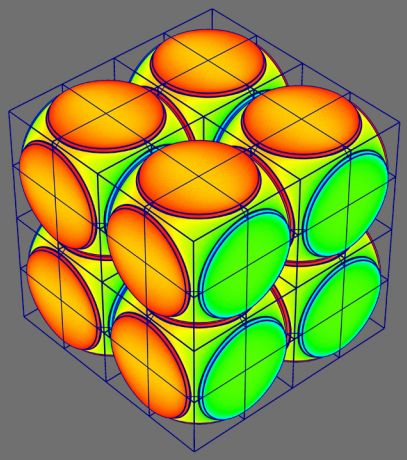
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е., Белькова К.В., Борин Д.М. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 3, с. 3–30

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/291/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 17:41:37

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-4-330

Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина, К.В. Белькова, Д.М. Борин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработанная авторами ранее в первой части данного исследования общая асимптотическая теория тонких многослойных оболочек применяется для цилиндрических анизотропных термоупругих оболочек. Показано, что для цилиндрических оболочек общая теория существенно упрощается: получены общие двумерные осредненные уравнения термоупругости многослойных оболочек. Эти уравнения подобны классическим уравнениям цилиндрических оболочек в теории Кирхгофа–Лява, однако они получены совершенно иным способом: на основе только асимптотического анализа общих трехмерных уравнений теории термоупругости. Никакие гипотезы относительно распределения перемещений или напряжений по толщине не используются в данной теории, что делает ее логически непротиворечивой. Кроме того, разработанная теория позволяет получить явные аналитические выражения для всех 6 компонент тензора напряжений в цилиндрических анизотропных оболочках. Получены явные выражения для всех тензорных констант, входящих в эти формулы для напряжений. Приведен пример расчета термонапряжений в цилиндрической композитной оболочке при осесимметричном изгибе, обусловленном совместным действием внешнего давления и одностороннего нестационарного нагрева. Рассмотрен пример слоисто-волокнистой четырехслойной оболочки, с различными углами спиральной намотки армирующих волокон. Показано, что разработанная позволяет детально исследовать такие сложные эффекты, как образование значительных поперечных термонапряжений при нагреве, которые значительно превышают уровень напряжений межслойного сдвига, традиционно считающихся наиболее опасными для слоистых композитов.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, термоупругость, многослойные цилиндрические оболочки, композиты, тензор напряжений, оболочки типа Кирхгофа — Лява*

Введение. Тонкостенные оболочки из композиционных материалов широко применяются в современной технике. Несмотря на появление в последнее время мощных вычислительных средств, позволяющих решать задачи теории упругости и термоупругости в общей трехмерной постановке для конструкций сложной формы, интерес к решению задач в двумерной постановке для оболочек не пропадает. В настоящее время существует большое число различных теорий оболочек [1–23] и др., в которых используются некоторая система допущений относительно характера распределения переме-

щений и деформаций или напряжений по толщине оболочки. Наибольшие сложности при расчете композитных оболочек возникают с определением компонент тензора напряжений, особенно напряжений межслойных сдвигов и поперечных нормальных напряжений. Для некоторых классов прикладных задач, таких как расчет термонапряжений в композитных оболочках при неравномерном по толщине нестационарном нагреве [15], расчет теплозащитных элементов конструкций [15], расчет диссипации энергии конструкций и других задач, необходим детальный анализ всех 6 полей напряжений. По видимому наиболее перспективным на сегодняшний день для построения логически непротиворечивой теории пластин и оболочек, сохраняющим все преимущества классических теорий Кирхгофа–Лява и Тимошенко, и позволяющим достаточно точно вычислять все 6 компонент тензора напряжений, являются асимптотические теории пластин и оболочек [2, 8, 24–33], в которых используются асимптотические разложения исходных трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру, представляющему отношение толщины оболочки к ее характерному размеру в плане. В работах [36–41] разработана асимптотическая теория многослойных, в том числе композитных пластин и оболочек, в который без каких-либо гипотез относительно распределения перемещений или напряжений по толщине получены явные математически обоснованное выражения для всех шести компонент тензора напряжений. В работе [36] эта теория обобщена на случай тонкостенных оболочек в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Целью настоящей статьи является применение этой общей теории для важного частного случая цилиндрических термоупругих оболочек и решение частной задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической оболочки при одновременном воздействии одностороннего нестационарного нагрева.

