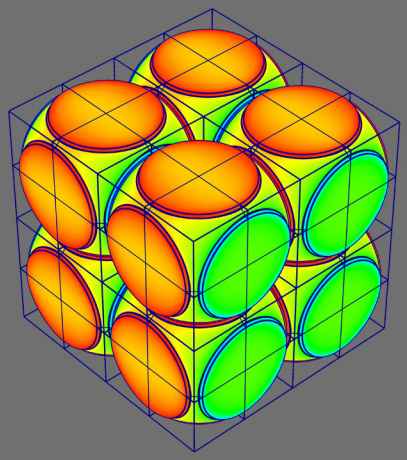
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Облакова Т.В., Касупович Э. Численное исследование персистентных временных рядов на основе модели ARFIMA. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 4, с. 114–125.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/297/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.253
06.11.2026 04:26:17

УДК 519.2 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-4-114125

Численное исследование персистентных временных рядов на основе модели ARFIMA

© Т.В. Облакова, Э. Касупович

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Работа посвящена методам обнаружения долговременной памяти в финансовых временных рядах. Методом R/S анализа с помощью оригинального программного кода исследован ряд значений реального финансового индекса S&P500, получены оценки показателя Херста, продемонстрировано наличие персистентности. Для решения задачи прогнозирования будущих значений ряда предложена модель ARFIMA, представляющая собой обобщение стандартной модели ARIMA и предполагающая использование оператора дробного дифференцирования. Изложен и реализован двухэтапный алгоритм построения прогноза для ряда логарифмических прибылей. Показано, что применение модели ARFIMA улучшает качество прогноза в сравнении с ARIMA по всем стандартным метрикам.

Ключевые слова: *стохастическое моделирование, временные ряды, персистентность, показатель Хёрста, R/S анализ, модель ARFIMA*

Введение. Первым математиком, предложившим модель финансового рынка был, как известно, Луи Башелье. В начале XX века в своих работах он применил открытое к этому моменту броуновское движение к изучению колебаний курсов ценных бумаг.

Спустя полвека Марковитц на основе теории Башелье создал теорию инвестиционного портфеля. Далее начали появляться новые модели, основанные на результатах предшественников. Такие как: модель оценки финансовых активов (CAMP), модель Блэка-Шоулза для оценки стоимости опционов и другие. Все эти модели были построены на основе гипотезы о нормальности цен и хорошо работали до 87 года прошлого столетия. Однако кризис показал, что в периоды краха фондовых рынков модели, основанные на гауссовском распределении, несостоятельны.

Альтернативный подход предложил американский математик Мандельброт. Он обнаружил, что изменение курсов ценных бумаг на самом деле не похоже на гауссовское распределение: обнаруживаются так называемые «тяжелые хвосты», высокие пики (рис. 1). Причем в периоды спокойствия несоответствие слабо заметно, тогда как при приближении к кризисным годам указанные эффекты выражены сильнее.

Полученные Мандельбротом результаты позволили сделать предположение, что динамика фондовых рынков описывается более сложным законом. Поиски альтернативных моделей, объясняющих обнаруженные эффекты, интенсивно продолжается все последние десятилетия [1–18].

