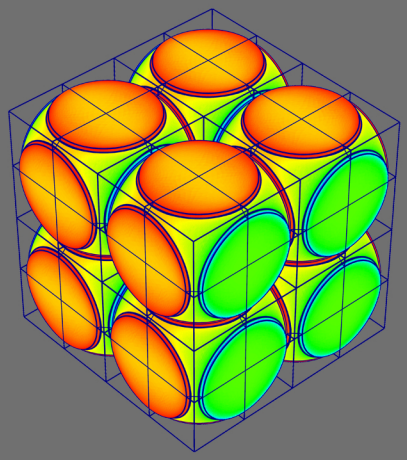
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Облакова Т.В., Алексеев Д.С. Сравнительный анализ методов моделирования и прогнозирования временных рядов на основе теории фрактального броуновского движения. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 4, с. 48–62

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/293/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.36
06.11.2026 20:07:34

УДК 519.2 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-4-4862

Сравнительный анализ методов моделирования и прогнозирования временных рядов на основе теории фрактального броуновского движения

© Т.В. Облакова, Д.С. Алексеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Работа посвящена сравнению различных методов моделирования и применения фрактального броуновского движения в задачах анализа временных рядов. Реализованы программные модули, генерирующие траектории фрактального броуновского движения с использованием методов стохастического представления, разложения Холецкого и Дэвиса-Харта. Проведено сравнение алгоритмов с точки зрения их сложности и качества получаемых траекторий. Показатель Хёрста оценивался методами Минковского и R/S анализа. Предложена и реализована аппроксимация временных рядов фрактальным броуновским движением с помощью степенной функции для последующего применения алгоритма линейного прогнозирования, основанного на теореме о нормальной корреляции. Установлено, что с помощью представленной аппроксимации удается добиться удовлетворительного прогноза валютного курса на несколько значений вперед.

Ключевые слова: *фрактальное броуновское движение, показатель Хёрста, стохастическое представление, разложение Холецкого, метод Дэвиса-Харта, метод Минковского, метод R/S анализа, линейное прогнозирование временных рядов*

Введение. До недавнего времени модели стохастических процессов, используемые в прикладных научных исследованиях и реальных задачах, предполагали марковский характер таких процессов. Однако недавние исследования показали, что в реальных данных обнаруживается дальнодействующая зависимость, или свойство персистентности [1]. Это означает, что поведение реального процесса в момент времени $t+1$ зависит не только от его состояния в момент времени t, но и от всей истории процесса до этого момента времени. Более того, оказалось, что этим свойством нельзя пренебречь из-за оказываемого им влияния на поведение глобальной системы.

Применительно к финансовой математике эта тенденция привела к увеличению интереса к этой тематике и росту популярности модели фрактального броуновского движения (ФБД), обладающего необходимым свойством персистентности [2]. В многочисленных работах изучаются как способы моделирования ФБД и оценивания показателя Хёрста, так и возможности его применения к анализу и прогнозированию реальных временных рядов [3–15].

Целью настоящей работы является изучение методов моделирования фрактального броуновского движения и их сравнительный анализ.

Сравнение проводится на основе специально разработанного вычислительного программного комплекса для моделирования фрактального броуновского движения и оценивания показателя Хёрста. В работе проведен сравнительный анализ качества моделирования фрактального броуновского движения и методов оценивания показателя Хёрста, а также решены задачи прогнозирования временных рядов с помощью аппроксимации фрактальным броуновским движением.

Основные определения и факты. Стохастический процесс $B_H(t)$, $t \geq 0$ называется (стандартным) фрактальным броуновским движением с показателем Хёрста $H \in (0,1]$ и ковариационной функцией [2]:

$$R_{B_H}(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \ \forall t,s > 0, \tag{1}$$

если $B_H(0) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, а приращения $\Delta B_H = B_H(t+s) - B_H(s)$ стационарны и распределены нормально с ковариационной функцией:

$$R_{\Delta B_H}(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t-s+1|^{2H} + |t-s-1|^{2H} - 2|t-s|^{2H}\right), \ \forall t,s > 0. \tag{2}$$

В силу нормальности конечномерных распределений из (1) легко вывести, что [2]

$$B_H(t) \sim N\left(0, t^H\right), \tag{3}$$

а также, что ФБД обладает свойством автомодельности с показателем Херста H, то есть [9]

$$\mathrm{Law}\left(B_H(a \cdot t)\right) = \mathrm{L}\left(a^H B_H(t)\right). \tag{4}$$

Геометрически равенство (4) означает самоподобие траекторий, что и объясняет употребление термина «фрактальное» в названии ФБД [2].

