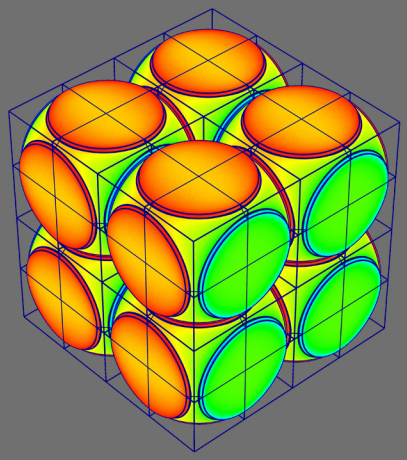
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Головина Н.Я. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упруго-пластических материалов (обзор). Часть 3. Математическое моделирование и численные методы, 2023, No 1, с. 3–31.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/299/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:53

УДК 539.26 DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-331

Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 3

© Н.Я. Головина

Тюменский индустриальный университет,
Тюменская область, Тюмень, 625000, Россия

Статья является третьей частью обзора работ, посвященных исследованиям свойств упругопластических материалов. Первая и вторая часть были посвящены анализу универсальных эмпирических законов деформирования, моделирующих свойства материала на всем диапазоне деформирования, вплоть до разрушения. Был сделан вывод о том, что для создания модели отклика материала на рост напряжений, закон деформирования должен быть, как минимум четырех-параметрическим. Эмпирический закон Рамберга-Осгуда был признан наиболее качественным, по крайней мере для рассмотренного титанового сплава ВТ6. Тем не менее, несмотря на его точность, он не отражает свойств материала в зоне больших пластических деформаций, в том числе в окрестности точки предела прочности. В данной статье представлен анализ многозвенных моделей, описывающих связь между деформацией и напряжением, различными законами в зоне упругих и в зоне пластических деформаций. В обзор вошли: двузвенные модели Надаи (Nadai), Мирамбелл-Реал (Mirambell, Real), Расмуссена (Rasmussen), Абделла (Abdella), сформулированные для материалов, кривая деформирования, которых не имеет участка с положительной кривизной. Также в обзоре рассмотрены трехзвенные модели Куача (Quach); Хертеле (Hertele); Белова-Головиной, которые позволяют моделировать кривые деформирования с участком положительной кривизны. Оценка качества эмпирических законов и соответствие их выборке экспериментальных точек осуществлена методом минимизации суммарного квадратичного отклонения и использованием метода градиентного спуска для определения минимума функции многих переменных. В качестве материала для сравнительного анализа эмпирических моделей выбран титановый сплав ВТ6, для моделей Хертеле и Белова-Головиной — сталь Ст3сп. Показано, что модели, построенные на основе многозвенных сплайнов, боле точно определяют свойства упругопластических материалов, чем модели, построенные на основе универсальных законов.

Ключевые слова: *математическая модель кривой деформирования, эмпирические кривые напряжения-деформации, нелинейный закон упругости, упругопластические свойства материала, физические параметры упругопластических материалов, обработка экспериментальных данных*

Введение. В первой [1] и второй [2] частях по теме данной статьи был приведен анализ универсальных математических моделей нелинейного поведения упругопластических материалов. В данном сообщении представлен анализ многозвенных кривых напряжение-деформации. Как и в первых сообщениях, применены постулаты о ненапряженном начальном состоянии материала, о непрерывности и дифференцируемости кривой деформирования. Кроме того, будет

уделено внимание тому факту, что в точке контакта соседних участков все параметры материала, определяемые слева и справа от этой точки должны дать одинаковые значения функции и одинаковые значения касательных модулей.

Анализ однозвенных кривых напряжение-деформация показал, что наиболее качественным среди них является закон Рамберга-Осгуда [3]. Однако, в работах [4–16] последних лет, представлены результаты исследований, показывающие, что закон Рамберга-Осгуда не отражает свойств материала в зоне больших пластических деформаций, в том числе в окрестности точки предела прочности. Поэтому начиная с конца XX века для описания свойств материалов разработан ряд многозвенных моделей [17–28], анализ которых представлен в данной статье.

В данной работе все уравнения, соответствующие законам деформирования, приведены к безразмерному виду так, чтобы кривые напряжение-деформация любого материала проходили через точки $(0;0)$ и $(1;1)$. Для этого напряжения σ нормированы на напряжение предела прочности σ_c:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \tag{1}$$

а деформации ε на деформацию предела прочности ε_c:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}, \tag{2}$$

E_0^* — нормированный касательный модуль упругости в начальной точке $(0;0)$ кривой деформирования:

$$E_0^* = \frac{E_0 \varepsilon_c}{\sigma_c}, \tag{3}$$

E_1^* — нормированный касательный модуль упругости в конечной $(1;1)$ точке истинной кривой деформирования:

$$E_1^* = \frac{E_1 \varepsilon_c}{\sigma_c}. \tag{4}$$

Сравнение выборки экспериментальных точек с эмпирическими кривыми осуществляется стандартной процедурой минимизации среднеквадратичного отклонения и использованием метода градиентного спуска для определения минимума функции многих переменных. Для оценки результата моделирования кривой деформирования

с отрицательной кривизной на всем интервале нагружения, в данной статье рассмотрен титановый сплав ВТ6. В качестве материала, кривая деформирования которого имеет участок с положительной кривизной выбрана сталь Ст3сп.

Модель Надаи (Nadai). Первое аналитическое выражение для кривой деформирования, в виде двухзвенной модели, предложил в 1939 году Надаи [17]:

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E_0} & \sigma \le \sigma_p, \\ \dfrac{\sigma}{E_0} + \varepsilon_y \left(\dfrac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_y - \sigma_p} \right)^n & \sigma \ge \sigma_p. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь: σ_y — условный предел текучести; ε_y — деформация условного предела текучести; σ_p — предел пропорциональности; E_0 — модуль упругости в начальной точке; n — безразмерный параметр материала.

В нормированном виде модель Надаи будет:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} & \sigma^* \le \sigma_p^*, \\ \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} + \varepsilon_y^* \left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_p^*}{\sigma_y^* - \sigma_p^*} \right)^n & \sigma^* \ge \sigma_p^*. \end{cases} \tag{6}$$

Нормированная кривая гарантированно проходит через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\begin{gathered} \varepsilon^*(0) = 0, \\ \varepsilon^*(1) = \frac{1}{E_0^*} + \varepsilon_y^* \left(\frac{1 - \sigma_p^*}{\sigma_y^* - \sigma_p^*} \right)^n = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

В качестве точки контакта здесь выбрана точка предела пропорциональности σ_p^*.

Проверка на непрерывность.

$$\begin{gathered} \lim_{\sigma^* \to \sigma_p^* - 0} \frac{\sigma^*}{E_0^*} = \frac{\sigma_p^*}{E_0^*} = \varepsilon_p^*, \\ \lim_{\sigma^* \to \sigma_p^* + 0} \frac{\sigma^*}{E_0^*} + \varepsilon_y^* \left(\frac{\sigma^* - \sigma_p^*}{\sigma_y^* - \sigma_p^*} \right)^n = \frac{\sigma_p^*}{E_0^*} = \varepsilon_p^*, \\ \varepsilon^*(\sigma_p^*) = \varepsilon_p^*. \end{gathered} \tag{8}$$

Модель дает непрерывную кривую деформирования.
С учетом (3) получим:

$$\varepsilon_y^* = \left(1 - \frac{1}{E_0^*}\right)\left(\frac{\sigma_y^* - \sigma_p^*}{1 - \sigma_p^*}\right)^n. \tag{9}$$

Преобразованный закон Надаи принимает вид:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} & \sigma^* \le \sigma_p^*, \\ \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(1 - \dfrac{1}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_p^*}{1 - \sigma_p^*}\right)^n & \sigma^* \ge \sigma_p^*. \end{cases} \tag{10}$$

Кривая деформирования должна быть дифференцируема:

$$d\varepsilon^* = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{E_0^*}\right] d\sigma^* & \sigma^* \le \sigma_p^*, \\ \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \left(1 - \dfrac{1}{E_0^*}\right)\dfrac{n}{1 - \sigma_p^*}\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_p^*}{1 - \sigma_p^*}\right)^{n-1}\right] d\sigma^* & \sigma^* \ge \sigma_p^*. \end{cases} \tag{11}$$

Из определения касательного модуля следует:

$$E^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \begin{cases} \left[\dfrac{1}{E_0^*}\right]^{-1} & \sigma^* \le \sigma_p^*, \\ \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \left(1 - \dfrac{1}{E_0^*}\right)\dfrac{n}{1 - \sigma_p^*}\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_p^*}{1 - \sigma_p^*}\right)^{n-1}\right]^{-1} & \sigma^* \ge \sigma_p^*. \end{cases} \tag{12}$$

Значения касательного модуля в характерных точках кривой:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma^* \to +0} E^* = E_0^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_p^* - 0} E^* = E_0^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_p^* + 0} E^* = E_0^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to 1 - 0} E^* = \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \left(1 - \dfrac{1}{E_0^*}\right)\dfrac{n}{1 - \sigma_p^*}\right]^{-1} = E_1^*, \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, кривая Надаи непрерывна и дифференцируема.