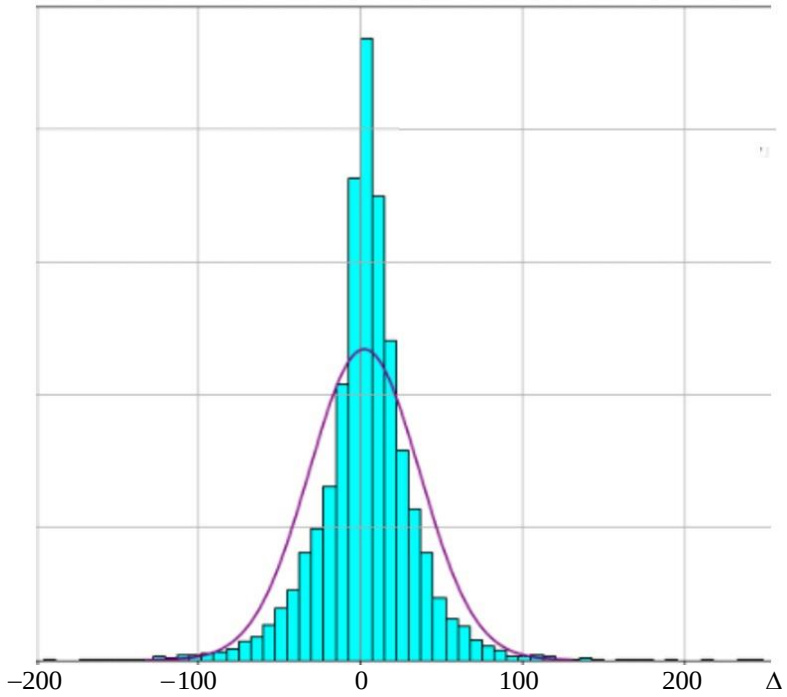


Рис. 1. Частотное распределение пятидневных прибылей по индексу S&P500. Декабрь 1991 — октябрь 2021:
— — плотность нормального распределения;
— — относительные частоты распределения индекса

Целью настоящей работы является:

- проверка гипотезы о наличии долговременной памяти в финансовых временных рядах методом R/S анализа с использованием реальных данных в открытом доступе;
- подбор параметров и реализация модели ARFIMA, прогнозирующей будущие значения ряда с учетом этой зависимости;
- визуализация, анализ и интерпретация полученных результатов.

Метод R/S анализа. Рассмотрим последовательность «логарифмических прибылей»

$$h_n = \ln \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

где $X = \{X_n\}$, $n \geq 0$ — последовательность значений некоторого финансового индекса. Образуем величины $H_n = h_1 + \ldots + h_n$ и положим

$$R_n = \max_{k \leq n} \left(H_k - \frac{k}{n} H_n \right) - \min_{k \leq n} \left(H_k - \frac{k}{n} H_n \right).$$

Разность $H_k - \frac{k}{n}H_n$ имеет смысл отклонения H_k от среднего значения $\frac{k}{n}H_n$, а величина R_n таким образом характеризует степень разброса этих отклонений.

R/S анализ исследует поведение нормализованного размаха R_n / S_n, где S_n — эмпирическое среднее квадратичное, то есть

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right)^2.$$

В предположении независимости величин $\{h_n\}$ (гипотеза H_0) Феллер установил асимптотическое поведение характеристик R_n:

$$MR_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{1/2},$$

$$DR_n \sim \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right)n.$$

Этот результат позволяет заключить, что при справедливости H_0 при больших n значение R_n / S_n должно быть близко к $\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{1/2}$, или в логарифмах

$$\ln\frac{R_n}{S_n} \approx \ln\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\ln n.$$

Таким образом проверка гипотезы H_0 (наличие линейной зависимости между $\ln\frac{R_n}{S_n}$ и $\ln n$ с коэффициентом $1/2$) может осуществляться методами регрессионного анализа. Отклонение гипотезы H_0 может быть объяснено зависимостью величин $\{h_n\}$.

Модель *ARFIMA(p,d,q).* При прогнозировании стационарных временных рядов широко и успешно используется модель $ARMA(p,q)$:

$$h_n - a_1 h_{n-1} - \ldots - a_p h_{n-p} = a_0 + b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q}, \qquad (1)$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стандартный гауссовский белый шум, p, q — параметры модели, $a_0,\ldots.a_p$, $b_0,\ldots.b_q$ — постоянные. Равенство (1) с помощью

лагового оператора L, действующего по правилу $Lh_n = h_{n-1}$, удобно в виде:

$$AR(L)h_n = a_0 + MA(L)h_n, \tag{2}$$

где

$$AR(L) = 1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p,\ MA(L) = b_0 + b_1 L + \ldots + b_q L^q. \tag{3}$$