Заметим, что при $H = 1/2$ процесс $B_H(t)$ является обыкновенным броуновским движением с независимыми приращениями, поскольку в этом случае

$$R_{B_{1/2}}(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t| + |s| - |t-s|\right) = \min\{t,s\}. \tag{5}$$

Методы моделирования ФБД. ***Стохастическое представление ФБД.*** Исследования о моделировании ФБД начались с работы Мандельброта и Ван Несса [4], в которой для построения траекторий использовалось представление процесса посредством стохастических интегралов по винеровскому процессу $W = W(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$B_H(t) = c_H\left(\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\right)dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2}\,dW_s\right), \quad (6)$$

где $c_H = \sqrt{\dfrac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(1/2+H)\Gamma(2-2H)}}$, $s < t$.

Аппроксимируя интеграл (6) суммами Римана, получим итеративную формулу для моделирования процесса $\tilde{B}_H(t)$, $t = \overline{0,T}$:

$$\tilde{B}_H(t) = C_H\left(\sum_{k=-a}^{0}\left((t-k)^{H-1/2} - (-k)^{H-1/2}\right)B_1(k) + \sum_{k=0}^{t}(t-k)^{H-1/2}\,B_2(k)\right), \quad (7)$$

где B_1, B_2 — вектора стандартного нормального распределения размерности $(a+1)$ и $(T+1)$ соответственно [5],

$$C_H = \sqrt{\frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\Gamma(1/2+H)}}, \quad a = T^{1,5}.$$

Метод с использованием разложения Холецкого. Приращения ФБД представим в виде линейного преобразования стандартного гауссовского вектора $\varepsilon = \varepsilon_k \sim N(0,1)$, $k = \overline{1,n}$. Для моделирования траектории ФБД с помощью метода с использованием разложения ковариационной матрицы методом Холецкого [5] необходимо рассмотреть следующий временной ряд:

$$y_k = B_H^{k+1} - B_H^k, \ k = \overline{1,m}, \ m = n-1. \quad (8)$$

Ряд (8) называется фрактальным гауссовским шумом с показателем Хёрста H и ковариационной матрицей R, элементы которой вычисляются по формуле (2). Для реализации данного подхода к моделированию ФБД необходимо преобразовать ковариационную функцию приращений к следующему виду [5]:

$$R_{\Delta B_H}(t, t+s) = \frac{1}{2}\left(|s+1|^{2H} + |s-1|^{2H} - 2|s|^{2H}\right) = \gamma(s), \ s \geq 0. \quad (9)$$

Ковариационную матрицу, получаемую с помощью формулы (9), представим в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \cdots & \gamma(m-2) & \gamma(m-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(m-3) & \gamma(m-2) \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(m-4) & \gamma(m-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(m-2) & \gamma(m-3) & \gamma(m-4) & \cdots & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(m-1) & \gamma(m-2) & \gamma(m-3) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что матрица (10) является симметричной и положительно определенной. Следовательно, можно разложить ее с помощью метода квадратного корня (Разложение Холецкого):

$$\Gamma = L \cdot L^T, \quad (11)$$

где L — нижняя треугольная матрица со строго положительными элементами на главной диагонали.

Тогда значения приращений ФБД можно, как известно [5], получить линейным преобразованиям гауссовского вектора ε:

$$y = L \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Следовательно, с учетом (12) значения искомой траектории фрактального броуновского движения B_H^k можно получить по следующей рекуррентной формуле:

$$B_H^0 = y_0,\ B_H^{k+1} = B_H^k + y_k,\ k = \overline{1,m}. \quad (13)$$

Метод Дэвиса-Харта. Рассматриваемый метод [5] в некоторой степени похож на алгоритм с разложением Холецкого. Основная идея алгоритма заключается в вычислении циркулянтной ковариационной матрицы G размера $m = 2(n-1)$:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-2} & g_{m-1} \\ g_{m-1} & g_0 & g_1 & \cdots & g_{m-3} & g_{m-2} \\ g_{m-2} & g_{m-1} & g_0 & \cdots & g_{m-4} & g_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_0 & g_1 \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{m-1} & g_0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $g_k = \begin{cases} 1,\ k = 0, \\ \gamma(k),\ k = \overline{1,n-1}, \\ \gamma(M-k),\ k = \overline{n,m-1}. \end{cases}$

Заметим, что циркулянтная матрица может быть представлена в виде:

$$G = Q\Lambda\bar{Q} = S\bar{S}, \tag{15}$$

где Λ — диагональная матрица собственных значений G, $Q = \left(q_{jk}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}}\exp\left(-2\pi i\frac{jk}{m}\right)$, $j,k = \overline{0,m-1}$, $S = Q\Lambda^{1/2}\bar{Q}$.