На рис. 1 показана кривая деформирования, построенная по модели Надаи.

Теоретическая кривая имеет среднее квадратичное отклонение от выборки экспериментальных значений по деформациям 5,3 % при оптимальных значениях параметров материала: $n = 2{,}1$; $E_0^* = 3{,}2$; $E_1^* = 0{,}048$.

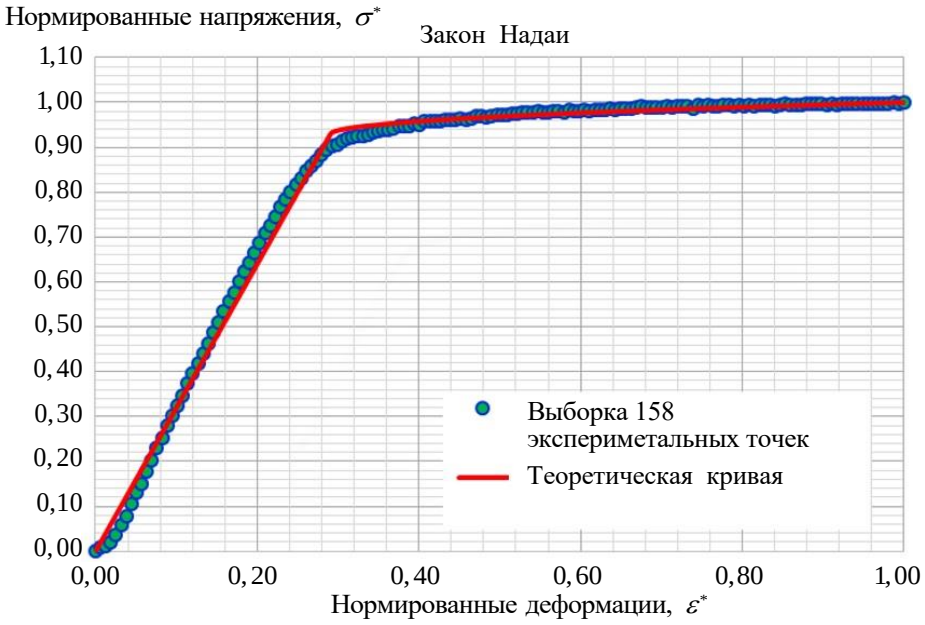


Рис. 1. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Надаи

Модель Мирамбелл-Реал (Mirambell, Real). В 2000 году Мирамбелл и Реал [18] сформулировали следующую двухзвенную модель материала:

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E_0} + \left(\varepsilon_y - \dfrac{\sigma_y}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n & \sigma \le \sigma_y, \\ \varepsilon_y + \dfrac{(\sigma - \sigma_y)}{E_y} + \left(\varepsilon_c - \varepsilon_y - \dfrac{(\sigma_c - \sigma_y)}{E_y}\right)\left(\dfrac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_c - \sigma_y}\right)^n & \sigma \ge \sigma_y. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь: σ_y — условный предел текучести; ε_y — деформация условного предела текучести; E_y — касательный модуль в точке условного предела текучести; σ_c — предел прочности; ε_c — деформация предела прочности; n — параметр материала.

В этой модели принят закон Рамберга-Осгуда для описания кривой деформирования на участке до деформаций условного предела текучести ε_y. Как было показано выше, кривая напряжения-

деформации, построенная по закону Рамберга-Осгуда не имеет начального линейного участка. Для более значительных пластических деформаций предложена формула, представляющая собой модифицированный закон Рамберга-Осгуда, сформулированный в предположении, что на участке, где $\varepsilon \geq \varepsilon_y$, материал имеет самостоятельную кривую деформирования с начальной точкой, совпадающей с точкой $\left(\sigma_y; \varepsilon_y\right)$.

Следует отметить, что в данной статье предлагается изменить множитель при степени на интервале $\sigma \geq \sigma_y$ таким образом, чтобы кривая деформирования после нормировки приходила в точку: $\left(\varepsilon^* = 1;\ \sigma^* = 1\right)$.

После нормировки модель Мирамбелл-Реал приобретает вид:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^n & \sigma^* \leq \sigma_y^*, \\ \varepsilon_y^* + \dfrac{(\sigma^* - \sigma_y^*)}{E_y^*} + \left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^n & \sigma^* \geq \sigma_y^*. \end{cases} \tag{15}$$

С учетом выполненной замены множителя, нормированная кривая проходит через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\varepsilon^*(0) = 0,$$
$$\varepsilon^*(1) = \varepsilon_y^* + \frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*} + \left(1 - \varepsilon_y^* - \frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\frac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^n = 1. \tag{16}$$

Проверка непрерывности:

Слева от точки $\left(\sigma_y^*; \varepsilon_y^*\right)$:

$$\lim_{\sigma^* \to \sigma_y^* - 0} \frac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(\varepsilon_y^* - \frac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^n = \varepsilon_y^*.$$

Справа от точки $\left(\sigma_y^*; \varepsilon_y^*\right)$:

$$\lim_{\sigma^* \to \sigma_y^* + 0} \varepsilon_y^* + \frac{(\sigma^* - \sigma_y^*)}{E_y^*} + \left(1 - \varepsilon_y^* - \frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\frac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^n = \varepsilon_y^*\ ;$$
$$\varepsilon^*(\sigma_y^*) = \varepsilon_y^*.$$

Проверка на дифференцируемость:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^n & \sigma^* \le \sigma_y^*, \\ \varepsilon_y^* + \dfrac{(\sigma^* - \sigma_y^*)}{E_y^*} + \left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^n & \sigma^* \ge \sigma_y^*, \end{cases}$$

$$d\varepsilon^* = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \dfrac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right] d\sigma^* & \sigma^* \le \sigma_y^*; \\ \left[\dfrac{1}{E_y^*} + \dfrac{n}{(1-\sigma_y^*)}\left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right] d\sigma^* & \sigma^* \ge \sigma_y^*. \end{cases} \tag{17}$$

Касательный модуль:

$$E^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} =$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \dfrac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right]^{-1} & \sigma^* \le \sigma_y^*; \\ \left[\dfrac{1}{E_y^*} + \dfrac{n}{(1-\sigma_y^*)}\left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right]^{-1} & \sigma^* \ge \sigma_y^*. \end{cases} \tag{18}$$

Касательный модуль в характерных точках кривой деформирования:

$$E^* = \begin{cases} \lim\limits_{\sigma^* \to +0} E^* = E_0^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_y^* - 0} E^* = \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \dfrac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\right]^{-1}, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_y^* + 0} E^* = E_y^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to 1 - 0} E^* = \left[\dfrac{1}{E_y^*} + \dfrac{n}{(1-\sigma_y^*)}\left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\right]^{-1}. \end{cases} \tag{19}$$

Непрерывность кривой деформирования позволяет потребовать равенства касательного модуля в точке контакта, при $\sigma^* = \sigma_y^*$:

$$\left[\frac{1}{E_0^*} + \frac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^* - \frac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\right]^{-1} = E_y^*.$$

Откуда:

$$E_y^* = E_0^* \frac{1}{1 + n\left(\frac{E_0^* \varepsilon_y^*}{\sigma_y^*} - 1\right)}.$$

Отсюда определен параметр n:

$$n = \left(\frac{E_0^*}{E_y^*} - 1\right) \Big/ \left(\frac{E_0^* \varepsilon_y^*}{\sigma_y^*} - 1\right).$$

В точке предела прочности, при $\sigma^* = 1$:

$$\left[\frac{1}{E_y^*} + \frac{n}{(1-\sigma_y^*)}\left(1 - \varepsilon_y^* - \frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\right]^{-1} = E_1^*.$$

Тогда:

$$E_1^* = E_0^* \frac{1}{n\frac{E_0^*(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)} - \frac{E_0^* \varepsilon_y^*}{\sigma_y^*} n(n-1) + (n-1)^2} \neq 0.$$

Таким образом, кривая Мирабелл-Реал непрерывна и дифференцируема, с учетом произведенной замены в оригинале формулы (14).

На рис. 2 показана кривая деформирования, построенная в соответствии с моделью Мирамбелл-Реал.

