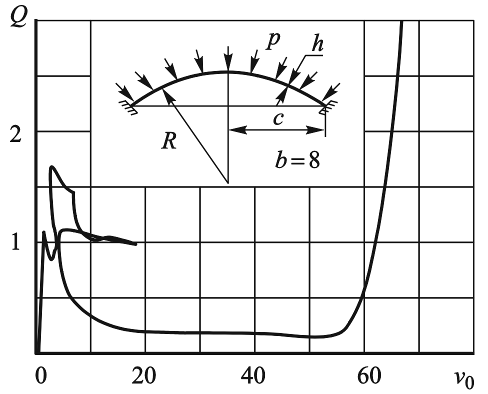


Рис. 2. Зависимость прогиба в центре v_0 для пологой сферической оболочки от безразмерного параметра давления Q [4]

Долгое время после опубликования статьи [13], по-видимому, из-за больших вычислительных трудностей никому не удавалось надежно воспроизвести процесс закритического деформирования купола полностью, а работ самого Месколла не последовало. Вопрос о закритическом поведении купола оставался поэтому до конца не изученным. Самого Месколла и некоторых других исследователей (см. например, [7]) смутил факт появления на упругой характеристике точек самопересечения, которые были неверно истолкованы как точки бифуркации решения.

Забегая несколько вперед, отметим, что к настоящему времени задача Месколла достаточно хорошо изучена. Ее детальный и строгий разбор приведен в книге Э.И. Григолюка и Е.А. Лопаницына [2]. Эти авторы предложили оригинальную и наглядную трактовку представления результатов. Поскольку при анализе осесимметричной деформации купола решается краевая задача для системы дифференциальных уравнений 6-го порядка, решение задачи Коши для заданных условий нагружения и опирания по контуру полностью определяется значениями трех неизвестных компонент начального вектора и параметра нагружения. Графическое представление равновесной траектории, построенной в пространстве с использованием той или иной комбинации этих пара-

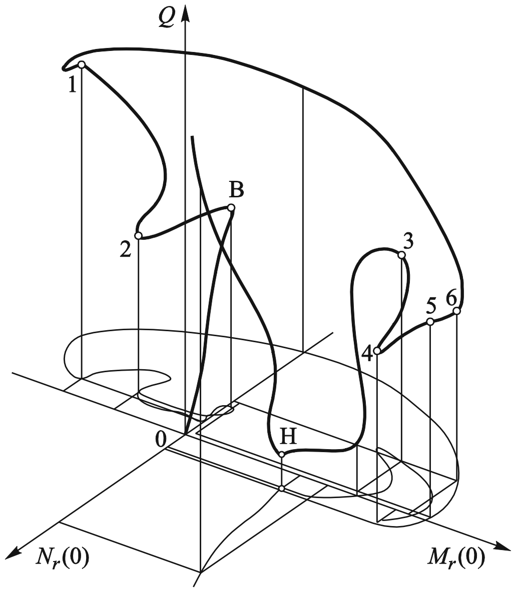


Рис. 3. Траектория нагружения тонкого пологого сферического купола в пространстве $\{Q, N_r(0), M_r(0)\}$ — нагрузка, радиальное усилие и радиальный изгибающий момент в вершине купола [2]

метров (рис. 3), весьма наглядно и снимает вопросы, связанные с фиктивным самопересечением траектории нагружения и неоднозначностью решения.

Метод продолжения решения по параметру и прием смены параметра продолжения. Как до, так и после появления работы Мескола проводилось достаточно большое число исследований, в которых предпринимались попытки численно промоделировать процесс деформирования сферического купола в области конечных перемещений. В качестве методов решения применялись методы малого параметра, Бубнова – Галеркина, Рэлея – Ритца в высших приближениях, конечных разностей и др. При этом исследователи впервые столкнулись с трудностью, а иногда и с невозможностью решения систем нелинейных уравнений, к которым приводились разрешающие уравнения. Практически единственным способом решения систем нелинейных уравнений в то время был *метод продолжения по параметру нагрузки*, заключавшийся в последовательном нахождении решений при пошаговом увеличении внешней нагрузки.

Метод продолжения решения по параметру представляется естественным и в определенной степени универсальным инструментом исследования применительно к классу нелинейных задач, зависящих от параметра.