При этом выполняется:

$$Q\bar{Q} = E. \tag{16}$$

Собственные значения матрицы G можно найти по формуле [5]:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{2n-1} g_j \exp\left(2\pi i\, {jk}/{m}\right), \quad j,k = \overline{0,m-1}, \tag{17}$$

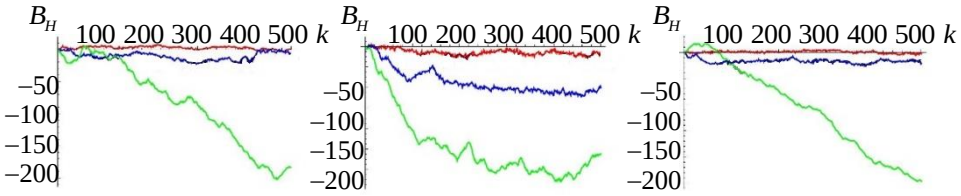
где g_j — $(j+1)$ элемент первой строки матрицы G. Т.к. матрица G положительно определена и симметрична, то ее собственные значения также будут положительными и действительными.

Для нахождения траектории ФБД необходимо вычислить следующую матричную формулу:

$$B_H = Q\Lambda^{1/2}\bar{Q}\varepsilon, \tag{18}$$

где ε — стандартный нормально распределенный вектор.

Сравнение методов моделирования ФБД. Произведем оценку качества моделирования траекторий ФБД рассмотренными выше методами. Для начала сгенерируем каждым алгоритмом реализации ФБД длины $n = 500$ с показателем Хёрста $H = \{0,2; 0,5; 0,8\}$ и визуализируем их на рис. 1.



а *б* *в*

Рис. 1. Результаты моделирования ФБД:
— $H = 0,2$; — $H = 0,5$; — $H = 0,8$;
а — стохастическое представление; *б* — метод Холецкого;
в — метод Дэвиса-Харта

Заметим, что выполняется одно из свойств ФБД, а именно что показатель Хёрста H в реализациях ФБД соответствует степени

изрезанности графика. Следовательно, траектории ФБД при $H = 0,8$ являются более плавными, чем при $H = 0,2$.

Сгенерируем n траекторий и оценим алгоритмы с точки зрения вычисления эмпирической ковариационной функции. Воспользуемся 95% доверительным интервалом для коэффициента корреляции:

$$\rho_{\mp}\left(r^{ij}\right) = \tanh\left(\frac{\ln\left(\frac{1+r^{ij}}{1-r^{ij}}\right)}{2} - \frac{r}{2(n-1)} \mp \frac{u_{0,975}}{\sqrt{n-3}}\right),$$

где $r^{ij} = R_{B_H}(i,j) \Big/ \sqrt{R_{B_H}(i,i) \cdot R_{B_H}(j,j)}$, $i, j \in [1,n]$.

Визуализируем полученные матрицы нижней границы ρ_- и верхней границы ρ_+ 95 % доверительного интервала и матрицу выборочных коэффициентов корреляции на рис. 2, 3, 4.

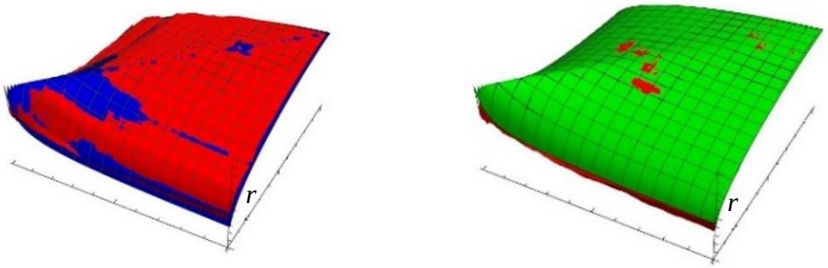


Рис. 2. Выборочный коэффициент корреляции и 95% доверительный интервал для метода моделирования с помощью стохастического представления ФБД:
■ — эмпирическая корреляция; ■ — нижняя граница;
■ — верхняя граница