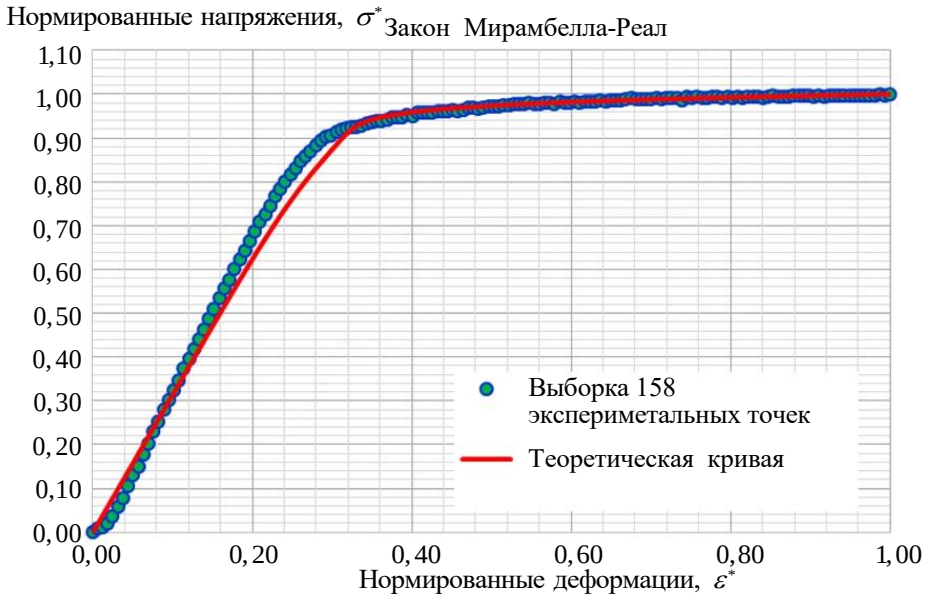


Рис. 2. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Мирамбелл-Реал

Теоретическая кривая имеет среднее квадратичное отклонение от выборки экспериментальных значений по деформациям 2,9 % при оптимальных значениях параметров материала: $n = 8,03$; $E_0^* = 3,14$; $E_y^* = 2,1$; $E_1^* = 0,19$; $\varepsilon_y^* = 0,28$; $\sigma_y^* = 0,84$.

Модель Расмуссена (Rasmussen). В 2003 году Расмуссен [7] независимо от Мирамбелл и Реал сформулировал аналогичную модель для аустенитной, ферритной и дуплексной нержавеющей стали:

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E_0} + \left(\varepsilon_y - \dfrac{\sigma_y}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n & \sigma \le \sigma_y, \\ \varepsilon_y + \dfrac{(\sigma - \sigma_y)}{E_y} + \left(\varepsilon_c - \varepsilon_y - \dfrac{(\sigma_c - \sigma_y)}{E_y}\right)\left(\dfrac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_c - \sigma_y}\right)^m & \sigma \ge \sigma_y. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь: σ_y — условный предел текучести; ε_y — деформация условного предела текучести; E_y — касательный модуль в точке условного предела текучести; σ_c — предел прочности; ε_c — деформация предела прочности; n и m — безразмерные параметры материала.

В отличии от модели Мирамбелл-Реал показатель степени нелинейного слагаемого в модели Расмуссена на участке $\sigma \ge \sigma_y$ отличается от аналогичного показателя на участке $\sigma \le \sigma_y$. Значит автор полагает, что при переходе через точку условного предела текучести механизм деформирования становится иным.

Для этой модели в данной статье также изменен множитель при степени на интервале $\sigma \ge \sigma_y$ так, чтобы кривая деформирования после нормировки приходила в точку $\left(\varepsilon^* = 1;\ \sigma^* = 1\right)$.

После нормировки модель Расмуссена приобретает вид:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^n & \sigma^* \le \sigma_y^*, \\ \varepsilon_y^* + \dfrac{(\sigma^* - \sigma_y^*)}{E_y^*} + \left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1 - \sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^* - \sigma_y^*}{1 - \sigma_y^*}\right)^m & \sigma^* \ge \sigma_y^*. \end{cases} \tag{21}$$

Проверка непрерывности.

Слева от точки $\left(\sigma_y^*; \varepsilon_y^*\right)$:

$$\lim_{\sigma^* \to \sigma_y^* - 0} \frac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(\varepsilon_y^* - \frac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^n = \varepsilon_y^*.$$

Справа от точки $\left(\sigma_y^*;\varepsilon_y^*\right)$:

$$\lim_{\sigma^*\to\sigma_y^*+0}\varepsilon_y^*+\frac{(\sigma^*-\sigma_y^*)}{E_y^*}+$$
$$+\left(1-\varepsilon_y^*-\frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\frac{\sigma^*-\sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^m=\varepsilon_y^*\ ,$$
$$\varepsilon^*(\sigma_y^*)=\varepsilon_y^*\ .$$

Модель дает непрерывную кривую деформирования, причем в точке предела прочности:

$$\varepsilon^*(1)=\varepsilon_y^*+\frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}+$$
$$+\left(1-\varepsilon_y^*-\frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\frac{\sigma^*-\sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^m=1. \tag{22}$$

Кроме того, что кривая деформирования должна обладать свойством непрерывности, она должна быть дифференцируема, поэтому следует получить формулу для касательного модуля.

$$d\varepsilon^*=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{E_0^*}+\dfrac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^*-\dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right]d\sigma^* & \sigma^*\le\sigma_y^*,\\ \left[\dfrac{1}{E_y^*}+\dfrac{m}{(1-\sigma_y^*)}\left(1-\varepsilon_y^*-\dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*-\sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^{m-1}\right]d\sigma^* & \sigma^*\ge\sigma_y^*.\end{cases} \tag{23}$$

Касательный модуль:

$$E^*=\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*}=$$
$$=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{E_0^*}+\dfrac{n}{\sigma_y^*}\left(\varepsilon_y^*-\dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_y^*}\right)^{n-1}\right]^{-1} & \sigma^*\le\sigma_y^*,\\ \left[\dfrac{1}{E_y^*}+\dfrac{m}{(1-\sigma_y^*)}\left(1-\varepsilon_y^*-\dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*}\right)\left(\dfrac{\sigma^*-\sigma_y^*}{1-\sigma_y^*}\right)^{m-1}\right]^{-1} & \sigma^*\ge\sigma_y^*.\end{cases} \tag{24}$$

Касательный модуль в характерных точках кривой деформирования:

$$E^* = \begin{cases} \lim\limits_{\sigma^* \to +0} E^* = E_0^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_y^* - 0} E^* = \left[\dfrac{1}{E_0^*} + \dfrac{n}{\sigma_y^*} \left(\varepsilon_y^* - \dfrac{\sigma_y^*}{E_0^*} \right) \right]^{-1}, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to \sigma_y^* + 0} E^* = E_y^*, \\ \lim\limits_{\sigma^* \to 1 - 0} E^* = \left[\dfrac{1}{E_y^*} + \dfrac{m}{(1-\sigma_y^*)} \left(1 - \varepsilon_y^* - \dfrac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*} \right) \right]^{-1}. \end{cases} \tag{25}$$

Непрерывность кривой деформирования позволяет потребовать равенства касательного модуля в точке контакта, при $\sigma^* = \sigma_y^*$:

$$\left[\frac{1}{E_0^*} + \frac{n}{\sigma_y^*} \left(\varepsilon_y^* - \frac{\sigma_y^*}{E_0^*} \right) \right]^{-1} = E_y^*.$$

Откуда:

$$E_y^* = E_0^* \frac{1}{1 + n \left(\dfrac{E_0^* \varepsilon_y^*}{\sigma_y^*} - 1 \right)}. \tag{26}$$

Параметр n на первом участке кривой деформирования выражен через координаты характерных точек кривой:

$$n = \left(\frac{E_0^*}{E_y^*} - 1 \right) \Bigg/ \left(\frac{E_0^* \varepsilon_y^*}{\sigma_y^*} - 1 \right).$$

В точке предела прочности, при $\sigma^* = 1$:

$$\left[\frac{1}{E_y^*} + \frac{m}{(1-\sigma_y^*)} \left(1 - \varepsilon_y^* - \frac{(1-\sigma_y^*)}{E_y^*} \right) \right]^{-1} = E_1^*.$$

Тогда:

$$E^*(1) = E_1^* \quad \to$$

$$\to \; m = \left(\frac{E_y^*}{E_1^*} - 1 \right) \Bigg/ \left(E_y^* \frac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)} - 1 \right). \tag{27}$$

Кривая Расмуссена непрерывна и дифференцируема.

На рис. 3 показана кривая деформирования, построенная в соответствии с моделью Расмуссена.

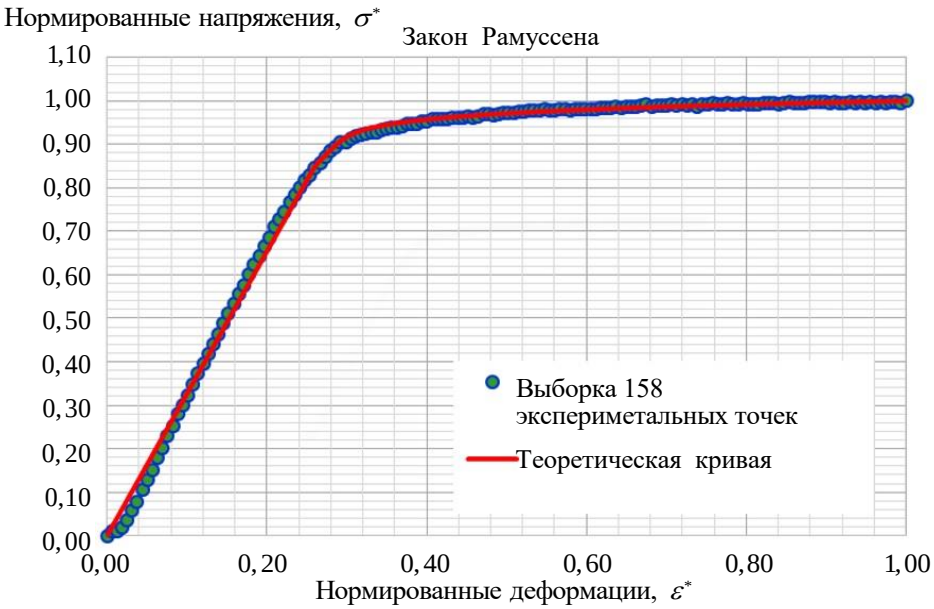


Рис. 3. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая построенная по модели Расмуссена

Теоретическая кривая имеет среднее квадратичное отклонение от выборки экспериментальных значений по деформациям 2,9 % при оптимальных значениях параметров материала $n = 0,83$; $E_0^* = 2,0$; $E_y^* = 1,9$; $E_1^* = 0,03$; $\varepsilon_y^* = 0,26$; $\sigma_y^* = 0,85$.