При дискретном варианте этого метода процесс решения реализовывался по схеме «предиктор-корректор». Для того чтобы получить решение на этапе «предиктор», методами экстраполяции решений на предыдущих шагах по нагрузке строилось начальное приближение, которое затем корректировалось (уточнялось) итерационными методами. Такой способ оказывался вполне работоспособным на устойчивой докритической части траектории нагружения. Однако при подходе к предельной точке якобиан разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений становится плохо обусловленным, и итерационные процессы уточнения решения начинали расходиться.

Пройти предельную точку и попасть на закритическую ветвь траектории оказывалось невозможно. Объяснение, каким образом можно справиться с этой проблемой, было впервые дано в 1968 г. в работе Н.В. Валишвили [14]. Предложенный прием, получивший название *прием смены параметра*, заключался в смене параметра нагружения, в частности в замене параметра нагрузки на параметр прогиба в вершине купола. С современных позиций данное предложение кажется весьма естественным, однако его нельзя было представить в отрыве от формы записи разрешающих уравнений и от алгоритма численной реализации решения на ЭВМ. Для этого потребовалась прозорливость при выборе исходных соотношений и нормировании входящих в уравнение величин. Разрешающие уравнения, использованные Н.В. Валишвили, в определенной степени сохраняли преемственность с соотношениями из работ [3, 4] и предложенными позднее в [15] уравнениями Л.А. Шаповалова, вместе с тем они выгодно отличались более удобной для численного счета структурой записи. Следует особо отметить алгоритм решения однопараметрической нелинейной краевой задачи, при котором она сводилась к решению задачи Коши и к итерационному решению нелинейного операторного уравнения относительно неизвестных параметров в начальном векторе Коши. Разработанная методика расчета оболочек позволила получить решение целого ряда новых задач, нашедших отражение в монографии [16].

Успехи, связанные с внедрением в расчетную практику приема смены параметра, вдохновили многих авторов на ряд работ, в которых идея смены параметра получила дальнейшее развитие. Здесь следует выделить работы Е. Рикса [17] и М. Крисфилда [18], в которых были предложены практические приемы и алгоритмы, использующие идею методов продолжения при численном счете.

В работах Рикса дано теоретическое обобщение предложенного приема. Основная идея заключалась в использовании дополнительного уравнения относительно параметра продолжения λ и уравнивании в правах внешнего параметра нагружения q с внутренними параметрами x_i, характеризующими напряженно-деформированное состояние оболочки. При этом оптимальному параметру продолжения λ можно дать следующее геометрическое толкование. Дополнительное уравнение представляет в пространстве состояний некоторую квазиповерхность $f(\mathbf{X}_{\text{ext}}, \lambda)$, вектор нормали $\mathbf{n}$ к которой в точке пересечения с траекторией равновесных состояний $r(\mathbf{X}_{\text{ext}}, \lambda)$ должен совпадать с направлением касательного вектора $\mathbf{t}$ к этой траектории (рис. 4).

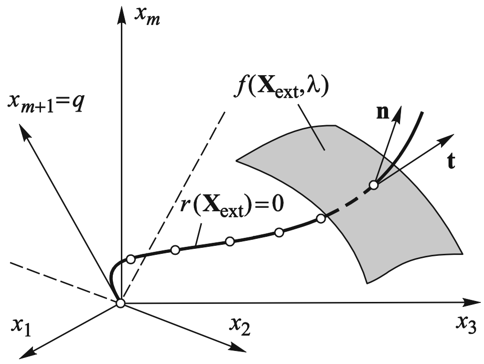


Рис. 4. Геометрическая интерпретация выбора параметра продолжения

Данная трактовка содержит определенное неудобство при решении прикладных задач, связанное с тем обстоятельством, что не совсем ясно, как рационально проводить нормирование (обезразмеривание) неизвестных. Кроме того, параметр продолжения в определенной мере утрачивает физический смысл, что не всегда приемлемо при проведении инженерных расчетов. В современной вычислительной практике, особенно в рамках алгоритмов, приспособленных для использования метода конечных элементов, популярность получил *метод дуговых засечек* (the arc-length method), при котором в качестве параметра продолжения используется длина дуги траектории нагружения в пространстве состояний. Наглядно три варианта выбора параметра продолжения представлены на рис. 5.