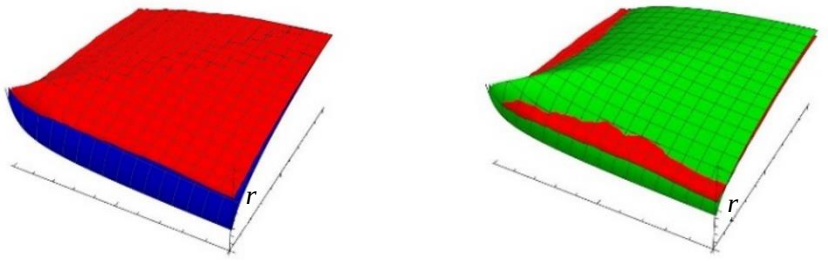


Рис. 3. Выборочный коэффициент корреляции и 95% доверительный интервал для метода моделирования с разложением Холецкого ковариационной матрицы:
■ — эмпирическая корреляция; ■ — нижняя граница;
■ — верхняя граница

Все алгоритмы показывают хорошие результаты с точки зрения качества моделирования [11]. Видно, что в некоторых участках выборочные коэффициенты корреляции не лежат внутри доверительного интервала, что можно объяснить ненулевой ошибкой доверительного оценивания. Стоит отметить, что рассмотренные

алгоритмы обладают разной алгоритмической сложностью. Сложность алгоритма стохастического представления составляет $O(N \cdot a)$, метода, использующего разложение Холецкого — $O(N^2)$, а алгоритма Дэвиса-Харта — $O(N \log N)$.

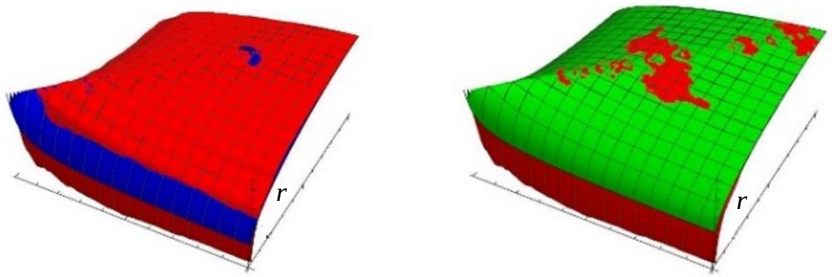


Рис. 4. Выборочный коэффициент корреляции и 95% доверительный интервал для метода моделирования Дэвиса-Харта:
■ — эмпирическая корреляция; ■ — нижняя граница;
■ — верхняя граница

Оценка показателя Хёрста. ФБД тесно связано с рядом понятий статистической физики, а именно с фрактальной размерностью, масштабной инвариантностью и показателем Хёрста.

Фрактальная размерность — характеристика, описывающая фрактальные структуры на основе количественной оценки их сложности, как коэффициент изменения детали с изменением масштаба [6][7]. Одномерное ФБД обладает фрактальной размерностью, которая вычисляется по следующей формуле [8]:

$$D = 2 - H, \tag{19}$$

Определение фрактальной размерности играет ключевую роль в моделировании ФБД, так как позволяет проверить правильность моделирования. Более того, в случаях, когда нам изначально неизвестен показатель Хёрста, например, при исследовании экономических рядов, вычисление фрактальной размерности позволяет численно определить значение параметра H. Стоит отметить, что фрактальная природа траектории непосредственно влияет на выбор метода определения фрактальной размерности. Именно поэтому для разных типов фрактальных структур может меняться точность расчетов [11]. Остановимся на двух методах оценки фрактальной размерности.

Метод Минковского. Один из способов оценивания фрактальной размерности D ограниченного фрактального множества в метрическом пространстве — вычисление размерности Минковского [9]. Суть данного метода заключается в вычислении следующего предела:

$$D = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln\left(N(\delta)\right)}{\ln(\delta)}, \tag{20}$$

где $N(\delta)$ — минимальное число геометрических объектов размера δ, которыми можно покрыть фрактальное множество.

Если предел (20) не существует, то рассматривают верхний и нижний пределы, которые соответствуют верхней и нижней размерности Минковского.