Модель $ARIMA(p,d,q)$ отличается тем, что вместо последовательности $\{h_n\}$ в соотношении (2) используются разности порядка d:

$$\Delta^d(h_n) = \Delta^{d-1}(h_n - h_{n-1}).$$

Следовательно, получаем следующее определение модели $ARIMA(p,d,q)$:

$$AR(L)\Delta^d(h_n) = a_0 + MA(L)\varepsilon_n.$$

Замечено, что модели $ARMA(p,q)$ и $ARIMA(p,d,q)$ в рядах с долговременной памятью работают плохо. Для отражения свойств долговременной памяти (в случае ее обнаружения) в [16] предлагается использовать модель *ARFIMA* (AutoRegressive Fractional Integrated Moving Average) которая вид:

$$AR(L)(1-L)^d h_n = a_0 + MA(L)\varepsilon_n, \tag{4}$$

где $d \in (-0,5;0,5)$ — дробный коэффициент, связанный с показателем Хёрста соотношением, полученным Гевеке и Портер-Худак в работе [17]

$$d = H - 1/2. \tag{5}$$

Разностный оператор $(1-L)^d$ можно естественным образом с помощью биномиального разложения записать в виде:

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(-L)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}(-L)^k, \tag{6}$$

где d — любое действительное число.

Итого, *ARFIMA* использует три параметра:

- p — коэффициент авторегрессии;
- q — коэффициент скользящего среднего;
- d — дробный коэффициент, $d \in (-0,5;0,5)$.

В рассмотренной выше модели (4) дробный разностный коэффициент отвечает за самоподобие ряда. При коэффициенте $d = 0$ модель (4) вырождается в $ARMA(p, q)$.

Алгоритм решения. Рассмотрим детально алгоритм реализации модели (4), который предполагает следующую декомпозицию задачи.

Шаг 1. Методом R/S анализа оцениваем показатель Херста H и определяем порядок дифференцирования d по формуле (5).

Шаг 2. Уравнение (4) предлагается разделить на две части:

$$(1-L)^d h_n = y_n, \tag{7}$$

$$AR(L)\, y_n = \left(a_0 + MA(L)\, \varepsilon_n\right). \tag{8}$$

Этап (7), который можно интерпретировать как сглаживание $\{h_n\}$ его предыдущими значениями, реализуем его по формуле (6) .

Шаг 3. По сглаженному ряду $\{y_n\}$ стандартными методами подбираются параметры модели (8).

Шаг 4. Моделирование прогноза будущих значений ряда осуществляется на основе соотношения (4), из которого получается зависимость будущих значений от прошлых. В самом деле, преобразуем левую часть (4) с учетом (6) следующим образом:

$$AR(L)(1-L)^d h_n = \left(1-\sum_{i=1}^{p} a_i L^i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}(-L)^k h_n =$$

$$= \left(1-\sum_{i=1}^{p} a_i L^i\right)\left(h_n + \sum_{k=1}^{\infty} w_k h_{n-k}\right) =$$

$$= h_n + \sum_{k=1}^{\infty} w_k h_{n-k} - \sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-i} - \sum_{i=1}^{p} a_i L^i\left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k h_{n-k}\right).$$

Далее перенесем все слагаемые из левой части (4) за исключением h_n в правую и получим:

$$\begin{aligned} h_n = a_0 + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{n-j} + \sum_{k=1}^{\infty} w_k h_{n-k} - \\ -\sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-i} - \sum_{i=1}^{p} a_i L^i\left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k h_{n-k}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Для оценки результатов моделирования использовались следующие метрики:

- $MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - X_i\right|$ — средняя абсолютная ошибка;

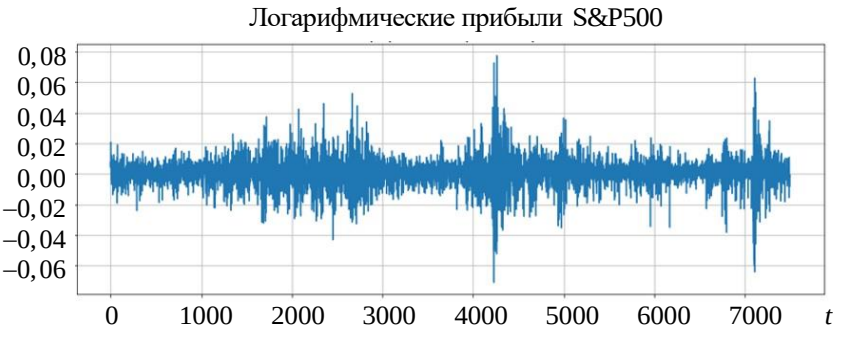
- $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - X_i\right|}$ — корень средней квадратичной ошибки;
- $MAPE = \frac{100\%}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{X_i - X_i}{X_i}\right|$ — средняя абсолютная процентная ошибка;
- $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - X_i\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X_i}\right|}$ — коэффициент детерминации.