Геометрические допущения для цилиндрических оболочек. Рассмотрим случай цилиндрических оболочек, когда срединная поверхность Σ_0 оболочки является цилиндром радиуса R и длиной L_0, обозначим h — толщину оболочки. Введем цилиндрическую систему координат z, s, r с началом координат O — одном из торцов оболочки, где $s = \varphi R$ — длина дуги окружной координаты, а φ — угол, z — радиальная координата.

Введем безразмерные цилиндрические координаты X^i, выбирая в качестве характерного размера L — радиус R (рис. 1):

$$X^1 = z / R, \;\; X^2 = \varphi, \;\; X^3 = (r / R - 1). \qquad (1)$$

Введем малый параметр $æ = h / L_0 << 1$ и локальную координату ξ по толщине оболочки по формуле:

$$\xi = \frac{X^3}{æ} = \frac{r-R}{Ræ} = \frac{(r-R)}{h}. \tag{2}$$

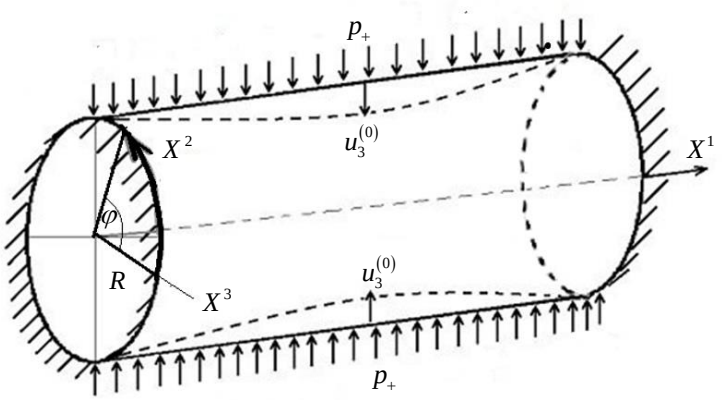


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Внутренняя и внешняя поверхности оболочки $\Sigma_{3\pm}$ имеют координаты $\xi = \pm 0,5$.

Для тонкой оболочки в цилиндрических координатах безразмерные параметры Ламе H_α, параметры A_α первой квадратичной формы срединной поверхности [14, 42] и их производные $H_{\alpha/3} = \dfrac{\partial H_\alpha}{\partial \xi}$ и $H_{\alpha,\beta}$ имеют следующий вид [14]:

$$\begin{gathered} H_1 = H_2 = H_3 = 1, \\ A_\alpha = 1,\ O_\alpha = 1/A_\alpha = 1, \\ \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial X^\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} = 0, \\ H_{\alpha/3} = æ A_{\alpha 3},\ \ A_{13} = 0,\ A_{23} = 1, \\ k_\alpha = 0,\ \ \alpha, \beta \in \{1,2\}, \end{gathered} \tag{3}$$

здесь k_α — безразмерные главные кривизны срединной поверхности, а $A_{\alpha,\beta}$ — обозначение частных производных по X^β, $\beta \in \{1,2\}$.

Осредненная система уравнений теории термоупругости цилиндрических оболочек. С учетом (3) общие кинематические соотношения [36] для тангенциальных деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ [36] срединной поверхности цилиндрических оболочек принимают вид:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)},\ \varepsilon_{22}^{(0)} = u_{2,2}^{(0)} + u_3^{(0)},\ 2\varepsilon_{12}^{(0)} = u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}, \tag{4}$$

а общие соотношения для искривлений η_{IJ} срединной поверхности цилиндрических оболочек принимают такой вид [37]

$$\eta_{11} = -u^{(0)}_{3,11},\ \eta_{22} = -u^{(0)}_{3,22} + u^{(0)}_{2,2},\ \eta_{12} = -u^{(0)}_{3,12} + \frac{1}{2}u^{(0)}_{2,1}. \qquad (5)$$

Здесь обозначены $u^{(0)}_i$ — компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки в нулевом приближении по параметру $æ$ [36].

Осредненная система уравнений равновесия [36] для случая цилиндрических оболочек, с учетом (3) имеет следующий вид

$$\begin{cases} T_{11,1} + T_{12,2} + F_1 = 0, \\ T_{22,2} + T_{12,1} + Q_2 + F_2 = 0, \\ M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 + m_1 = 0, \\ M_{22,2} + M_{12,1} - Q_2 + m_2 = 0, \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - T_{22} + F_3 - \Delta\overline{p} = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь T_{IJ}, M_{IJ}, Q_I — усилия, моменты и перерезывающие силы в оболочке, F_i, m_I — компоненты заданных векторов массовых сил и моментов, $I,J,K,L \in \{1,2\}$, $\{i,j,k,l\} \in \{1,2,3\}$, $\Delta\overline{p} = æ^2\Delta p$, $\Delta p = p_+ - p_-$, а $p_\pm$ — заданные давления на внешних поверхностях $\Sigma_{3\pm}$.