При этом фрактальная размерность связана с показателем Хёрста выражением (19), то есть получаем оценку для $\hat{H}$:

$$\hat{H} = 2 + \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln\left(N(\delta)\right)}{\ln(\delta)}. \tag{21}$$

Данный способ имеет так же другое название — «box-counting dimension», из-за реализации метода, которая заключается в подсчете количества $N(\delta)$ элементарных квадратов размера δ, покрывающих исходное множество.

Метод R/S анализа. Определение фрактальной размерности методом *R/S* анализа сводится к вычислению показателю Хёрста $\hat{H}$ с помощью статистических характеристик процесса [10].

Временной ряд y_n, $1 \le n \le l_m$ разделим на l одинаковых временных интервалов длины m. Для удобства перенумеруем ряд двойным индексом: y_i^j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, где y_i^j — $i-$ й элемент $j-$ого временного интервала.

На каждом интервале вычислим выборочные средние значения $\overline{y}^j$ и выборочные отклонения σ^j соответствующей части ряда по следующим формулам [11]:

$$\overline{y}^j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^j, \ \sigma^j = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i^j - \overline{y}^j\right)^2}. \tag{22}$$

Определим ряд из накопленных отклонений на $j-$ом интервале:

$$X_k^j = \sum_{i=1}^{k}\left(y_i^j - \overline{y}^j\right), \ k = \overline{1,m}, \tag{23}$$

и размахи накопленного отклонения на каждом интервале:

$$R^j = \max_{1 \le k \le m}\left(X_k^j\right) - \min_{1 \le k \le m}\left(X_k^j\right). \tag{24}$$

На следующем шаге вычисляется среднее значение отношений

накопленных отклонений к выборочным стандартным отклонениям соответствующих временных интервалов:

$$\overline{R/S} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\frac{R^j}{\sigma^j}. \qquad (25)$$

При последующих итерациях увеличивают длину интервала m, пока $m < n/2$, и повторяют алгоритм. По накопленным данным вычисляют оценку $\hat{H}$ углового коэффициента прямой, аппроксимирующей линейную зависимость статистики $\ln\left(\frac{R}{S}\right)$ от $\ln(m)$ с помощью метода наименьших квадратов.

Сравнение методов оценивания показателя Хёрста ФБД. Сравним методы оценивания показателя Хёрста для уже сгенерированных траекторий. Результаты оформим в виде табл. 1.

Таблица 1

Сравнение качества оценки показателя Хёрста

	H	Метод Минковского	Метод R/S анализа
Стохастическое представление	0,2	0,31	0,33
	0,5	0,54	0,55
	0,8	0,75	0,79
Метод Холецкого	0,2	0,27	0,25
	0,5	0,59	0,60
	0,8	0,78	0,78
Метод Дэвиса-Харта	0,2	0,30	0,43
	0,5	0,55	0,60
	0,8	0,78	0,81

Видно, что в большинстве случаев метод Минковского лучше справляется с поставленной задачей.

Линейное прогнозирование. Линейное прогнозирование — это метод, использующий информацию о предыдущих значениях временного ряда для прогнозирования последующих. Предполагается, что есть обучающая выборка [16], по которой мы можем изучить поведение последовательности, а затем применить полученную информацию для прогнозирования.

Рассмотрим временную последовательность x_k, $k = \overline{1,n}$ и соответствующий ей ряд приращений $y_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{1,m}$. Для аппроксимации необходимо выполнение следующих условий [12]:

1) последовательность y_k стационарна в узком смысле, т.е.

$$M\left(y_k\right)=0,\ D\left(y_k\right)=\text{const},$$
$$P\left(y_j<u, y_k<v\right)=P\left(y_{m+j}<u, y_{m+k}<v\right);$$

2) с вероятностью, равной 1, существует предел:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{R_{1m}^2}{R_{2m}}\to d=\frac{\left(M\left(|y_k|\right)\right)^2}{M\left(y_k^2\right)}, \tag{26}$$

где $R_{jm}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|y_k|^j,\ \ j\in\mathbb{Z}$.