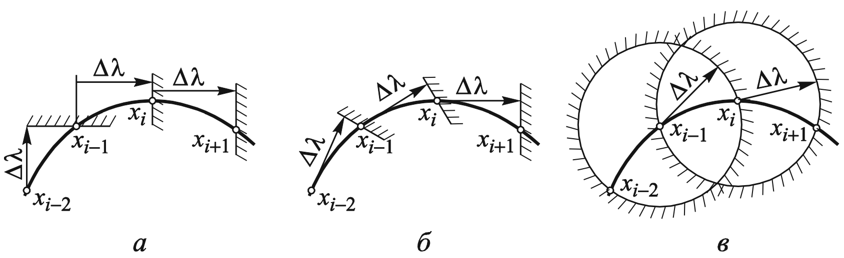


Рис. 5. Геометрическая интерпретация вариантов выбора параметра продолжения, предложенных Валишвили (*а*), Риксом (*б*) и Крисфилдом (*в*)

Анализ и систематизация различных вариантов методов продолжения для решения однопараметрических нелинейных задач проведены в монографии [19]. В монографии [16], по-видимому впервые, отмечается возможность численного исследования нелинейных задач тонких оболочек посредством искусственного введения дополнительных параметров управления (внешних параметров). Для нахождения точки ветвления решения вводится параметр, характеризующий малые начальные несовершенства системы, и решается задача для оболочки с малыми несовершенствами. Полученное решение используется в качестве начального приближения для перехода на ветвь, соответствующую идеальной оболочке. Данная идея получила развитие в работе [20].

Многопараметрический подход и прием смены подпространства управляющих параметров. Характерной особенностью многопараметрического подхода являются построение и изучение поверхности равновесных состояний в пространстве «внешних» параметров. Поверхности равновесных состояний строились в ряде работ с различной целью, в основном иллюстративной. Отметим, что способ построения поверхности путем последовательного решения ряда нелинейных задач для монотонно возрастающего параметра, используемый в большом числе работ, вполне очевиден. Такой подход не содержит новых идей и, по сути, является набором решений однопараметрических задач. Гораздо больший интерес представляют подходы и методы, реализующие движение по гиперповерхности равновесных состояний.

При использовании многопараметрического подхода необходимо обеспечить, чтобы каждая отдельная задача была погружена в многопараметрическое семейство задач, описываемое системами дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Предполагается, что в общем случае система (2), имеющая порядок m, содержит m неизвестных x_{j1} $(j = 1, 2, ..., m)$, являющихся внутренними параметрами, характеризующими состояние системы, и зависит от n переменных x_{j2} $(j = 1, 2, ..., n)$, которые трактуются как внешние параметры, или параметры управления. Параметры управления для частного случая (2) могут входить в описание геометрии элемента, свойств материала, условий закрепления, внешних термомеханических воздействий и т. п. Разделение параметров на две группы в определенной степени условно. В случае однопараметрического семейства вектор $\mathbf{X}_2$ определяется через одну независимую скалярную величину или один параметр — q:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(q). \tag{3}$$

Совокупность всех решений системы (2) для заданного числа $m + n$ внешних и внутренних параметров интерпретируется как некоторая поверхность (гиперповерхность) равновесных состояний, построенная в пространстве параметров $\mathbf{R}^{m+n}$, а каждый однопараметрический процесс — как некоторая траектория на этой поверхности. В пространстве состояний всего семейства задач можно описать последовательные равновесные состояния системы при монотонном изменении только одного из параметров x_{j2} $(j = 1, 2, ..., n)$ при фиксированных значениях остальных $n - 1$ компонент. Такие процессы можно трактовать как однопараметрические задачи. При этом единственный управляющий параметр удобно считать равноправным с остальными параметрами задачи, рассматривая его как $(m + 1)$-ю неизвестную расширенного вектора $\mathbf{X}_{ext}$, и представлять систему уравнений, описывающих однопараметрический процесс, в форме