Определяющие соотношения ((128) из [36]), связывающие усилия, моменты и перерезывающие силы с деформациями и искривлениями срединной поверхности $\varepsilon^{(0)}_{KL}$, η_{KL}, для цилиндрической оболочки имеют вид

$$T_{IJ} = \overline{C}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + B_{IJKL}\eta_{KL} - T^T_{IJ}, \qquad (7)$$

$$M_{IJ} = \overline{B}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + D_{IJKL}\eta_{KL} - M^T_{IJ}, \qquad (8)$$

где обозначены $\overline{C}_{IJKL}$ — мембранные жесткости оболочки, B_{IJKL}, $\overline{B}_{IJKL}$ — смешанные жесткости, D_{IJKL} — изгибные жесткости, T^T_{IJ}, M^T_{IJ} — тепловые усилия и моменты, которые определяются по формулам (131) из [36]

$$\begin{gathered} \overline{C}_{IJKL} = < C^{(0)}_{IJKL} >,\ B_{IJKL} = æ < \xi C^{(0)}_{IJKL} >, \\ \overline{B}_{IJKL} = æ < \xi C^{(0)}_{IJKL} >,\ D_{IJKL} = æ^2 < \xi^2 C^{(0)}_{IJKL} >, \\ T^T_{IJ} = < \sigma^T_{IJ} >,\ M^T_{IJ} = æ < \xi \sigma^T_{IJ} >. \end{gathered} \qquad (9)$$

Здесь также обозначены компоненты $C^{(0)}_{IJkl}$ — приведенного тензора модулей упругости слоев оболочки

$$C^{(0)}_{IJkl} = C_{IJkl} - C_{IJ33}Z_{3kl},\ Z_{3kl} = C^{-1}_{3333}C_{33kl}, \tag{10}$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости слоев оболочки, зависящие от ξ.

В выражениях (9) и (10) и далее применяются обозначения для следующих интегральных операторов [36, 39]:

$$\begin{gathered} < f >= \int\limits_{-0,5}^{0,5} f(\xi)d\xi, \\ < f >_{\xi} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi})d\tilde{\xi} - < \int\limits_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi})d\tilde{\xi} >, \\ \{f\}_{\xi} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (f(\tilde{\xi}) - < f >)d\tilde{\xi}. \end{gathered} \tag{11}$$

Тангенциальные компоненты тензора тепловых напряжений в (10), с точностью до главных членов относительно параметра $æ$, вычисляются по формулам

$$\sigma^{T}_{IJ} = C^{(0)}_{IJkl}\varepsilon^{T(0)}_{kl},\ \varepsilon^{T(0)}_{ij} = \alpha_{ij}(\theta^{(0)} - \theta_0), \tag{12}$$

где $\varepsilon^{T(0)}_{ij}$ — компоненты тензора тепловых деформаций, α_{ij} — компоненты тензора теплового расширения слоев, $\theta^{(0)}$ — значение безразмерной температуры в нулевом приближении.

Система осредненных уравнений (4)–(6), (7), (8) для цилиндрических композитных многослойных оболочек состоит из пяти уравнений относительно пяти неизвестных функций $u^{(0)}_1$, $u^{(0)}_2$, $u^{(0)}_3$ и Q_1, Q_2.

Для определения температуры $\theta^{(0)}$ необходимо решить задачу теплопроводности в нулевом приближении ((133) из [36]), записанная в безразмерном виде)

$$\begin{gathered} \frac{\rho c_v}{\mathrm{Fo}_0}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial t} = (\lambda_{33}\theta^{(0)}_{/3})_{/3}, \\ \Sigma_{3\pm}:\ \lambda_{33}\theta^{(0)}_{/3} = \pm q_{e\pm},\ q_{e\pm} = \alpha^{T}_{\pm}(\theta_{e\pm} - \theta^{(0)}), \\ t = 0:\ \theta = 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь обозначены: $\alpha^{T}_{\pm}$ — коэффициенты теплообмена на внешней и внутренней поверхностях оболочки, $\theta_{e\pm}$ — температура внешней среды на внешней и внутренней поверхностях оболочки, λ_{33} — коэффициенты поперечной теплопроводности слоев, ρ — плотности, c_v — удельные теплоемкости слоев, Fo_0 — критерий Фурье.