Тогда при $m\to\infty$ последовательность

$$d_m=\frac{R_{1m}^2}{R_{2m}}\to d=\frac{\left(M\left(|\xi|\right)\right)^2}{M\left(\xi^2\right)}=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{2/\pi}\sigma\right)^2=2/\pi, \tag{27}$$

где $\xi\sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

Для определения гауссовости будем использовать значение статистики d_m. Если d_m сильно отличается от $d=2/\pi$, то необходимо аппроксимировать ряд y_k гауссовой последовательностью z_k согласно следующему алгоритму. Пусть

$$y_k=f\left(z_k\right)=\operatorname{sgn} y_k\left|z_k\right|^{\lambda}\to z_k=\operatorname{sgn} y_k\left|y_k\right|^{1/\lambda},\ \ \lambda>0. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получим:

$$d_m=\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|z_k|^{\lambda}\right)^2\Bigg/\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|z_k|^{2\lambda}. \tag{29}$$

Так как для ξ выполняется равенство $M\left(|\xi|^{\lambda}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\lambda/2}\sigma^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+1/2\right)$, то получаем

$$d=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}=\frac{R_{1m}^2}{R_{2m}}=d_m. \tag{30}$$

Из (30) находим единственное, в силу убывания функции $d\left(\lambda\right)$, значение λ. Согласно теореме о нормальной корреляции для гауссов-

ской последовательности оценка прогнозирования совпадает с линейной. Тогда с учетом определения ФБД запишем [2, 12]

$$X = K_{XY} K_Y^{-1} Y, \tag{31}$$

где $Y = \{z_1, z_2, ..., z_m\}^T$, $X = \{z_{m+1}, z_{m+2}, ..., z_{m+r}\}^T$, $K_Y^{jk} = M(y_j y_k) = R_{\Delta B_H}(j,k)$, $1 \le j,k \le m$, $K_{XY}^{jk} = M(y_{m+j} y_k) = R_{\Delta B_H}(m+j,k)$, $1 \le j \le r$, $1 \le k \le m$.

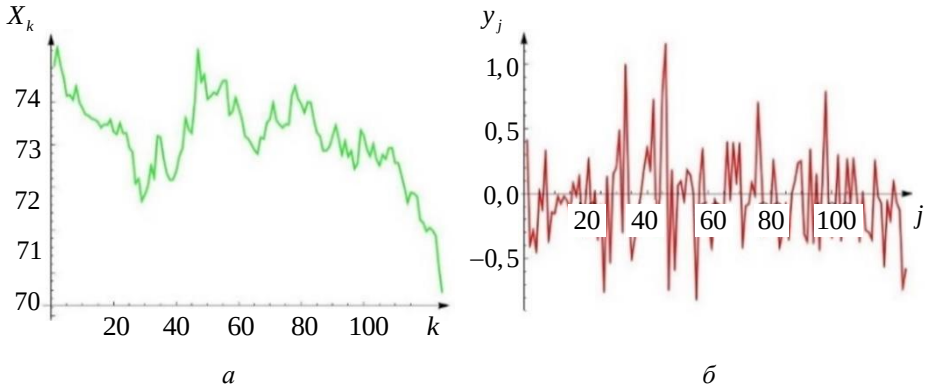
Окончательные значения прогнозируемых приращений исходного временного ряда можно найти по формуле:

$$y_{m+j} = f^{-1}(z_{m+j}),\ 1 \le j \le r. \tag{32}$$

Таким образом, алгоритм линейного прогнозирования можно применить, как к гауссовым, так и к другим реальным рядам.

Стоит отметить, что для применения этого алгоритма необходимо, чтобы приращения реального процесса были зависимыми и гауссовыми. Такой случай возможен только при значениях параметра Хёрста $H > 0,5$. Ввиду этого возникает необходимость аппроксимации временного ряда фрактальным броуновским движением и только после этого можно применять алгоритм линейного прогнозирования к преобразованным данным.

Пример численного моделирования в задаче прогнозирования. Рассмотрим временной ряд, характеризующий курс доллара США к российскому рублю по ЦБ РФ за период с 1 мая по 1 ноября 2021 года. За этот промежуток времени было сделано $k = \overline{1,125}$ замеров. Обозначим ряд курса как $X_k = X(t_k)$. Сформируем последовательность $y_j = X_{j+1} - X_j$, $j = \overline{1,m}$. Визуализируем полученные последовательности на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. График:
а — курс доллара США к российскому рублю;
б —приращения курса доллара

Согласно (27) произведем проверку на гауссовость ряда y_j. Было получено значение статистики $d_n \approx 0,59$. Перейдем к аппроксимированному ряду z_j с $\lambda = 0,93$ согласно формуле (28). Вычислим значение параметра Хёрста H, описанными выше методами (табл. 2).