Интерес представляют две последние метрики. $MAPE$ — безразмерный коэффициент с простой интерпретацией — показывает в процентах насколько в среднем модель ошибается. R^2 — коэффициент, который измеряет долю дисперсии, объясненную моделью [19, 20]. Если значение этой метрики близко к 1, то считают, что модель хорошо описывает данные.

Численное решение задачи прогнозирования. Рассмотрим ряд значений финансового индекса S&P500 (рис. 2).



а



б

Рис. 2. График:
а — наибольшая зафиксированная цена индекса S&P500 за день;
б — логарифмическая прибыль S&P500

Применив к ряду логарифмических прибылей метод R/S анализа, получаем оценку показателя Херста $H = 0,586$. Тогда дробный разностный коэффициент $d = H - \frac{1}{2} = 0,086$. Поскольку показатель Херста описывает поведение ряда для каждого его подотрезка, ограничим размер исследуемого ряда 4000 значениями. Согласно формуле (7) продифференцируем ряд логарифмических прибылей (рис.3).

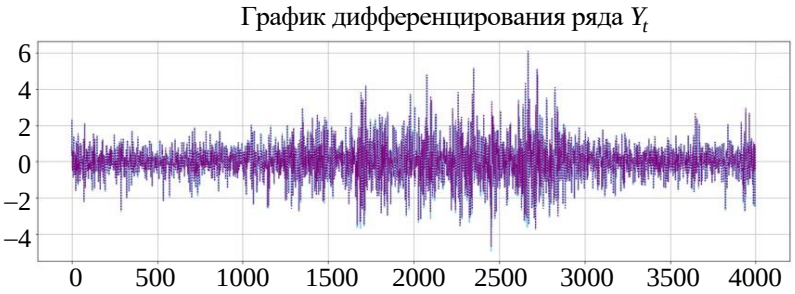


Рис. 3. Результат дифференцирования ряда логарифмических прибылей: · · · — h_t ; — — Y_t

Для подбора параметров модели *ARMA* воспользуемся открытым модулем arima.models библиотеки statsmodels. Дополнительно к решению, она высчитывает критерии, на основании которых мы будем принимать модель [19].

В результате оптимальной оказалась модель:

$$\begin{aligned} &y_n - 0,871y_{n-1} + 0,089y_{n-2} = \\ &= 0,000736 + \varepsilon_n - 0,835\varepsilon_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда, подставляя полученный результат (10) в формулу (9), получаем численное выражение прогноза логарифмических прибылей:

$$\begin{aligned} h_t &= 0,000736 + \varepsilon_t - 0,835\varepsilon_{t-1} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} (-1)^k h_{t-k} + \\ &+ 0,871h_{t-1} - 0,089h_{t-2} + (0,871h_{t-1} - 0,089h_{t-2}) \cdot \end{aligned}$$

Результат прогнозирования логарифмических прибылей отражен для 100 следующих значений на рис. 4.

Переведем логарифмические прибыли в абсолютные значения по формуле

$$X_{t+1} = X_t e^{ht}.$$

Результат приведен на рис. 5.

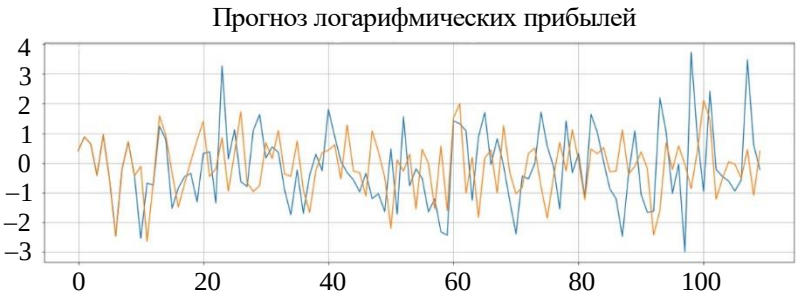


Рис. 4. Прогноз 100 следующих значений для ряда логарифмических прибылей:
— h_t ; — прогноз