Соотношения для компонент тензора напряжений в цилиндрических оболочках. После решения двумерной системы уравнений (5)–(9) все шесть напряжений в слоях оболочки вычисляются по явным аналитическим формулам ((112), (115), (118) из [36])

$$\sigma_{IJ} = \hat{C}^{(1)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{C}^{(0)}_{IJKL}\xi\eta_{KL} - \sigma^{T}_{IJ}, \tag{14}$$

$$-\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{N}_{\alpha 3KL}\eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J} + \sigma^{T}_{\alpha 3}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = -æ^3\left(\Delta p\left(\xi+0{,}5\right)+p_{-}\right) + \hat{C}^{(3)}_{33KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(3)}_{33KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \\ + \hat{E}^{(3)}_{33KLJM}\varepsilon^{(0)}_{KL,JM} + \hat{N}^{(3)}_{33KL}\eta_{KL} + \\ + \hat{V}^{(3)}_{33KLM}\eta_{KL,M} + \hat{U}^{(3)}_{33KLMN}\eta_{KL,MN} + \hat{W}^{(3)}_{KL}\eta^{(2)}_{KL} - \sigma^{T}_{33}.\end{aligned} \tag{16}$$

Выражения для тензоров, участвующих в формулах (14)–(16), представлены формулами (114) из [36]

$$\sigma^{T}_{\alpha 3} = æ\sigma^{T(1)}_{\alpha 3},\ \sigma^{T}_{33} = æ\sigma^{T(1)}_{33}, \tag{17}$$

$$\hat{C}^{(1)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJKL},\ \hat{C}^{(0)}_{IJKL} = æC^{(0)}_{IJKL}, \tag{18}$$

$$\hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL} = æC^{(1)}_{\alpha 3KL},\ \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ} = æR^{(1)}_{\alpha KLJ}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\hat{N}_{\alpha 3KL} = æ^2 N_{\alpha 3KL},\ \hat{V}_{\alpha 3KLJ} = æ^2 V_{\alpha 3KLJ},\\ &\hat{C}^{(3)}_{33KL} = æC^{(1)}_{33KL} + æ^2 C^{(2)}_{33KL} + æ^3 C^{(3)}_{33KL},\\ &\hat{R}^{(3)}_{33KLJ} = æ^2 R^{(2)}_{33KLJ} + æ^3 R^{(3)}_{33KLJ},\ \hat{E}^{(3)}_{33KLJM} = æ^2 E^{(2)}_{33KLJM} + æ^3 E^{(3)}_{33KLJM},\\ &\hat{N}^{(3)}_{33KL} = æ^2 N^{(2)}_{33KL} + æ^3 N^{(3)}_{33KL},\ \hat{V}^{(3)}_{33KLM} = æ^3 V^{(3)}_{33KLM},\\ &\hat{U}^{(3)}_{33KLMN} = æ^3 U^{(3)}_{33KLMN},\ \hat{W}^{(3)}_{KL} = æ^3 W^{(3)}_{KL}.\end{aligned} \tag{20}$$

Тепловые напряжения первого приближения (17) ((85) из [36]), которые для цилиндрических оболочек принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma^{T(1)}_{\alpha 3} = -\left\{C^{(0)}_{\alpha\alpha kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\right\}_{\xi,\alpha} - \left\{C^{(0)}_{\alpha\beta kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\right\}_{\xi,\beta},\\ \sigma^{T(1)}_{33} = \left\{C^{(0)}_{22kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\right\}_{\xi}.\end{aligned} \tag{21}$$

Для тензоров первого приближения $C^{(1)}_{\alpha 3KL}$, $C^{(1)}_{33KL}$, $R^{(1)}_{\alpha KLJ}$, $C^{(1)}_{IJKL}$, $N_{\alpha 3KL}$, $V_{\alpha 3KLJ}$, входящих в (18), имеют место выражения (83), (90) из [36], для цилиндрических оболочек эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned}&C^{(1)}_{\alpha 3KL} = 0,\ C^{(1)}_{33KL} = \left\{C^{(0)}_{22KL}\right\}_{\xi},\ C^{(1)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJMN}\Phi_{MNKL} + Z_{3IJ}\left\{C^{(0)}_{22KL}\right\}_{\xi},\\ &R^{(1)}_{\alpha KLJ} = \left\{C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}\right\}_{\xi}\delta_{\alpha J} + \left\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\right\}_{\xi}\delta_{\beta J},\ N_{\alpha 3KL} = 0,\\ &V_{\alpha 3KLJ} = \left\{C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}\xi\right\}_{\xi}\delta_{\alpha J} + \left\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\xi\right\}_{\xi}\delta_{\beta J},\end{aligned} \tag{22}$$