Таблица 2

Параметр Хёрста H для курса доллара США к российскому рублю

Метод Минковского	**Метод R/S анализа**
0,657	0,426

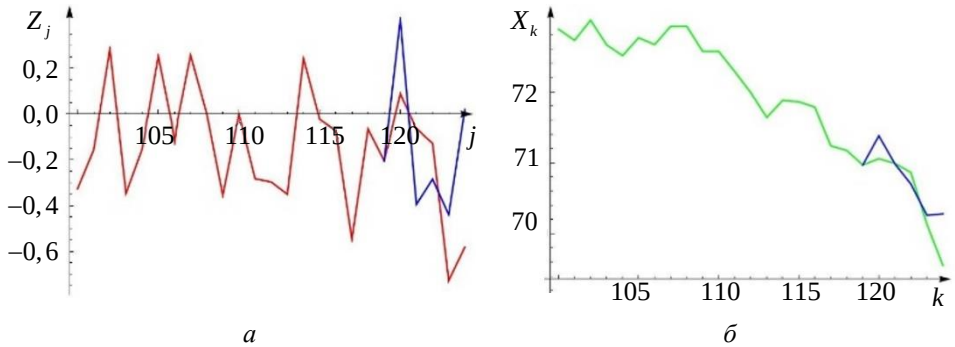
Наиболее хороший результат был получен с помощью метода Минковского. Обучающей выборкой для прогнозирования возьмем первые $m-r$ значений ряда z_j. Далее воспользуемся формулой (31) для получения прогноза на $r=5$ шагов (табл. 3).

Таблица 3

Прогноз значений курса доллара США к российскому рублю по ЦБ

r	z_{m+r}	$\hat{z}_{m+r}$	X_{N+r}	$\hat{X}_{N+r}$
1	0,08809	0,41159	71,0555	71,3789
2	–0,06510	–0,39499	70,9904	70,9840
3	–0,12809	–0,28470	70,8623	70,6993
4	–0,72780	–0,43970	70,1345	70,2595
5	–0,58190	0,01940	69,5526	70,2790

Норма ошибки прогноза составила $\left\| \frac{X_k - \hat{X}_k}{X_k} \right\| \approx 0,012$. Следовательно, можно считать полученный прогноз удовлетворительным. Визуализируем полученный прогноз на рис. 6.



а *б*

Рис. 6. Визуализация результатов алгоритма линейного прогнозирования рядов курса доллара:
— — прогноз;
а — аппроксимированный ряд; *б* —исходный ряд

Выводы. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что все рассмотренные и реализованные методы моделирования ФБД приводят к хорошим результатам. Доверительные интервалы для коэффициента корреляции сечений содержат его истинное значение с допустимой ошибкой для всех методов.

Оценка показателя Хёрста, полученная методом Минковского, в большинстве случаем оказалась лучше оценки по методу R/S анализа, что коррелирует с полученными ранее результатами для классического броуновского движения [11].

Аппроксимация временных рядов фрактальным броуновским движением с помощью степенной функции привела к удовлетворительному результату в задаче прогнозирования временных рядов. В частности, ошибка краткосрочного прогноза для валютного курса доллара США/российский рубль составила порядка 0,012.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. *Немарковские физические процессы*. Москва, Физматлит, 2018, 288 с.

[2] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели*. Москва, МЦНМО, 2016, 440 с.

[3] Ярыгина И.З., Гисин В.Б., Путко Б.А. Использование фрактальных моделей ценовой динамики активов в целях управления финансовыми рисками. *Финансы: теория и практика*, 2019, т. 23, № 6 (114), с. 117–130.

[4] Mandelbrot B.B., Hudson R.L. *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward*. London, Profile books, 2010, 352 с.

[5] Dieker A.B., Mandjes M. On spectral simulation of fractional Brownian motion, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2003, vol. 17, iss. 3, pp. 417–434.

[6] Hurst H.E. The long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, vol. 116, pp. 770–799.

[7] Hurst H.E., Black R.P., Simaika Y.M. *Long-term storage: an experimental study*. London, Constable, 1965, 145 p.

[8] Geweke J., Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 1983, vol. 4, iss. 4, pp. 221–238.

[9] Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*. Москва, Постмаркет, 2000, 352 с.

[10] Coeurjolly J.-F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, vol. 4, iss. 2, pp. 199–227.

[11] Поршнев С.В., Соломаха Э.В., Пономарева О.А. Об особенностях оценок показателя Херста классического броуновского движения, вычисляемых с помощью метода R/S-анализа. *International Journal of Open Information Technologies*, 2020, т. 8, № 10, с. 45–50.