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}_{\text{ext}}) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Отметим, что порядок системы (4) равен $m + 1$, и ее решение проводят с использованием дополнительного соотношения, содержащего независимую величину λ, называемую параметром продолжения:

$$f(\mathbf{X}_{\text{ext}}, \lambda) = 0. \tag{5}$$

Проекция поверхности равновесных состояний в подпространство управляющих параметров может иметь как регулярные, так и особые точки. В особых точках малое изменение управляющих параметров может вызвать резкий переход системы в новое состояние — бифуркацию или катастрофу [21]. Такие значения параметров управления называют *критическими*, а частные случаи системы (2) — *особыми*, или *вырожденными*. Системы, описывающие реальные процессы, зависят от параметров, которые не могут быть заданы абсолютно точно и, как правило, являются системами общего положения. При численном исследовании нелинейных задач методами продолжения трудности возникают в окрестностях особых точек в силу нарушения условия единственности решений. Традиционно в рамках постбифуркационного анализа исследовалась проблема нахождения всех действительных решений, выходящих из точки бифуркации, так называемая *задача ветвления* [22]. В настоящее время возможности теоретического анализа ограничиваются случаем только однопараметрических задач. Предлагаемая далее стратегия исследования позволяет за счет специальной организации процесса численного счета обойти возникающие трудности.

При численном моделировании используется стратегия последовательного исследования однопараметрических нелинейных задач, принадлежащих многопараметрическому семейству, в которое погружена анализируемая задача, что позволяет выйти на решение задачи численного синтеза конструкции. Алгоритм численного проектирования основан на использовании метода продолжения решения по параметру в сочетании с приемом смены подпространства управляющих параметров.

Известно, что в нелинейных механических системах даже при простых видах возмущения могут возникнуть сложные и труднопредсказуемые переходы. В случае однопараметрического семейства систем общего положения (4) могут иметь место неустранимые особенности только типа складки. Реализация счета при прохождении окрестности предельных точек осуществляется с помощью смены параметра. Особенности коразмерности 2 и выше можно устранить посредством шевеления параметров системы, что принципиально позволяет выбрать траекторию процесса, проходящую мимо окрестностей таких особых точек. Обход особых точек совершается с помощью приема численного счета, названного в [20] *приемом смены подпространства управляю-*

щих параметров. Суть его заключается в следующем: при подходе к окрестности особой точки следует перейти к другой однопараметрической системе (4), для которой проекция равновесной поверхности на ось параметра управления в рассматриваемом диапазоне его изменений не имеет особенностей коразмерности выше единицы. Стратегия численного исследования представляет собой кусочно-гладкий процесс продолжения решения по параметру в пространстве состояний всего семейства задач, причем на каждом гладком участке процесса численный анализ сводится к решению однопараметрической задачи.

Возможности многопараметрического подхода показаны на примере анализа нелинейной деформации шарнирно неподвижно опертой по контуру сферической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением. Для описания нелинейного деформирования использовалась следующая система нелинейных дифференциальных уравнений (величины, соответствующие меридиональному направлению, помечены индексом m, а окружному — t):

$$\frac{du}{dS_0} = (1+\varepsilon_{m0})\cos\theta - \cos\theta_0,$$

$$\frac{dv}{dS_0} = (1+\varepsilon_{m0})\sin\theta - \sin\theta_0,$$

$$\frac{d\theta}{dS_0} = (1+\varepsilon_{m0})\kappa_{m0} + \frac{d\theta_0}{dS_0},$$

$$\frac{dU}{dS_0} = -(1+\varepsilon_{m0})\left(\frac{\cos\theta}{X_0+u}U - \frac{N_t}{X_0+u} + q_u\right),$$

$$\frac{dV}{dS_0} = -(1+\varepsilon_{m0})\left(\frac{\cos\theta}{X_0+u}V + q_v\right),$$

$$\frac{dM_m}{dS_0} = -(1+\varepsilon_{m0})\left(\frac{\cos\theta}{X_0+u}(M_m - M_t) - U\sin\theta + V\cos\theta\right),$$