где компоненты тензора Φ_{MNKL} имеют следующий вид:

$$\Phi_{11KL}=0,\ \Phi_{22KL}=-<Z_{3KL}>_{\xi},\ \Phi_{12KL}=0. \tag{23}$$

Для тензоров второго приближения, входящих в формулы (20), имеют место выражения (96) из [36], для цилиндрических оболочек эти выражения принимают вид

$$\begin{gathered}
C^{(2)}_{33KL}=\left\{C^{(1)}_{22KL}\right\}_{\xi},\ C^{(2)}_{\alpha 3KL}=0,\ C^{(2)}_{IJKL}=C^{(0)}_{IJ22}\Phi^{(2)}_{22KL}-Z_{3IJ}C^{(2)}_{33KL},\\
R^{(2)}_{33KLJ}=\left\{C^{(1)}_{13KL}\right\}_{\xi}\delta_{1J}+\left\{C^{(1)}_{23KL}\right\}_{\xi}\delta_{2J}=0,\\
R^{(2)}_{13KLJ}=\left\{C^{(1)}_{11KL}\right\}_{\xi}\delta_{1J}+\left\{C^{(1)}_{12KL}\right\}_{\xi}\delta_{2J},\\
R^{(2)}_{23KLJ}=\left\{C^{(1)}_{22KL}\right\}_{\xi}\delta_{2J}+\left\{C^{(1)}_{12KL}\right\}_{\xi}\delta_{1J}-\left\{R^{(1)}_{2KLJ}\right\}_{\xi},\ R^{(2)}_{IJKLM}=0,\\
E^{(2)}_{33KLJM}=\left\{R^{(1)}_{1KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+\left\{R^{(1)}_{2KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{2M},\\
E_{IJKLMN}=C^{(0)}_{IJSP}K^{(2)}_{SPKLMN}-Z_{3IJ}E^{(2)}_{33KLMN},\\
N^{(2)}_{33KL}=\left\{C^{(0)}_{22KL}\xi\right\}_{\xi},\ N_{IJKL}=C^{(0)}_{IJSP}L^{(2)}_{SPKL}-Z_{3IJ}N^{(2)}_{33KL},
\end{gathered} \tag{24}$$

где, согласно [37]

$$\begin{gathered}
C^{(3)}_{33KL}=-\left\{C^{(2)}_{22KL}\right\}_{\xi},\\
R^{(3)}_{33KLJ}=\left\{C^{(2)}_{13KL}\right\}_{\xi}\delta_{1J}+\left\{C^{(2)}_{23KL}\right\}_{\xi}\delta_{2J}-\left\{R^{(2)}_{22KLJ}\right\}_{\xi}=0,\\
E^{(3)}_{33KLJM}=\left\{R^{(2)}_{13KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+\left\{R^{(2)}_{23KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{2M}-\left\{E_{22KLJM}\right\}_{\xi},\\
N^{(3)}_{33KL}=-\left\{N_{22KL}\right\}_{\xi},\\
V^{(3)}_{33KLM}=\left\{N_{13KL}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+\left\{N_{23KL}\right\}_{\xi}\delta_{2M}=0,\\
U^{(3)}_{33KLMN}=\left\{V_{13KLM}\right\}_{\xi}\delta_{1N}+\left\{V_{23KLM}\right\}_{\xi}\delta_{2N},\\
W^{(3)}_{KL}=\left\{C^{(0)}_{22KL}<\xi>_{\xi}\right\}_{\xi}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Для тензоров третьего приближения, входящих в формулы (19), имеют место выражения (110) из [36], для цилиндрических оболочек эти формулы принимают вид