[12] Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. Москва, Физматлит, 2005, 408 с.

[13] Бондаренко В.В. Прогноз временного ряда с помощью аппроксимации фрактальным броуновским движением. *Системные исследования и информационные технологии*, 2013, № 4, с. 80–88.

[14] Корчагин С. А., Терин Д. В., Клинаев Ю. В. Моделирование фрактального композита и исследование его электрических характеристик. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 22–31.
[15] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, iss. 4, pp. 422–437.
[16] Вьюгин В.В. *Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования*. Москва, МЦНМО, 2013, 387 с.

Статья поступила в редакцию 11.09.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Облакова Т.В., Алексеев Д.С. Сравнительный анализ методов моделирования и прогнозирования временных рядов на основе теории фрактального броуновского движения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 4, с. 48–62.

Облакова Татьяна Васильевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: obltvu@bmstu.ru

Алексеев Даниил Сергеевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dreamofskill@gmail.com

Comparative analysis of modeling methods and time series forecasting based on the theory of fractal Brownian motion

© T.V. Oblakova, D.S. Alekseev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The work summarizes the results obtained in the course of the implementation of Bachelor's final qualifying work and is devoted to the methods of simulating and applying the fractional Brownian motion in the problems of time series analysis. Software modules have been implemented to generate trajectories of fractal Brownian motion using the methods of stochastic representation, Cholesky decomposition and Davis-Hart. Algorithms vere compared in terms of their complexity and the quality of the resulting trajectories. The Hurst exponent was estimated by the Minkowski and R/S analysis methods. An approximation of time series by fractal Brownian motion using a power function is proposed and implemented for the subsequent application of a linear prediction algorithm based on the normal correlation theorem. It has been established that with the help of the presented approximation it is possible to achieve a satisfactory forecast of the exchange rate for several values ahead.

Keywords: *fractional Brownian motion, Hurst exponent, stochastic representation, Cholesky decomposition, Davies and Harte method, Minkowski method, R/S analysis, linear time series forecasting*

REFERENCES

[1] Morozov A.N., Skripkin A.V. *Nemarkovskie fizicheskie processy* [Non-Markov physical processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018, 288 p.

[2] Shiryaev A.N. *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki. Tom 1. Fakty. Modeli* [Fundamentals of stochastic financial mathematics. Volume 1. Facts. Models]. Moscow, MCCME Publ., 2016, 440 p.
[3] Yarygina I.Z., Gisin V.B., Putko B.A. Fractal asset pricing modelsfor financial risk management. *Finance: Theory and Practice*, 2019, vol. 23, no. 6 (114), pp. 117–130.
[4] Mandelbrot B.B., Hudson R.L. *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward*. London, Profile books, 2010, 352 c.
[5] Dieker A.B., Mandjes M. On spectral simulation of fractional Brownian motion, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2003, vol. 17, iss. 3, pp. 417–434.
[6] Hurst H.E. The long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, vol. 116, pp. 770–799.
[7] Hurst H.E., Black R.P., Simaika Y.M. *Long-term storage: an experimental study*. London, Constable, 1965, 145 p.
[8] Geweke J., Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 1983, vol. 4, iss. 4, pp. 221–238.
[9] Kronover R.M. *Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii* [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of theory]. Moscow, Postmarket Publ., 2000, 352 c.
[10] Coeurjolly J.-F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, vol. 4, iss. 2, pp. 199–227.
[11] Porshnev S.V., Solomaha E.V., Ponomareva O.A. Peculiarities of estimating the Hurst exponent of classical Brownian motion, using the R/S analysis. *International Journal of Open Information Technologies*, 2020, vol. 8, no. 10, pp. 45–50.
[12] Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchajnyh processov* [Theory of random processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 408 p.
[13] Bondarenko V.V. The forecast of the time series by approximating the fractal Brownian motion. *System research and information technologies*, 2013, no. 4, pp. 80–88.
[14] Korchagin S.A., Terin D.V. Klinaev Y.V. Simulating a fractal composite and studying its electrical characteristics. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 22–31.
[15] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, iss. 4, pp. 422–437.
[16] Vyugin V.V. *Matematicheskie osnovy teorii mashinnogo obucheniya i prognozirovaniya* [Mathematical foundations of the theory of machine learning and forecasting]. Moscow, MCCME Publ., 2013, 387 p.

Oblakova T.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: obltvu@bmstu.ru

Alekseev D.S., Student of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dreamofskill@gmail.com