Дополнительные величины определялись соотношениями

$$\varepsilon_{m0} = \frac{1}{B}(U\cos\theta + V\sin\theta) - \mu\frac{u}{X_0},$$

$$\kappa_{m0} = \frac{M_m}{D} - \mu\frac{X_0+u}{X_0}\left(\frac{\sin\theta}{X_0+u} - \frac{\sin\theta_0}{X_0}\right),$$

$$N_t = \mu(U\cos\theta + V\sin\theta) + Eh\frac{u}{X_0},$$

$$M_t = \mu M_m + \frac{Eh}{12}\frac{X_0+u}{X_0}\left(\frac{\sin\theta}{X_0+u} - \frac{\sin\theta_0}{X_0}\right),$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad D = \frac{Eh^{-3}}{12\left(1-\mu^2\right)},$$

где S_0 — независимая координата, отсчитываемая вдоль дуги недеформированного меридиана оболочки; X_0, X — координаты текущей точки срединной поверхности в исходном и текущем состоянии соответственно; θ_0, θ — углы наклона касательной к меридиану в исходном и текущем состояниях соответственно; u, v — горизонтальная и вертикальная компоненты перемещения; ε_{m0}, κ_{m0} — линейные деформация и кривизна в текущей точке срединной поверхности; U, V — интенсивности внутренних сил; M_m, M_t — интенсивности моментов; q_u, q_v — компоненты внешнего давления.

Анализ проводился в пространстве коразмерности 3. В качестве компонент вектора внешних параметров, описывающих геометрию оболочки, использовались безразмерные параметры *тонкостенности* b и *подъемистости* γ оболочки; нагрузка характеризовалась безразмерным внешним параметром Q, ось состояний системы ассоциировалась с величиной безразмерного прогиба в центре v_0:

$$b = \eta\frac{c}{\sqrt{Rh}}, \ \gamma = \frac{c}{R}, \ Q = \eta\frac{pR^2}{4Eh^2}, \ v_0 = \eta^2\frac{v(0)}{h},$$

$$\eta = \sqrt[4]{12(1-\mu^2)},$$

где c — радиус опорного контура; p — интенсивность равномерного внешнего давления.

На рис. 6 показана часть проекции поверхности равновесных состояний в пространстве $\{Q, b, v_0\}$ для значений параметра b, лежащих в пределах от 3,7 до 4,0. Параметр подъемистости принимался постоянным: γ = 0,09484.

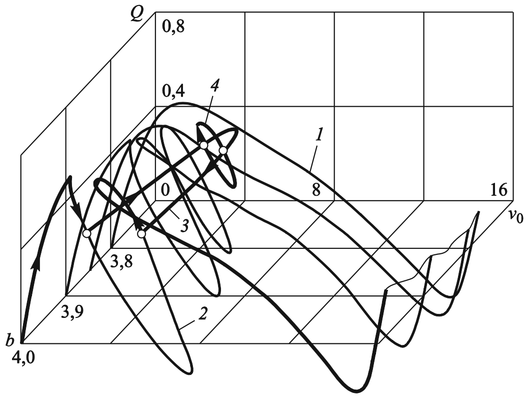


Рис. 6. Использование приема смены подпространства параметров для построения картины перестройки в окрестности бифуркационной точки b = 3,89

Кривые *1* и *2* отвечают значениям параметра b, соответственно равным 3,8 и 4,0. Качественное изменение характера кривых $v_0 = v_0(Q)$ при монотонном изменении b в отмеченном интервале позволяет предположить существование особой точки, соответствующей некоторому критическому значению параметра $b_{\text{кр}1} \approx 3{,}89$, которое можно уточнить посредством сужения рассматриваемого интервала. Важно отметить, что приближение к критическому значению снизу приводит к получению зависимостей, аналогичных кривой *1*. Если же к критическому значению подходить сверху, то кривые подобны кривой *2*. Численные эксперименты показали, что для реализации счета в окрестности критического значения параметра b требуется увеличить точность, иначе наблюдается либо самопроизвольный переход на другую ветвь решения, либо разворот назад, либо стопорение счета. Подобные ситуации, при которых процесс стопорился на неособенных участках кривых, описывались рядом авторов. Важно отметить, что объяснение таких ситуаций следует искать не только в дефектах используемого алгоритма счета, но и в специфических особенностях исследуемого параметрического семейства задач.