$$\begin{gathered}
C^{(3)}_{33KL}=-\left\{C^{(2)}_{22KL}\right\}_{\xi},\\
R^{(3)}_{33KLJ}=\left\{C^{(2)}_{13KL}\right\}_{\xi}\delta_{1J}+\left\{C^{(2)}_{23KL}\right\}_{\xi}\delta_{2J}-\left\{R^{(2)}_{22KLJ}\right\}_{\xi}=0,\\
E^{(3)}_{33KLJM}=\left\{R^{(2)}_{13KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+\left\{R^{(2)}_{23KLJ}\right\}_{\xi}\delta_{2M}-\left\{E_{22KLJM}\right\}_{\xi},\\
N^{(3)}_{33KL}=-\left\{N_{22KL}\right\}_{\xi},\\
V^{(3)}_{33KLM}=\left\{N_{13KL}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+\left\{N_{23KL}\right\}_{\xi}\delta_{2M}=0,\\
U^{(3)}_{33KLMN}=\left\{V_{13KLM}\right\}_{\xi}\delta_{1N}+\left\{V_{23KLM}\right\}_{\xi}\delta_{2N},\\
W^{(3)}_{KL}=\left\{C^{(0)}_{22KL}<\xi>_{\xi}\right\}_{\xi}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Для кривизн второго приближения $\eta_{IJ}^{(2)}$, участвующих в выражении (16) имеют место формулы (100) из [36], для цилиндрических оболочек эти формулы принимают вид

$$\eta_{11}^{(2)}=0,\ \eta_{22}^{(2)}=-u_{3,22}^{(0)}+u_{2,2}^{(0)},\ \eta_{12}^{(2)}=-\frac{1}{2}(u_{3,12}^{(0)}-u_{2,1}^{(0)}). \tag{27}$$

Итоговые выражения для компонент тензора напряжений в цилиндрической оболочке. С учетом этих выражений (12), (17)–(26) компоненты тензора напряжений σ_{IJ}, $\sigma_{\alpha 3}$, σ_{33} (14)–(16) в цилиндрической оболочке могут быть представлены в следующей итоговой форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ}&=C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)}-C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}+æC_{IJKL}^{(0)}\xi\eta_{KL},\\
-\sigma_{\alpha 3}&=æ\left(R_{\alpha KLJ}^{(1)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)}-\left\{C_{\alpha\alpha kl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}\right\}_{\xi,\alpha}-\left\{C_{\alpha\beta kl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}\right\}_{\xi,\beta}\right)+\\
&\quad+æ^2V_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J},\\
\sigma_{33}&=æ\left(\left\{C_{22KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\varepsilon_{KL}^{(0)}-\left\{C_{22kl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}\right\}_{\xi}\right)+\\
&\quad+æ^2\left(E_{33KLJM}^{(2)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)}+\left\{C_{22KL}^{(0)}\xi\right\}_{\xi}\eta_{KL}\right)+\\
&\quad+æ^3\left(p_{-}+\Delta p\left(\xi+0{,}5\right)+U_{33KLMN}^{(3)}\eta_{KL,MN}+\left\{C_{22KL}^{(0)}<\xi>_{\xi}\right\}_{\xi}\eta_{KL}^{(2)}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Постановка задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного нагрева и давления. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, нагруженную равномерным давлением $\Delta\overline{p}=\text{const}$, массовые силы моменты будем полагать отсутствующими $F_i=0$, $m_I=0$. На внешней поверхности оболочки действует внешний источник тепла, не зависящий от окружной координаты X^2. Оба торца оболочки полагаются теплоизолированными и жестко закрепленными

$$X^1=0,\ X^1=\overline{L}:\ u_1^{(0)}=u_2^{(0)}=u_3^{(0)}=0,\ u_{3,1}^{(0)}=0. \tag{29}$$

Композиционный материал, из которого изготовлена оболочка, рассматриваемый как среда с эффективными свойствами, будем полагать ортотропным [42].

При таких граничных условиях в оболочке имеет место состояние осесимметричного изгиба, при котором отличны от нуля прогиб $u_3^{(0)}$ и продольное перемещение $u_1^{(0)}$, а также изгибающий момент M_{11}, окружной момент M_{22}, перерезывающая сила Q_1 и T_{11}, T_{22} — продольное и окружное усилия, которые зависят только от осевой координаты X^1

$$u_1^{(0)},\ u_3^{(0)},\ M_{11},\ M_{22},\ Q_1,\ T_{11},\ T_{22}\ //\ X^1,$$
$$u_2^{(0)}=0,\ M_{12}=0,\ T_{12}=0,\ Q_2=0. \tag{30}$$

Тогда система уравнений равновесия (6) принимает вид

$$\begin{cases} T_{11,1}=0, \\ M_{11,1}-Q_1=0, \\ Q_{1,1}-T_{22}-\Delta\bar{p}=0. \end{cases} \tag{31}$$