Модель Абделла (Abdella). В 2006 году Абделла предложил обратную форму для моделей Мирамбелл-Реал и Расмуссена [19–21] описывающую напряжение, как явную функцию деформации:

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{\sigma_y} = \begin{cases} \dfrac{r_1 \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}}{A + (r_1 - A)(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y})^n} & 0 \le \varepsilon \le 1, \\ 1 + \dfrac{r_2(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y} - 1)}{B + (r_3 - B)\left(\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y} - 1}{\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y} - 1}\right)^m} & 1 \le \varepsilon \le \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y}. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь: σ_y — условный предел текучести; ε_y — деформация условного предела текучести; ε_c — деформация предела прочности; A, B, n, m, r_1, r_2, r_3 — параметры материала:

$$r_1 = \frac{E_0 \varepsilon_y}{\sigma_y}; \quad r_2 = \frac{E_y \varepsilon_y}{\sigma_y}; \quad r_3 = \frac{E_y(\varepsilon_c - \varepsilon_y)}{(\sigma_c - \sigma_y)}.$$

Модель Абделла также, как и предыдущие две модели, сформулирована, как состыкованные в точке условного предела текучести $(\sigma_y; \varepsilon_y)$, две самостоятельные кривые, подчиняющиеся закону Рамберга-Осгуда. В оригинальной модели напряжения нормированы на напряжение σ_y, а деформации нормированы на деформацию ε_y. Модель является семи параметрической.

В точке контакта двух участков кривой деформирования:

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_y - 0} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\sigma_y} = \frac{r_1 \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}}{A + (r_1 - A)\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^n} = 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_y + 0} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\sigma_y} = 1 + \frac{r_2 (\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y} - 1)}{B + (r_3 - B)\left(\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y} - 1}{\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y} - 1}\right)^m} = 1,$$

$$\frac{\sigma(\varepsilon_y)}{\sigma_y} = 1.$$

Модель дает непрерывную кривую деформирования.

Удовлетворяя требованию, чтобы кривая проходила через точку предела прочности $(\sigma_c; \varepsilon_c)$, получаем:

$$\frac{\sigma(\varepsilon_c)}{\sigma_y} = 1 + \frac{r_2 \left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y} - 1\right)}{r_3} = \frac{\sigma_c}{\sigma_y}.$$

Отсюда может быть выражена связь между двумя параметрами:

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\left(\dfrac{\sigma_c}{\sigma_y} - 1\right)}{\left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y} - 1\right)}. \qquad (29)$$

Другие параметры выразим, удовлетворяя требование дифференцируемости:

$$\frac{\sigma'(\varepsilon)}{\sigma_y}=\begin{cases}\dfrac{r_1}{\varepsilon_y}\left(\dfrac{A+(r_1-A)(1-n)\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^n}{\left[A+(r_1-A)\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^n\right]^2}\right) & \varepsilon\le\varepsilon_y,\\[2ex] \dfrac{r_2}{\varepsilon_y}\dfrac{B+(r_3-B)(1-m)\left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_y}{\varepsilon_c-\varepsilon_y}\right)^m}{\left[B+(r_3-B)\left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_y}{\varepsilon_c-\varepsilon_y}\right)^m\right]^2} & \varepsilon\ge\varepsilon_y.\end{cases} \tag{30}$$

Касательный модуль в характерных точках кривой деформирования:

$$\frac{E(\varepsilon)}{\sigma_y}=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{E(\varepsilon)}{\sigma_y}=\dfrac{r_1}{A\varepsilon_y}=\dfrac{E_0}{\sigma_y},\\[2ex] \lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_y-0}\dfrac{E(\varepsilon)}{\sigma_y}=\dfrac{r_1-r_1n+An}{r_1\varepsilon_y}=\dfrac{E_y}{\sigma_y},\\[2ex] \lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_y+0}\dfrac{E(\varepsilon)}{\sigma_y}=\dfrac{r_2}{B\varepsilon_y}=\dfrac{E_y}{\sigma_y},\\[2ex] \lim\limits_{\varepsilon\to1-0}\dfrac{E(\varepsilon)}{\sigma_y}=\dfrac{r_2}{\varepsilon_y}\left(\dfrac{r_3-r_3m+Bm}{r_3^2}\right)=\dfrac{E_c}{\sigma_y}.\end{cases} \tag{31}$$

Отсюда параметры модели Абделла будут выражены:

$$r_1=A\frac{E_0\varepsilon_y}{\sigma_y};\quad n=\frac{\dfrac{E_y\varepsilon_y}{\sigma_y}-1}{\dfrac{\sigma_y}{E_0\varepsilon_y}-1},$$

$$r_2=B\frac{E_y\varepsilon_y}{\sigma_y};\quad m=\frac{E_c\dfrac{\varepsilon_y r_3^2}{\sigma_y r_2}-r_3}{(B-r_3)}.$$

Подставив выражение r_2 в (26) получаем выражение r_3:

$$r_3 = B\frac{E_y\varepsilon_y\left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y}-1\right)}{\sigma_y\left(\dfrac{\sigma_c}{\sigma_y}-1\right)}.$$

В результате, с учетом выраженных параметров, модель Абделла принимает вид:

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{\sigma_y}=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{E_0\varepsilon}{\sigma_y}}{1+\left(\dfrac{E_0\varepsilon_y}{\sigma_y}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^n} & \varepsilon\le\varepsilon_y,\\[2ex] 1+\dfrac{\dfrac{E_y}{\sigma_y}(\varepsilon-\varepsilon_y)}{1+\left(E_y\dfrac{(\varepsilon_c-\varepsilon_y)}{(\sigma_c-\sigma_y)}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_y}{\varepsilon_c-\varepsilon_y}\right)^m} & \varepsilon\ge\varepsilon_y.\end{cases} \tag{32}$$

Модель Абделла дает непрерывную и дифференцируемую кривую. Однако модель сохраняет недостатки модели Рамберга-Осгуда.

Произведем перенормировку модели. Как все предыдущие модели нормируем напряжения на напряжение предела прочности σ_c, а деформации на деформацию предела прочности ε_c.

$$\sigma^*(\varepsilon^*)=\begin{cases}\dfrac{E_0^*\varepsilon^*}{1+\left(E_0^*\dfrac{\varepsilon_y^*}{\sigma_y^*}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y^*}\right)^n} & \varepsilon\le\varepsilon_y,\\[2ex] \sigma_y^*+\dfrac{E_y^*(\varepsilon^*-\varepsilon_y^*)}{1+\left(E_y^*\dfrac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*-\varepsilon_y^*}{1-\varepsilon_y^*}\right)^m} & \varepsilon\ge\varepsilon_y.\end{cases} \tag{33}$$

Проверяем перенормированную модель кривой деформирования (30) на непрерывность в точке контакта $\left(\sigma_y^*;\varepsilon_y^*\right)$ и дифференцируемость:

$$\lim_{\varepsilon^*\to\varepsilon_y^*-0}\sigma^*(\varepsilon^*)=\frac{E_0^*\varepsilon^*}{1+\left(E_0^*\dfrac{\varepsilon_y^*}{\sigma_y^*}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y^*}\right)^n}=\sigma_y^*,$$

$$\lim_{\varepsilon^*\to\varepsilon_y^*+0}\sigma^*(\varepsilon^*)=\sigma_y^*+\frac{E_y^*(\varepsilon^*-\varepsilon_y^*)}{1+\left(E_y^*\dfrac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*-\varepsilon_y^*}{1-\varepsilon_y^*}\right)^m}=\sigma_y^*,$$

$$\sigma^*(\varepsilon_y^*)=\sigma_y^*.$$

Кривая деформирования непрерывна.