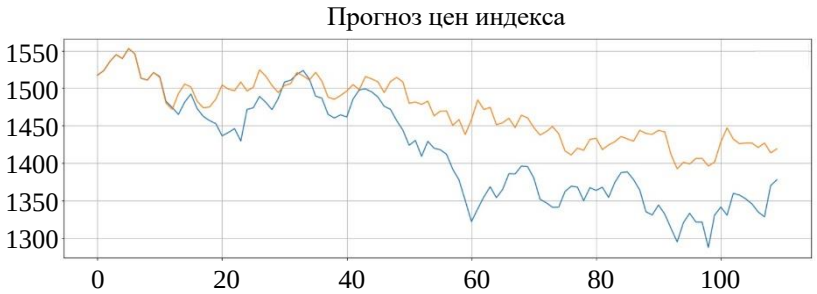


Рис. 5. Прогноз 100 следующих значений цен индекса S&P500
— X_t ; — прогноз

Результаты прогнозирования. Для получения более объективных результатов произведено моделирование нескольких прогнозов для модели *ARFIMA* (рис. 6).

Для сравнения результатов произведем прогноз цен наиболее широко используемой моделью ARIMA (рис. 7).

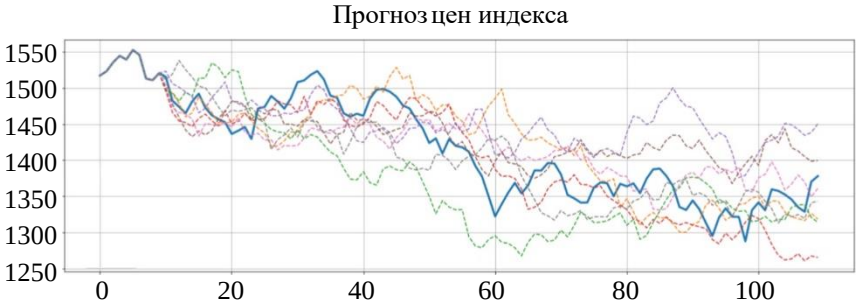


Рис. 6. Моделирование семи траекторий прогноза цен индекса S&P500 моделью *ARFIMA* на фоне реального изменения (сплошная линия):
— X_t ; — прогноз № 1; — прогноз № 2;
— прогноз № 3; — прогноз № 4;
— прогноз № 5; — прогноз № 6;
— прогноз № 7

Для усредненных траекторий вычислим значения метрик для двух моделей, и сравним полученные результаты в виде табл. 1.

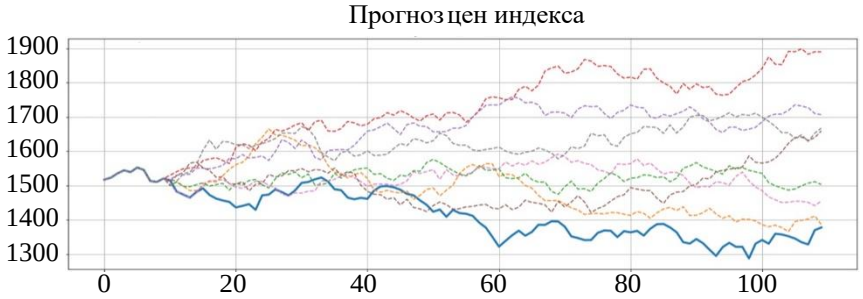


Рис. 7. Моделирование семи траекторий прогноза цен индекса S&P500 моделью *ARIMA* на фоне реального изменения (сплошная линия):
— X_t; - - - — прогноз № 1; - - - — прогноз № 2;
- - - — прогноз № 3; - - - — прогноз № 4;
- - - — прогноз № 5; - - - — прогноз № 6;
- - - — прогноз № 7

Таблица 1

Полученные метрики по прогнозу моделями *ARFIMA* и *ARIMA*

Модель	MAE	RMSE	MAPE	R^2
ARFIMA	42,946	51,567	0,031	0,540
ARIMA	174,783	198,130	0,127	0,288

Выводы. Из полученных результатов можно сделать вывод, что модель *ARIMA* значительно хуже справляется с задачей прогноза финансовых временных рядов. Она сильнее ошибается в абсолютных значениях и не способна уловить тенденцию в изменении поведения траектории.