Прием смены подпространства внешних параметров позволяет численно исследовать поведение системы в окрестности особой точки. С помощью этого приема можно ответвиться от кривой *2* и построить зависимость (кривая *3*), соответствующую однопараметрическому семейству оболочек (b = var, Q = const). При достижении характерного значения b = 3,80 можно повторно ответвиться от кривой *3* и вновь исследовать задачу в подпространстве (b = const). Таким образом, получена изолированная ветвь (кривая *4*), которая не имеет общих точек с основной кривой b = 3,80 (кривая *1*). Глубину проникновения изолированного решения вдоль оси b можно определить, продолжая счет по кривой *3*, которая также имеет предельную точку ($b \approx 3{,}75$). Очевидно, что при $b < 3{,}75$ изолированные решения отсутствуют. Продолжая счет по кривой 3, можно вернуться на кривую *2* и, двигаясь в обратном направлении, попасть в первоначальную точку ответвления, т. е. завершить тем самым обход окрестности особой точки. Полученная таким образом информация характеризует перестройку в окрестности особой точки $b_{\text{кр}1}$.

При дальнейшем увеличении параметра b траектория решения претерпевает дальнейшие усложнения. На рис. 7 показан характер перестройки поверхности равновесных состояний в окрестности следующей особой точки b_2 = 4,79.

На рис. 7 наглядно видно, как зарождается новое решение, растет и сливается с основной ветвью. Процесс зарождения новых решений продолжается по мере увеличения параметра b, что соответствует усложнению возможного деформирования оболочки.

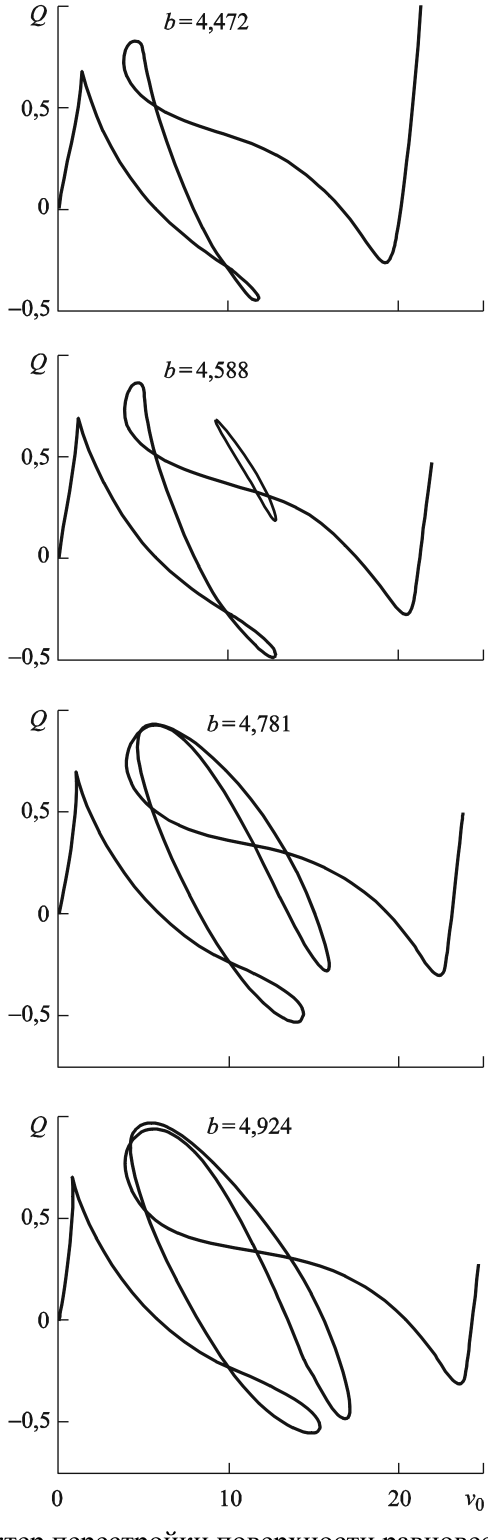


Рис. 7. Характер перестройки поверхности равновесных состояний в окрестности особой точки b_2 = 4,79

Заключение. Изложенная методика численного исследования многопараметрических задач доказала свою ценность и эффективность при решении широкого круга задач нелинейной теории оболочек [23–27] и легла в теоретическую основу алгоритмов и программ, используемых для расчета и проектирования тонкостенных конструкций, деталей и гибких элементов, используемых в современных и перспективных технических системах и устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method*. 3rd ed. New York, McGraw-Hill, 1977, 787 p.