Подставляя (30) в (4), (5) и (27), получаем следующие выражения для деформаций и кривизн срединной поверхности

$$\varepsilon_{11}^{(0)}=u_{1,1}^{(0)},\ \ \varepsilon_{22}^{(0)}=u_3^{(0)},\ \ \varepsilon_{12}^{(0)}=0, \tag{32}$$

$$\eta_{11}=-u_{3,11}^{(0)},\ \eta_{22}=0,\ \eta_{12}=0, \tag{33}$$

$$\eta_{11}^{(2)}=0,\ \eta_{22}^{(2)}=0,\ \eta_{12}^{(2)}=0. \tag{34}$$

Тождественно ненулевые определяющие соотношения (7) (8) с учетом (30) записываются следующим образом

$$\begin{aligned} T_{11}&=\bar{C}_{1111}\varepsilon_{11}^{(0)}+\bar{C}_{1122}\varepsilon_{22}^{(0)}+B_{1111}\eta_{11}-T_{11}^T, \\ T_{22}&=\bar{C}_{1122}\varepsilon_{11}^{(0)}+\bar{C}_{2222}\varepsilon_{22}^{(0)}+B_{2211}\eta_{11}-T_{22}^T, \\ M_{11}&=\bar{B}_{1111}\varepsilon_{11}^{(0)}+\bar{B}_{1122}\varepsilon_{22}^{(0)}+D_{1111}\eta_{11}-M_{11}^T. \end{aligned} \tag{35}$$

Тепловые напряжения T_{11}^T, T_{22}^T и тепловые моменты M_{11}^T зависят от температуры $\theta^{(0)}$ согласно формулам (9) и (12)

$$T_{IJ}^T=<C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}>,\ M_{IJ}^T=æ<\xi C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}>. \tag{36}$$

Алгоритм решения задачи. Подставляя кинематические соотношения (32), (33) в уравнения равновесия (31), и исключая неизвестную функцию $u_1^{(0)}$, получаем относительно перемещения $u_3^{(0)}$ следующее уравнение

$$u_3^{(0)IV}-2k_1^2u_3^{(0)II}+k_2^2u_3^{(0)}=k_p, \tag{37}$$

где обозначены

$$\begin{aligned} k_1^2&=\frac{\tilde{B}_{1122}}{\tilde{D}_{1111}},\ k_2^2=\frac{\tilde{C}_{2222}}{\tilde{D}_{1111}}, \\ k_p&=\frac{f-\beta_2T_1^0}{\tilde{D}_{1111}}, \\ f&=-\Delta\bar{p}+\tilde{T}_{22}^T-\tilde{M}_{11,11}^T, \end{aligned} \tag{38}$$

здесь

$$\tilde{C}_{2222} = \bar{C}_{2222} - \frac{(\bar{C}_{1122})^2}{\bar{C}_{1111}},\ \tilde{B}_{1122} = B_{1122} - \beta_2 B_{1111},$$
$$\tilde{D}_{1111} = D_{1111} - \frac{(B_{1111})^2}{\bar{C}_{1111}},\ \beta_2 = \frac{\bar{C}_{1122}}{\bar{C}_{1111}}, \qquad (39)$$
$$\tilde{T}^T_{22} = T^T_{22} - \beta_2 T^T_{11},\ \tilde{M}^T_{11} = M^T_{11} - \beta_1 T^T_{11},\ \beta_1 = \frac{B_{1111}}{\bar{C}_{1111}},$$

а $T^0_1 = \text{const} = T_{11}$ — постоянное значение продольного усилия.

Если $f = \text{const}$, то общее решение уравнения (37) имеет вид

$$u^{(0)}_3 = w_0 - \beta_3 T^0_1 + \sum_{m=1}^{4} C_m \Phi_m(X^1), \qquad (40)$$

где $w_0 = f / \tilde{C}_{2222}$, $\beta_3 = \beta_2 / \tilde{C}_{2222}$, а C_m — произвольные константы. Если $k^2_1 < k^2_2$ (т.к. $\bar{B}_{1122} < \bar{C}_{2222}$, то это условие выполняется для реальных материалов), тогда функции $\Phi_m(X^1)$ имеют вид

$$\Phi_1 = e^{-rX^1}\cos\omega X^1,\ \Phi_2 = e^{-rX^1}\sin\omega X^1,$$
$$\Phi_3 = e^{rX^1}\cos\omega X^1,\ \Phi_4 = e^{rX^1}\sin\omega X^1, \qquad (41)$$

где

$$r = \frac{\sqrt{k^2_1 + k^2_2}}{2},\ \omega = \frac{\sqrt{k^2_2 - k^2_1}}{2},$$
$$\chi_1 = \frac{1}{r^2 + \omega^2} = \frac{k^2_2}{2}. \qquad (42)$$