Также интерпретируя результаты, полученные с использованием *ARFIMA* модели, можно сделать выводы:

- модель в среднем ошибается на 3 %;
- модель описывает вариацию значений на 54 %;
- модель имеет несколько серьезных выбросов, объясняющих превышение *RMSE* на девять пунктов по сравнению с *MAE*.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. *Немарковские физические процессы*. Москва, Физматлит, 2018, 288 с.
[2] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели*. Москва, МЦНМО, 2016, 440 с.
[3] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, iss. 4, pp. 422–437.
[4] Mandelbrot B.B., Hudson R.L. *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward*. London, Profile books, 2010, 352 с.
[5] Ярыгина И.З., Гисин В.Б., Путко Б.А. Использование фрактальных моделей ценовой динамики активов в целях управления финансовыми рисками. *Финансы: теория и практика*, 2019, т. 23, № 6 (114), с. 117–130.
[6] Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*. Москва, Постмаркет, 2000, 352 с.

[7] Dieker A.B., Mandjes M. On spectral simulation of fractional Brownian motion, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2003, vol. 17, iss. 3, pp. 417–434.
[8] Coeurjolly J.-F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, vol. 4, iss. 2, pp. 199–227.
[9] Бондаренко В.В. Прогноз временного ряда с помощью аппроксимации фрактальным броуновским движением. *Системные исследования и информационные технологии*, 2013, № 4, с. 80–88.
[10] Бондаренко В.В. Моделирование данных с использованием фрактального броуновского движения. *Велес*, 2016, № 5–1, с. 5–11.
[11] Петерс Э. *Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка*. Москва, Мир, 2000, 336 с.
[12] Поршнев С.В., Соломаха Э.В., Пономарева О.А. Об особенностях оценок показателя Херста классического броуновского движения, вычисляемых с помощью метода R/S-анализа. *International Journal of Open Information Technologies*, 2020, т. 8, № 10, с. 45–50.
[13] Labonne M., Chatzinakis C., Olivereau A. Predicting bandwidth utilization on network links using machine learning. European Conference *on Networks and Communications (EuCNC)*, 2020, pp. 242–247.
[14] Bassingthwaighte J.B., Raymond G.M. Evaluating rescaled range analysis for time series. *Annals of Biomedical Engineering*, 1994, vol. 22, no. 4, pp. 432–444.
[15] Ariyo A.A., Adewumi A.O., Ayo C.K. Stock price prediction using the ARIMA model. *2014 UKSim-AMSS 16th International Conference on Computer Modelling and Simulation*, 2015, pp. 106–112.
[16] Xiu J., Jin Y. Empirical study of ARFIMA model based on fractional differencing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, vol. 377, iss. 1, pp. 138–154.
[17] Geweke J., Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 1983, vol. 4, iss. 4, pp. 221–238.
[18] Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Методы решения задачи непараметрической проверки гипотез Лемана при испытаниях параллельных систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с. 98–112.
[19] Базилевский М. П. Аналитические зависимости между коэффициентами детерминации и соотношением дисперсий ошибок исследуемых признаков в модели регрессии Деминга. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 104–116.
[20] Артемов А.В. *Вероятностные модели и прикладная статистика в финансовой математике* [Электронный ресурс], 2018. URL: http://wiki.cs.hse.ru/Вероятностные_модели_и_прикладная_статистика_в_финансовой_математике (дата обращения: 20.10.2022)

Статья поступила в редакцию 27.10.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Облакова Т.В., Касупович Э. Численное исследование персистентных временных рядов на основе модели ARFIMA. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 4, с. 114–125.