Учтем, что координаты точки предела прочности в новой нормировке $\left(\sigma_c^*=1;\ \varepsilon_c^*=1\right)$:

$$\sigma^*(\varepsilon_c^*)=\sigma_y^*+\frac{E_y^*(1-\varepsilon_y^*)}{1+\left(E_y^*\dfrac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)}-1\right)\left(\dfrac{1-\varepsilon_y^*}{1-\varepsilon_y^*}\right)^m}=1.$$

Обеспечим требование дифференцируемости:

$$\sigma^{*\prime}(\varepsilon^*)=\begin{cases}E_0^*\dfrac{1+\left(E_0^*\dfrac{\varepsilon_y^*}{\sigma_y^*}-1\right)(1-n)\left(\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y^*}\right)^n}{\left[1+\left(E_0^*\dfrac{\varepsilon_y^*}{\sigma_y^*}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y^*}\right)^n\right]^2} & \varepsilon^*\le\varepsilon_y^*,\\[2ex] E_y^*\dfrac{1+\left(E_y^*\dfrac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)}-1\right)(1-m)\left(\dfrac{\varepsilon^*-\varepsilon_y^*}{1-\varepsilon_y^*}\right)^m}{\left[1+\left(E_y^*\dfrac{(1-\varepsilon_y^*)}{(1-\sigma_y^*)}-1\right)\left(\dfrac{\varepsilon^*-\varepsilon_y^*}{1-\varepsilon_y^*}\right)^m\right]^2} & \varepsilon^*\ge\varepsilon_y^*.\end{cases}$$

Касательный модуль в характерных точках кривой деформирования:

$$E^*=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon^*\to+0}E^*(\varepsilon_0^*)=E_0^*,\\[1ex] \lim\limits_{\varepsilon^*\to\varepsilon_y^*-0}E^*(\varepsilon_y^*)=\dfrac{\sigma_y^*}{\varepsilon_y^*}\left(1-n+\dfrac{n}{E_0^*}\dfrac{\sigma_y^*}{\varepsilon_y^*}\right)=E_y^*,\\[1ex] \lim\limits_{\varepsilon^*\to\varepsilon_y^*+0}E^*(\varepsilon_y^*)=E_y^*,\\[1ex] \lim\limits_{\varepsilon^*\to1-0}E^*(\varepsilon_c^*)=\dfrac{(1-\sigma_y^*)}{(1-\varepsilon_y^*)}\left(1-m+\dfrac{m}{E_y^*}\dfrac{(1-\sigma_y^*)}{(1-\varepsilon_y^*)}\right)=E_1^*,\end{cases}\qquad(34)$$

Параметры n и m определяются из (32):

$$n=\left(\frac{E_y^*\varepsilon_y^*}{\sigma_y^*}-1\right)\Bigg/\left(\frac{\sigma_y^*}{E_0^*\varepsilon_y^*}-1\right),\quad m=E_y^*\Bigg/\left(1-\frac{(1-\sigma_y^*)}{(1-\varepsilon_y^*)}\right).$$

На рис. 4 показана кривая деформирования, построенная в соответствии с моделью Абделла.

Теоретическая кривая имеет среднее квадратичное отклонение от выборки экспериментальных значений по напряжениям 2,2 % при оптимальных значениях параметров материала: $n=7$; $m=0$; $E_0^*=3,3$; $E_y^*=-15,5$; $E_1^*=0,12$; $\varepsilon_y^*=0,32$; $\sigma_y^*=0,92$.

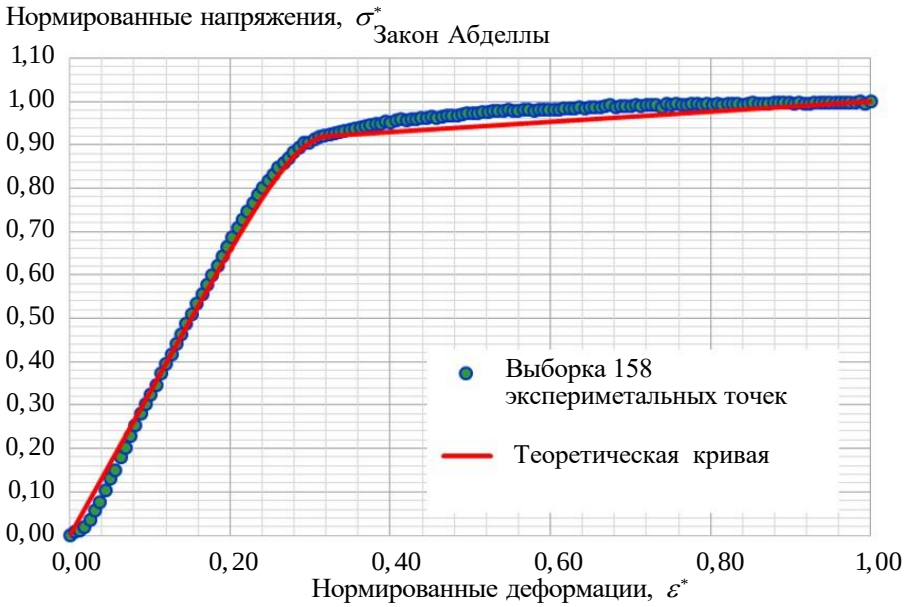


Рис. 4. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая построенная по модели Абделла

Модель Куач (Quach). В 2008 году Куач предложил трехзвенную модель [22, 23], дающую описание кривой деформирования не только при растяжении, но и при сжатии:

$$\varepsilon^*=\begin{cases}\dfrac{\sigma^*}{E_0^*}+0,002\left(\dfrac{\sigma^*}{\sigma_p^*}\right)^n & \sigma^*\le\sigma_p^*,\\[2ex] \varepsilon_p^*+\dfrac{(\sigma^*-\sigma_p^*)}{E_p^*}+ & \\ \quad+\left[0,008+(\sigma_{1,0}^*-\sigma_p^*)\left(\dfrac{1}{E_0^*}-\dfrac{1}{E_0^*}\right)\right]\left(\dfrac{\sigma^*-\sigma_p^*}{\sigma_{1,0}^*-\sigma_p^*}\right)^m & \sigma^*\ge\sigma_p^*,\\[2ex] \dfrac{\sigma^*-a}{b\pm\sigma^*} & \sigma^*\ge\sigma_{1,0}^*.\end{cases}\qquad(35)$$

Здесь: σ_p^* — нормированный условный предел текучести; ε_p^* — нормированная деформация условного предела текучести; $\sigma_{1,0}^*$ — нормированное напряжение в контрольной точке, где напряжение соответствует деформации 1,0 %; E_0^* — нормированный касательный модуль в начале координат; E_p^* — нормированный касательный модуль в точке условного предела текучести; n и m — безразмерные параметры материала; a и b — константы материала.

Данная модель подробно анализироваться не будет, так, как предполагает линейную асимптотику кривой деформирования при больших деформациях, что представляется маловероятным для большинства материалов.

Модель Хертеле (Hertele). В 2010 году Стейн Хертеле (Stijn Hertele), Вим Де Вале (Wim De Waele), Руди Денис (Rudi Denys) разработали эмпирическую модель для трубопроводных сталей, имеющих на кривой деформирования, участок с отрицательной кривизной (участок упрочнения).

Описание модели, названной авторами UGent, приведено в работах [24-26]. Кривая деформирования, в соответствии с этой моделью, является составной. Область определения разбивается на три участка. На первом и третьем участках постулируется закон Рамберга-Осгуда с разными показателями степени, а на втором постулируется кривая, плавно соединяющая кривые на первом и третьем участке так, что в целом кривая является дифференцируемой. Первый участок назван авторами «early yielding segment», второй — «transition segment», третий — «extensive yielding segment». Участки разделены двумя характерными точками с координатами $(\sigma_1;\varepsilon_1)$ и $(\sigma_2;\varepsilon_2)$. По определению, эти точки являются точками сопряжения на трехзвенном сплайне кривой деформирования. На рис. 5 приведена, как цитата из [24-26], графическая иллюстрация модели UGent. Модель является шести-параметрической.

В авторской формулировке закон UGent имеет вид:

$$\varepsilon = \begin{cases} RO_1(\sigma) & \sigma \le \sigma_1, \\ RO_{1\to 2}(\sigma) & \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2, \\ RO_2(\sigma) & \sigma_2 \le \sigma, \end{cases} \tag{36}$$

где:

$$RO_1(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + 0,002\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1},$$

$$RO_2(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + 0,002\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2} - \Delta\varepsilon,$$

$$RO_{1\to 2}(\sigma)=\frac{\sigma}{E}+0,002\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1}+$$

$$+0,002\left(\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)\left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2}-\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1}\right]-$$

$$-\frac{0,002}{\sigma_2-\sigma_1}\left[\frac{\sigma^{n_2+1}-\sigma_1^{n_2+1}}{(n_2+1)\sigma_{0,2}^{n_2}}-\frac{\sigma^{n_1+1}-\sigma_1^{n_1+1}}{(n_1+1)\sigma_{0,2}^{n_1}}\right],$$

$$\Delta\varepsilon=\left(\varepsilon_{0,2}-\frac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\times$$

$$\times\left[\frac{\sigma_2^{n_2+1}-\sigma_1^{n_2+1}}{(n_2+1)\sigma_{0,2}^{n_2}}-\frac{\sigma_2^{n_1+1}-\sigma_1^{n_1+1}}{(n_1+1)\sigma_{0,2}^{n_1}}\right].$$