[2] Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. *Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек*. Москва, МГТУ «МАМИ», 2004, 162 с.

[3] Marguerre K. Zur Theorie der gerkrümmten Platte groβer Formänderung. *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech*. Cambridge, Massachusetts, 1938. New York, Wiley, 1939, pp. 93–101.

[4] Reissner E. On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. *Proc. 3rd Sympos. Appl. Math*. New York, McGrow-Hill, 1950, vol. 3, pp. 27–52.

[5] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Физматгиз, 1963, 635 с.

[6] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Физматгиз, 1967, 984 с.

[7] Григолюк Э.И., Кабанов В.В. *Устойчивость оболочек*. Москва, Наука, 1978, 359 с.

[8] Григолюк Э.И., Мамай В.И. *Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций*. Москва, Физматгиз, 1997, 272 с.

[9] Корнишин М.С. *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. Москва, Наука, 1964, 192 с.

[10] Филин А.П. *Элементы теории оболочек*. Ленинград, Стройиздат, 1987, 384 с.

[11] Ворович И.И., Минакова Н.И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек. *Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел.* Т. 7. Москва, Изд-во ВИНИТИ, 1973, с. 5–86.

[12] Григоренко Я.М., Гуляев В.И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор). *Прикладная механика*, 1991, т. 27, № 10, с. 3–23.

[13] Mescall J. Numerical solution of nonlinear equations for shell of revolution. *AIAA J.*, 1966, vol. 4, no. 11, pp. 2041–2043.

[14] Валишвили Н.В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. *ПММ*, 1968, т. 32, вып. 6, с. 1089–1096.

[15] Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. *Механика твердого тела*. 1969, № 1, с. 56–63.

[16] Валишвили Н.В. *Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ*. Москва, Машиностроение, 1976, 278 с.

[17] Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, pp. 1060–1065.

[18] Crisfield M.A. A fast Incremental/Iterative solution procedure that handles "snapthrought". *Comput. and Structures*, 1981, vol. 13, № 1, pp. 55–62.

[19] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела*. Москва, Наука, 1988. 232 с.

[20] Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1994, № 1, с. 109–119.

[21] Арнольд В.И. *Теория катастроф*. Москва, Наука, 1990, 128 с.

[22] Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. Москва, Наука, 1969, 527 с.

[23] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О. Расчет и проектированиее гибких элементов дискретного действия. *Изв. вузов. Сер. Машиностроение*, 2000, № 1, с. 29–37.

[24] Гаврюшин С.С. Элементы управляемой упругой деформации для функциональных устройств робототехнического оборудования. *Мехатроника*, 2000, № 5, с. 16–18.

[25] Карим Али Абдул, Гаврюшин С.С. Численный анализ термобиметаллических элементов быстродействующих электротехнических устройств. *Изв. вузов. Сер. Машиностроение*, 2005, № 8, с. 17–23.

[26] Гаврюшин С.С. Численный анализ и синтез гибких элементов конструкций с управляемой упругой деформацией. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С., ред. *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин. Сб. статей.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 114–129.

[27] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. *Численные методы в динамике и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 492 с.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 115–130.

Гаврюшин Сергей Сергеевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, численных методов анализа инженерных задач, нелинейного поведения тонкостенных конструкций, биомеханики. e-mail: gss@bmstu.ru

Numerical simulation of nonlinear deformation of thin elastic shells

© S.S. Gavryushin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article shows theoretical bases of the methods and algorithms developed to analyze the stability and supercritical behavior of thin elastic shells. The author deals with the problem of numerical analysis of nonlinear deformation of the spherical dome loaded with uniform external pressure. An algorithm for the numerical analysis method based on the parameter continuation method combined with the method of the subspace change of control parameters. The author illustrates the effectiveness of the proposed algorithm by sample calculations.