Облакова Татьяна Васильевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: obltvu@bmstu.ru

Касупович Эдин — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: edkasy@yandex.ru

Numerical research of persistent time series based on the ARFIMA model

© T.V. Oblakova, E. Kasupovich

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The work is devoted to methods for detecting long-term memory in financial time series. Using the method of analysis with the help of the original program code, a number of values of the real financial index S & P500 were studied, estimates of the Hurst index were obtained, and persistence was demonstrated. To solve the problem of predicting the future values of a series, the ARFIMA model is proposed, which is a generalization of the standard ARIMA model and involves the use of a fractional differentiation opera-tor. A two-stage algorithm for constructing a forecast for a series of logarithmic profits is presented and implemented. It is shown that the use of the ARFIMA model improves the quality of the forecast in comparison with ARIMA for all standard metrics.

Keywords: *stochastic modeling, time series, persistence, Hurst exponent, R/S analysis, ARFIMA model*

REFERENCES

[1] Morozov A.N., Skripkin A.V. *Nemarkovskie fizicheskie processy* [Non-Markov physical processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018, 288 p.

[2] Shiryaev A.N. *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki. Tom 1. Fakty. Modeli* [Fundamentals of stochastic financial mathematics. Volume 1. Facts. Models]. Moscow, MCCME Publ., 2016, 440 p.

[3] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, iss. 4, pp. 422–437.

[4] Mandelbrot B.B., Hudson R.L. *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward*. London, Profile books, 2010, 352 c.

[5] Yarygina I.Z., Gisin V.B., Putko B.A. Fractal asset pricing modelsfor financial risk management. *Finance: Theory and Practice*, 2019, vol. 23, no. 6 (114), pp. 117–130.

[6] Kronover R.M. *Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii* [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of theory]. Moscow, Postmarket Publ., 2000, 352 c.

[7] Dieker A.B., Mandjes M. On spectral simulation of fractional Brownian motion, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2003, vol. 17, iss. 3, pp. 417–434.

[8] Coeurjolly J.-F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, vol. 4, iss. 2, pp. 199–227.

[9] Bondarenko V.V. The forecast of the time series by approximating the fractal Brownian motion. *System research and information technologies*, 2013, no. 4, pp. 80–88.

[10] Bondarenko V.V. The modelling of real data with using fractional Brownian motion. *Veles*, 2016, no. 5–1, pp. 5–11.

[11] Peters E.E. *Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility*. Wiley, 1996, 288 p.

[12] Porshnev S.V., Solomaha E.V., Ponomareva O.A. Peculiarities of estimating the Hurst exponent of classical Brownian motion, using the R/S analysis. *International Journal of Open Information Technologies*, 2020, vol. 8, no. 10, pp. 45–50.
[13] Labonne M., Chatzinakis C., Olivereau A. Predicting bandwidth utilization on network links using machine learning. European Conference *on Networks and Communications (EuCNC)*, 2020, pp. 242–247.
[14] Bassingthwaighte J.B., Raymond G.M. Evaluating rescaled range analysis for time series. *Annals of Biomedical Engineering*, 1994, vol. 22, no. 4, pp. 432–444.
[15] Ariyo A.A., Adewumi A.O., Ayo C.K. Stock price prediction using the ARIMA model. *2014 UKSim-AMSS 16th International Conference on Computer Modelling and Simulation*, 2015, pp. 106–112.
[16] Xiu J., Jin Y. Empirical study of ARFIMA model based on fractional differencing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, vol. 377, iss. 1, pp. 138–154.
[17] Geweke J., Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 1983, vol. 4, iss. 4, pp. 221–238.
[18] Timonin V.I., Tyannikova N.D. Methods for solving the problem of non-parametric testing of Lehmann's hypotheses when testing parallel systems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 98–112.
[19] Bazilevsky M.P. Analytical dependences between the determination coefficients and the ratio of error variances of the test items in Deming regression model. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 104–116.
[20] Artemov A.V. *Veroyatnostnye modeli i prikladnaya statistika v finansovoj matematike* [Probabilistic models and applied statistics in financial mathematics] [Electronic resource], 2018. URL: http://wiki.cs.hse.ru/Probabilisticmodels_and_application_statistic_infinance_matematics (accessed: 20.10.2022)

Oblakova T.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: obltvu@bmstu.ru

Kasupovich E., Student of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: edkasy@yandex.ru