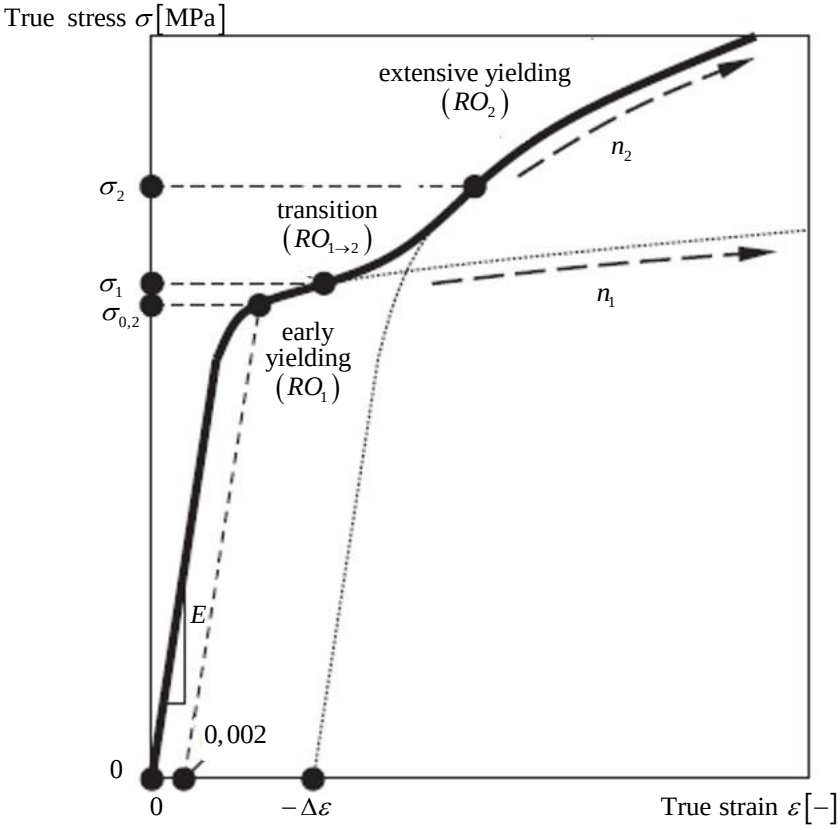


Рис. 5. Графическая иллюстрация модели UGent

После подстановки в (36) получим:

$$\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1} & 0\le\sigma\le\sigma_1,\\ \dfrac{\sigma}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1}+ & \\ +\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)\left[\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2}-\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1}\right]- & \\ -\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\dfrac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\left[\dfrac{\sigma^{n_2+1}-\sigma_1^{n_2+1}}{(n_2+1)\sigma_{0,2}^{n_2}}-\dfrac{\sigma^{n_1+1}-\sigma_1^{n_1+1}}{(n_1+1)\sigma_{0,2}^{n_1}}\right] & \sigma_1\le\sigma\le\sigma_2,\\ \dfrac{\sigma}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2}-\Delta\varepsilon & 0\le\sigma_2\le\sigma.\end{cases}\qquad(37)$$

Сплайн непрерывен как при переходе через точку $(\sigma_1;\varepsilon_1)$, так и через точку $(\sigma_2;\varepsilon_2)$.

В соответствии с этой формулировкой определим и касательный модуль, как производную от напряжения по деформации:

$$E(\sigma)=\frac{d\sigma}{d\varepsilon},$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma}=\frac{1}{E(\sigma)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\dfrac{n_1}{\sigma_{0,2}}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1-1} & 0\le\sigma\le\sigma_1,\\ \dfrac{1}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\dfrac{n_1}{\sigma_{0,2}}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1-1}+ & \\ +\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\left(\dfrac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)\left[\dfrac{n_2}{\sigma_{0,2}}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2-1}-\right. & \\ \left.-\dfrac{n_1}{\sigma_{0,2}}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_1-1}\right] & \sigma_1\le\sigma\le\sigma_2,\\ \dfrac{1}{E_0}+\left(\varepsilon_{0,2}-\dfrac{\sigma_{0,2}}{E_0}\right)\dfrac{n_2}{\sigma_{0,2}}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^{n_2-1} & 0\le\sigma_2\le\sigma.\end{cases}\qquad(38)$$

Отсюда видно, что сплайн дифференцируем как при переходе через точку $(\sigma_1;\varepsilon_1)$, так и через точку $(\sigma_2;\varepsilon_2)$.

Однако, идея авторов реализована ими с несколькими логическими недостатками.

Первый недостаток касается области определения двух законов Рамберга-Осгуда. Строго следуя концепции авторов, закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_1 должен быть определен только на первом и втором участке, так как на третьем участке, согласно их концепции, действует только закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_2. Аналогично, закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_2 должен быть определен только на втором и третьем участке, так как, согласно их концепции, на первом участке действует только закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_1. Поэтому, согласно концепции авторов закона UGent, эволюция процесса деформирования должна выглядеть следующим образом: начиная от начала нагружения и до точки $(\sigma_1;\varepsilon_1)$ действует первый закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_1. В точке $(\sigma_1;\varepsilon_1)$ «включается» второй закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_2 и на втором участке они работают вместе до точки $(\sigma_2;\varepsilon_2)$. При переходе через точку $(\sigma_2;\varepsilon_2)$ первый закон Рамберга-Осгуда с показателем степени n_1 «выключается», и далее, на третьем участке, работает только второй закон с показателем степени n_2.

Как следствие, на втором участке должны действовать одновременно оба закона и только они. Однако, сама структура закона Рамберга-Осгуда определяется в общем случае тремя механизмами деформирования, которые определяются линейной комбинацией двух линейных полиномов и степенной функции. Как результат, на втором участке действует совместно четыре механизма деформирования, определяемые двумя линейными полиномами и двумя степенными функциями. Из них линейными комбинациями можно образовать как оба закона Рамберга-Осгуда, так и ещё два «переходных» закона, работающих только на втором участке.

Отсюда следует второй существенный логический недостаток, присущий реализации закона UGent — это наличие иных, не свойственных обоим законам Рамберга-Осгуда механизмов деформирования, определяемых степенными функциями с показателями степени (n_1+1) и (n_2+1).

Третий недостаток касается условий, которым удовлетворяет закон деформирования на третьем участке. Не трудно убедиться проверкой, что «второй закон Рамберга-Осгуда» удовлетворяет

следующим требованиям: в точках $(-\Delta\varepsilon;0)$ и $(\varepsilon_{0,2}-\Delta\varepsilon;\sigma_{0,2})$ деформация и касательный модуль должны быть заданными. Однако не трудно показать, что обе точки не лежат внутри третьего участка. Отсюда вытекают трудности в определении физических параметров, свойственных «второму закону Рамберга-Осгуда», так как, согласно идее авторов, только на третьем участке процесс деформирования определяется исключительно этим законом.

Модель Белова-Головиной. В 2021 году была сформулирована трехзвенная модель Белова-Головиной (28)–(29) для кривой деформирования, имеющей участок с положительной кривизной:

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases} A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^{n_1} & 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1, \\ B_0+B_1\varepsilon+B_2\varepsilon^{n_1}+B_3\varepsilon^{n_2} & \varepsilon_1\le\varepsilon\le\varepsilon_2, \\ C_0+C_1\varepsilon+C_2\varepsilon^{n_2} & \varepsilon_2\le\varepsilon\le\varepsilon_c. \end{cases} \tag{39}$$

Основная идея заимствована у модели UGent, но в отличии от нее модель Белова-Головиной отражает зависимость напряжения от деформации, а не наоборот. Модель Белова-Головиной лишена недостатков, характерных для модели UGent.

Для первого и третьего участков принят закон Рамберга-Осгуда с индивидуальным для каждого участка набором формальных параметров:

$$\sigma_I(\varepsilon)=A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^{n_1}=(RO\,I),$$
$$\sigma_{III}(\varepsilon)=C_0+C_1\varepsilon+C_2\varepsilon^{n_2}=(RO\,III).$$

Закон деформирования на втором участке сформулирован, как линейная комбинация двух линейных полиномов и двух степенных функций, характерных для законов Рамберга-Осгуда, действующих на первом и третьем участках.

Модель является двенадцати-параметрической. Формальные параметры: A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1, C_2, n_1, n_2 выражены через двенадцать физических параметров, имеющих ясный физический смысл: через координаты четырех характерных точек кривой $(\varepsilon_0;\sigma_0)$, $(\varepsilon_1;\sigma_1)$, $(\varepsilon_2;\sigma_2)$; $(\varepsilon_c;\sigma_c)$ и величины касательных модулей в этих точках E_0, E_1, E_2, E_c.