Keywords: *flexible shell, nonlinear deformation, stability, supercritical behavior, numerical algorithm.*

REFERENCES

[1] Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method*. 3rd ed. New York, McGraw-Hill, 1977, 787 p.
[2] Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. *Konechnye progiby, ustoichivost' i zakriticheskoe povedenie tonkikh pologikh obolochek* [Finite deflections, stability and supercritical behavior of thin shallow shells]. Moscow, Moscow State University of Mechanical Engineering Publ., 2004, 162 p.
[3] Marguerre K. *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Massachusetts*, 1938, New York, Wiley, 1939, pp. 93–101.
[4] Reissner E. *Proc. 3rd Symp. Appl. Math*., New York, McGrow-Hill, 1950, vol. 3, pp. 27–52.
[5] Timoshenko S.P., Voinovsky-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells], Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 635 p.
[6] Vol'mir A.S. *Ustoichivost' deformiruemykh system* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1967, 984 p.
[7] Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoichivost' obolochek* [Stability of shells]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 359 p.
[8] Grigoliuk E.I., Mamai V.I. *Nelineinoe deformirovanie tonkostennykh konstruktsii* [Nonlinear deformation of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1997, 272 p.
[9] Kornishin M.S. *Nelineinye zadachi teorii plastin i pologikh obolochek i metody ikh resheniya* [Nonlinear problems of the theory of plates and shallow shells and solution methods]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 192 p.
[10] Filin A.P. *Elementy teorii obolochek* [Elements of the theory of shells]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1987, 384 p.
[11] Vorovich I.I., Minakova N.I. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika tverdykh deform. tel. — Results in Science and Technology. Mechanics of deformable solids,* vol. 7, VINITI Publ., 1973, pp. 5–86.
[12] Grigorenko Ya.M., Gulyaev V.I. *Prikladnaya mekhanika — Applied mechanics*, 1991, vol. 27, no. 10, pp. 3–23.
[13] Mescall J. *AIAA J*, 1966, vol. 4, no. 11, pp. 2041–2043.
[14] Valishvili N.V. *PMM — J. Appl. Math. Mech*., 1968, vol. 32, iss. 6, pp. 1089–1096.
[15] Shapovalov L.D. *Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of solids*, 1969, no. 1, pp. 56–63.
[16] Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniia na ETsVM* [Methods for calculating the shells of revolution on a computer]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 278 p.
[17] Riks E. *J. Appl. Mech*., 1972, vol. 39, pp. 1060–1065.
[18] Crisfield M.A. *Comput. and Structures*, 1981, vol. 13, no. 1, pp. 55–62.
[19] Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineinykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Nonlinear deformation problems: The method of the parameter continuation in nonlinear problems of mechanics of deformable bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 232 p.
[20] Gavryushin S.S. *Izv. AN SSSR. MTT — Proc. Acad. Sci. USSR. Mechanics of solids*, 1994, no. 1, pp. 109–119.
[21] Arnol'd V.I. *Teoriya katastrof* [Catastrophe theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 128 p.

[22] Vainberg M. M., Trenogin V. A. *Teoriya vetvleniya resheniy nelineinykh uravneniy* [The theory of branching of nonlinear equations solutions]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 527 p.
[23] Gavriushin S.S., Baryshnikova O.O. *Izvestiia Vuzov. Mashinostroenie — Univ. Proceed. Mechanic engineering*, 2000, no. 1, pp. 29–37
[24] Gavryushin S.S. *Mekhatronika — Mechatronics*, 2000, no. 5, pp. 16–18.
[25] Ali Abdul Karim, Gavryushin S.S. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie — Univ. Proc. Mechanic engineering*, 2005, no. 8, pp. 17–23.
[26] Gavryushin S.S. *Chislennyi analiz i sintez gibkikh elementov konstruktsii s upravliaemoi uprugoi deformatsiei. Problemy prikladnoi mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin.* [Numerical analysis and synthesis of flexible structural elements with controlled elastic deformation. Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines]. Coll. art. V.A. Svetlitsky, O.S. Naraikin, eds. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 114–129.
[27] Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennye metody v dinamike i prochnosti mashin* [Numerical methods in dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012, 492 p.

Gavryushin S.S., Dr. Sci. (Eng.), professor, Head of the Computer Systems in Manufacturing Automation Department of Bauman Moscow State Technical University. e-mail: gss@bmstu.ru