Четыре параметра A_0, A_1, A_2, n_1 в (39) принадлежат закону Рамберга-Осгуда первого участка $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$ и должны удовлетворять следующим требованиям: в начальной и конечной точках первого участка должны быть заданы напряжение и модуль касательной. С учетом этого требования:

$$\begin{cases} A_0 = 0, \\ A_1 = \dfrac{1}{E_0}, \\ A_2 = \left(\varepsilon_1 - \dfrac{\sigma_1}{E_0}\right)\sigma_1^{-n_1}, \\ n_1 = \left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E_0}\right) \Big/ \left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \dfrac{1}{E_0}\right). \end{cases} \tag{40}$$

Параметры C_0, C_1, C_2, n_2 в (37) принадлежат закону Рамберга-Осгуда третьего участка $\varepsilon_2 \le \varepsilon \le \varepsilon_c$ и должны удовлетворять требованиям, чтобы в начальной и конечной точках третьего участка были заданы напряжение и касательный модуль. Отсюда получено:

$$\begin{gathered} C_0 = \frac{(\varepsilon_2 - C_2\sigma_2^{n_2})\sigma_c - (\varepsilon_c - C_2\sigma_c^{n_2})\sigma_2}{(\sigma_c - \sigma_2)}, \\ C_1 = \frac{-(\varepsilon_2 - C_2\sigma_2^{n_2}) + (\varepsilon_c - C_2\sigma_c^{n_2})}{(\sigma_c - \sigma_2)}, \\ C_2 = \frac{\left(\dfrac{1}{E_c} - \dfrac{1}{E_2}\right)}{n_2(\sigma_c^{n_2-1} - \sigma_2^{n_2-1})}. \end{gathered} \tag{41}$$

Исключая из последнего уравнения системы (41) амплитуды C_1, C_2 получаем нелинейное уравнение на показатель степени n_2

$$\frac{n_2\left(\left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_2}\right)^{n_2-1} - 1\right)}{\left(\left(\left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_2}\right)^{n_2} - 1\right) \Big/ \left(\left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_2}\right) - 1\right)\right) - n_2} = \frac{E_2 - E_c}{E_2 - \dfrac{(\sigma_c - \sigma_2)}{(\varepsilon_c - \varepsilon_2)}}. \tag{42}$$

На втором, переходном участке $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$ выделены явно законы первого и третьего участков, а остаток интерпретирован, как специфический механизм деформирования, работающий исключительно на втором участке:

$$\begin{gathered} \sigma_{II}(\varepsilon) = B_0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^{n_1} + B_3\varepsilon^{n_2} = \\ = (A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^{n_1}) + (B_0 - A_0 - C_0) + (B_1 - A_1 - C_1)\varepsilon + \\ + (B_2 - A_2)\varepsilon^{n_1} + (B_3 - C_2)\varepsilon^{n_2} + (C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{n_2}). \end{gathered} \tag{43}$$

Введены дополнительные обозначения:

$$D_0 = (B_0 - A_0 - C_0),\ \ D_1 = (B_1 - A_1 - C_1),$$
$$D_2 = (B_2 - A_2),\ \ D_3 = (B_3 - C_2). \tag{44}$$

С учетом этого:

$$\sigma_{II}(\varepsilon) = (RO\,I) + (RO\,III) + D_0 + D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^{n_1} + D_3\varepsilon^{n_2}. \tag{45}$$

Четыре последних слагаемых в (45) описывают работу дополнительного механизма, характерного только для второго участка.

Четыре параметра B_0, B_1, B_2, B_3 в (43) должны удовлетворять требованию, чтобы в начальной и конечной точках второго отрезка были заданы напряжения и касательные модули:

$$\begin{cases} \sigma_{II}(\varepsilon_1) = B_0 + B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_1^{n_1} + B_3\varepsilon_1^{n_2} = \sigma_1, \\ \sigma_{II}(\varepsilon_2) = B_0 + B_1\varepsilon_2 + B_2\varepsilon_2^{n_1} + B_3\varepsilon_2^{n_2} = \sigma_2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} E_{II}(\varepsilon_1) = B_1 + B_2 n_1\varepsilon_1^{n_1-1} + B_3 n_2\varepsilon_1^{n_2-1} = E_1, \\ E_{II}(\varepsilon_2) = B_1 + B_2 n_1\varepsilon_2^{n_1-1} + B_3 n_2\varepsilon_2^{n_2-1} = E_2. \end{cases} \tag{46}$$

На рис. 6 приведена выборка из 524 экспериментальных точек для стали Ст3сп и соответствующая ей теоретическая кривая, построенная в соответствии с решением (39).

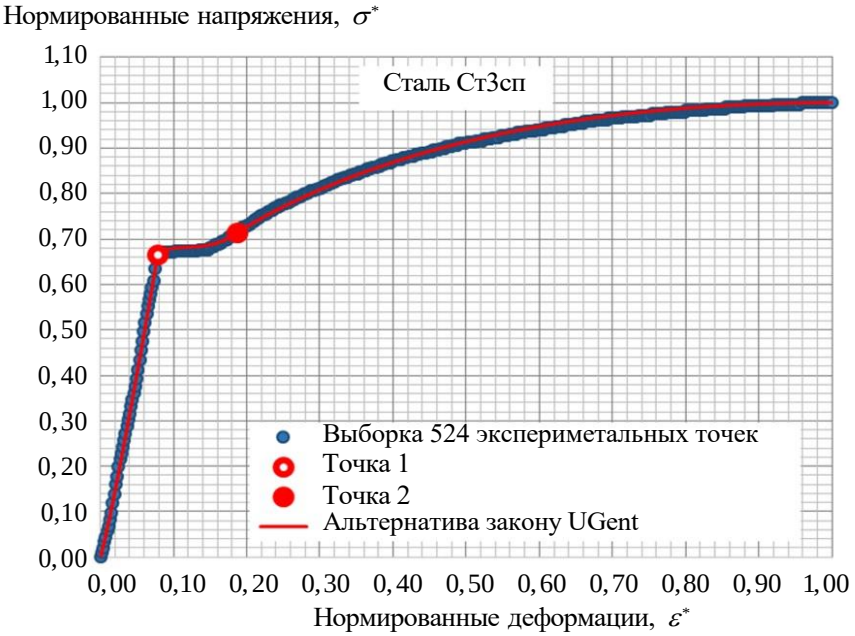


Рис. 6. Экспериментальная кривая стали Ст3сп и теоретическая кривая построенная по модели Белова-Головиной:
точка 1 — $(\varepsilon_1;\sigma_1)$; точка 2 — $(\varepsilon_2;\sigma_2)$

Теоретическая кривая имеет среднее квадратичное отклонение от выборки экспериментальных значений по деформациям 0,5% при оптимальных значениях параметров материала: $n_1 = 1{,}19$; $n_2 = 0{,}91$; $E_0^* = 1{,}1$; $E_2^* = 1{,}2$; $E_c^* = 0$; $\varepsilon_1^* = 0{,}08$; $\sigma_1^* = 0{,}667$; $\sigma_2^* = 0{,}715$; $\varepsilon_c^* = 1$; $\sigma_c^* = 1$.

Заключение. Проведенный анализ кривых деформирования показал, что для качественного описания зависимости между деформацией и напряжением на полном диапазоне нагружения, вплоть до точки предела прочности, необходимы многозвенные модели, с различными законами в зоне упругих и в зоне пластических деформаций.

Для кривых деформирования, не имеющих участка с положительной кривизной все двухзвенные модели, представленные в данном обзоре, показали высокую точность, укладывающуюся в необходимую инженерную точность 5%. Немного менее точной оказалась модель Надаи, но возможно, для другого упругопластического материала эта модель покажет более качественный результат.

Для описания кривых деформирования, имеющих участок с положительной кривизной необходимы, как минимум, трехзвенные модели, имеющие индивидуальные законы деформирования на каждом участке. Границами участков в этом случае являются точки, где происходит смена знака кривизны кривой деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Головина Н.Я., Белов П.А. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 1. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 63–96.

[2] Головина Н.Я., Белов П.А. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 2. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 2, с. 14–27.

[3] Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress–strain curves by three parameters*. Washington DC, NASA, 1943, 29 p.

[4] Papirno R. Goodness of fit of the Ramberg-osgood analytic stress-strain curve to tensile test data. *Journal of Testing and Evaluation*, 1982, vol. 10, no. 6, pp. 263–268.

[5] Bowen A.W., Partridge P.G.Limitations of the Hollomon strain-hardening equation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1974, vol. 7, no. 7, pp. 969–978.

[6] Gardner L. Experiments on stainless steel hollow sections – part 1: material andcross-sectional behavior. *Journal of Constructional Steel Research*, 2004, no. 60, pp. 1291–1318.

[7] Rasmussen K. Full range stress-strain curves for stainless steel alloys. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, vol. 59, iss. 1, pp. 47–61.

[8] Головина Н.Я. *Исследование вынужденных колебаний гибких металлических трубопроводов машин и агрегатов*. Дисс. канд. техн. наук. Тюмень, 2002, 148 с.

[9] Димитриенко Ю.И. *Основы механики твердого тел. Т.4. Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[10] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
[11] Кривошеева С.Я., Головина Н.Я. Исследование влияния осевой жесткости на работу гибких металлических трубопроводов. *Научное обозрение*, 2016, № 16, с. 213–216.
[12] Головина Н.Я. Вопросы устойчивости вынужденных поперечных колебаний гибких металлических трубопроводов. *Научное обозрение*, 2014, № 10, с. 63–66.
[13] Головина, Н. Я. Об одной эмпирической модели нелинейного деформирования упругопластических материалов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 3, с. 48–55.
[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2, с. 3–22.
[15] Головина Н.Я., Белов П.А. Кривая деформирования как экстремаль некоторого функционала. *Наука и бизнес: пути развития*, 2019, № 10 (100), с. 44–52.
[16] Головина Н.Я., Белов П.А. Модель кривой нелинейного деформирования стали 20ХГР и стали 35. *Проблемы прочности и пластичности*, 2020, т. 82, № 3, с. 305–316.
[17] Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел. Т.1*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1954, 648 с.
[18] Mirambell E., Real E. On the calculation of deflections in structural stainless steel beams: an experimental and numerical investigation. *Journal of Constructional Steel Research*, 2000, no. 54, pp. 109–133.
[19] Abdella K. Inversion of a full-range stress–strain relation for stainless steel alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, iss. 3, pp. 456–463.
[20] Abdella K. Explicit full-range stress-strain relations for stainless steel at high temperatures. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009, no. 65, pp. 794–800.
[21] Abdella K., Thannon R.A., Mehri A.I., Alshaikh F.A. Inversion of three-stage stress-strain relation for stainless steel in tension and compression. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, no. 67, pp. 826–832.
[22] Quach W.M., Huang J.F. Stress-Strain Models for Light Gauge Steels. *Procedia Engineering*, 2011, no. 14, pp. 288–296.
[23] Quach W.M., Huang J.F. Two-stage stress-strain models for light-gauge steels. *Advances in Structural Engineering*, 2014, vol. 17, no. 7, pp. 937–949.
[24] Hertelé S., De Waele W., Denys R., generic stress-strain model for metallic materials with twostage strain hardening behavior. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 146, no. 3, pp. 519–531.
[25] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 27–33.
[26] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part I. Model description. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 34–40.
[27] Golovina N.Ya. The nonlinear stress-strain curve model as a solution of the fourth order differential equation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 189, art. no. 104258.

[28] Белов П.А., Головина Н.Я. Критика закона деформирования UGent для упругопластических материалов и альтернатива ему. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2021, т. 27, № 1, с. 3–16.

[29] Golovina N.Y. Advantages and disadvantages of the Ramberg–Osgood law in modeling a stress–strain curve with a section of positive curvature. *Transactions of the Indian Institute of Metalsthis link is disabled*, 2022, vol. 75, no. 12, pp. 3159–3165.

Статья поступила в редакцию 12.11.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Головина Н.Я. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 3. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 1, с. 3–31.

Головина Наталья Яковлевна — канд. техн. наук, доцент, Тюменский индустриальный университет. e-mail: golovinanj@tyuiu.ru

Analysis of empirical models of deformation curves of elastoplastic materials (review). Part 3

© N.Ya. Golovina

Industrial University of Tyumen, Tyumen, 625000, Russian Federation

This article is the third part of a review of works devoted to the study of the properties of elastic-plastic materials. The first and second parts were devoted to the analysis of universal empirical laws of deformation, which model the material properties over the entire range of deformation, up to fracture. It was concluded that in order to create a model of the material response to stress growth, the deformation law must be at least four-parametric. The empirical Ramberg-Osgood law was found to be the most qualitative, at least for the titanium alloy VT6 considered. However, despite its accuracy, it does not reflect the material properties in the zone of large plastic strains, including in the vicinity of the point of ultimate strength. This paper presents an analysis of multilink models describing the relationship between strain and stress by different laws in the elastic zone and in the plastic zone. The review includes two-link models by Nadai, Mirambell-Real, Rasmussen, Abdella, formulated for materials whose strain curve has no positive curvature section. Also considered in the review are the three-link models of Quach; Hertele; Belov-Golovina, which allow modeling of deformation curves with a positive curvature region. The evaluation of the quality of empirical laws and their correspondence to the sample of experimental points was carried out by minimizing the standard quadratic deviation and using the method of gradient descent to determine the minimum of the function of many variables. The material for the comparative analysis of empirical models is titanium alloy VT6; for the Hertele and Belov-Golovina models — steel St3sp. It is shown that the models built on the basis of multi-line splines determine the properties of elastic-plastic materials more accurately than the models built on the basis of universal laws.

Keywords: *mathematical model of the deformation curve, empirical stress-strain curves, nonlinear elasticity law, elastoplastic material properties, physical parameters of elastoplastic materials, processing of experimental data*

REFERENCES

[1] Golovina N.Ya., Belov P.A. Analysis of empirical models of deformation curves of elastoplastic materials (review). Part 1. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 1, pp. 63–96.
[2] Golovina N.Ya., Belov P.A. Analysis of empirical models of deformation curves of elastoplastic materials (review). Part 2. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 2, pp. 14–27.
[3] Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress–strain curves by three parameters*. Washington DC, NASA, 1943, 29 p.
[4] Papirno R. Goodness of fit of the Ramberg-osgood analytic stress-strain curve to tensile test data. *Journal of Testing and Evaluation*, 1982, vol. 10, no. 6, pp. 263–268.
[5] Bowen A.W., Partridge P.G.Limitations of the Hollomon strain-hardening equation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1974, vol. 7, no. 7, pp. 969–978.
[6] Gardner L. Experiments on stainless steel hollow sections – part 1: material andcross-sectional behavior. *Journal of Constructional Steel Research*, 2004, no. 60, pp. 1291–1318.
[7] Rasmussen K. Full range stress-strain curves for stainless steel alloys. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, vol. 59, iss. 1, pp. 47–61.
[8] Golovina N.Ya. *Issledovanie vynuzhdennyh kolebanij gibkih metalliche-skih truboprovodov mashin i agregatov* [Investigation of forced vibrations of flexible metal pipelines of machines and aggregates]. Diss. Cand. Sc. (Eng.), Tyumen, 2002, 148 p.
[9] Dimitrienko Yu.I. *Osnovy mekhaniki tverdogo tela. T.4. Mekhanika sploshnoj sredy* [Fundamentals of solid mechanics. Vol.4. Continuum mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[10] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
[11] Krivosheeva S.Ya., Golovina N.Ya. Study of axial stiffness effect on the performance of pliable metal pipelines. *Scientific review*, 2016, no. 16, pp. 213–216.
[12] Golovina N.Ya. Problems of the stability of forced transverse vibrations of flexible metal pipelines. *Scientific review*, 2014, no. 10, pp. 63–66.
[13] Golovina N.Y. On one empirical model of nonlinear deformation of elastoplastic materials. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 48–55.
[14] Dimitrienko Y.I,, Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I. Modeling the elastic-plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 3–22.
[15] Golovina N.Ya., Belov P.A. Deformation curve as a functional extremal. *Science and Business: Ways of Developmen*, 2019, no. 10 (100), pp. 44–52.
[16] Golovina N.Ya., Belov P.A. Model of a curve of nonlinear deformation of steel 20HGR and steel 35. *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 3, pp. 305–316.
[17] Nadai A. *Theory of flow and fracture of solids. Vol.1*. New York, McGraw-Hill, 1950, 572 p.
[18] Mirambell E., Real E. On the calculation of deflections in structural stainless steel beams: an experimental and numerical investigation. *Journal of Constructional Steel Research*, 2000, no. 54, pp. 109–133.
[19] Abdella K. Inversion of a full-range stress–strain relation for stainless steel alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, iss. 3, pp. 456–463.

[20] Abdella K. Explicit full-range stress-strain relations for stainless steel at high temperatures. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009, no. 65, pp. 794–800.
[21] Abdella K., Thannon R.A., Mehri A.I., Alshaikh F.A. Inversion of three-stage stress-strain relation for stainless steel in tension and compression. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, no. 67, pp. 826–832.
[22] Quach W.M., Huang J.F. Stress-Strain Models for Light Gauge Steels. *Procedia Engineering*, 2011, no. 14, pp. 288–296.
[23] Quach W.M., Huang J.F. Two-stage stress-strain models for light-gauge steels. *Advances in Structural Engineering*, 2014, vol. 17, no. 7, pp. 937–949.
[24] Hertelé S., De Waele W., Denys R., generic stress-strain model for metallic materials with twostage strain hardening behavior. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 146, no. 3, pp. 519–531.
[25] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 27–33.
[26] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part I. Model description. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 34–40.
[27] Golovina N.Ya. The nonlinear stress-strain curve model as a solution of the fourth order differential equation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 189, art. no. 104258.
[28] Belov P.A., Golovina N.Ya. Criticism of the law of deformation ugent for elastoplastic materials and an alternative to it. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, vol. 27, no. 1, pp. 3–16.
[29] Golovina N.Y. Advantages and disadvantages of the Ramberg–Osgood law in modeling a stress–strain curve with a section of positive curvature. *Transactions of the Indian Institute of Metalsthis link is disabled*, 2022, vol. 75, no. 12, pp. 3159–3165.

Golovina N.a.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, position of associate professor, Industrial University of Tyumen. e-mail: golovinanj@tyuiu.ru