Из (32) и (35) имеем следующее уравнение

$$\varepsilon^{(0)}_{11} = u^{(0)}_{1,1} = \frac{1}{\bar{C}_{1111}}(T^0_1 + T^T_{11} - \bar{C}_{1122} u^{(0)}_3 + B_{1111} u^{(0)}_{3,11}). \qquad (43)$$

Интегрируя уравнение (43) с учетом (40), находим продольное перемещение $u^{(0)}_1$ с точностью до шести неопределенных констант $C_0,\ C_1,...,\ C_4$ и T^0_1

$$u^{(0)}_1 = C_0 + \beta_1 \sum_{m=1}^{4} C_m \Phi_{m,1} + \frac{X^1}{\bar{C}_{1111}}(T^0_1 + T^T_{11}) -$$
$$-\beta_2 (w_0 - \beta_3 T^0_1) X^1 - \beta_2 \chi_1 (C_1(-r\Phi_1 + \omega\Phi_2) - \qquad (44)$$
$$-C_2(r\Phi_2 + \omega\Phi_1) + C_3(r\Phi_3 + \omega\Phi_4) + C_4(r\Phi_4 - \omega\Phi_3)).$$

Подставим полученные выражения (40) и (44) в уравнения для деформаций срединной поверхности и искривлений цилиндрической оболочки (32), (33)

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{T_{11}^T}{\bar{C}_{1111}} - \beta_2 w_0 + (\frac{1}{\bar{C}_{1111}} + \beta_2\beta_3)T_1^0 - \sum_{m=1}^{4} C_m(\beta_2\Phi_m - \beta_1\Phi_{m,11}),$$
$$\varepsilon_{22}^{(0)} = w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^{4} C_m\Phi_m, \quad \eta_{11} = -\sum_{m=1}^{4} C_m\Phi_{m,11}. \tag{45}$$

Подставляя формулы (45) в соотношения (35) и (3.26), получаем выражения для усилий и моментов через функции $\Phi_m(X^1)$ и их производные

$$T_{22} = w_0\tilde{C}_{2222} + \sum_{m=1}^{4} C_m(\tilde{C}_{2222}\Phi_m - \tilde{B}_{1122}\Phi_{m,11}) - \tilde{T}_{22}^T,$$
$$M_{11} = w_0\tilde{B}_{1122} + \sum_{m=1}^{4} C_m(\tilde{B}_{1122}\Phi_m - \tilde{D}_{1111}\Phi_{m,11}) - \tilde{M}_{11}^T + T_1^0(\beta_1 - \tilde{B}_{1122}\beta_3). \tag{46}$$

Подставляя выражения (40), (44) для перемещений $u_1^{(0)}$ и $u_3^{(0)}$ в граничные условия (29), получаем систему шести линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{5} \Phi_{sm}C_m = U_s, \quad s = 0,...,5, \tag{47}$$

для нахождения шести констант C_m, $m = 0,1,...,5$, где обозначены

$$\Phi_{1m} = \Phi_m(0), \quad \Phi_{2m} = \Phi_m(\bar{L}),$$
$$\Phi_{3m} = \Phi_{m,1}(0), \quad \Phi_{4m} = \Phi_{m,1}(\bar{L}), \quad m = 1,...,4,$$
$$\Phi_{01} = \beta_1\Phi_{31} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{11} - \omega\Phi_{12}),$$
$$\Phi_{02} = \beta_1\Phi_{32} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{12} + \omega\Phi_{11}),$$
$$\Phi_{03} = \beta_1\Phi_{33} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{13} + \omega\Phi_{14}),$$
$$\Phi_{04} = \beta_1\Phi_{34} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{14} - \omega\Phi_{13}),$$
$$\Phi_{51} = \beta_1\Phi_{41} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{21} - \omega\Phi_{22}),$$
$$\Phi_{52} = \beta_1\Phi_{42} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{22} + \omega\Phi_{21}),$$
$$\Phi_{53} = \beta_1\Phi_{43} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{23} + \omega\Phi_{24}),$$
$$\Phi_{54} = \beta_1\Phi_{44} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{24} - \omega\Phi_{23}),$$
$$\Phi_{55} = \frac{\bar{L}}{\bar{C}_{1111}} + \beta_2\beta_3\bar{L}, \quad \Phi_{00} = 1,$$
$$\Phi_{50} = 1, \quad \Phi_{05} = 0, \quad \Phi_{m0} = 0, \quad m = 1,...,4,$$

$$U_1 = U_2 = -w_0,\ U_0 = U_3 = U_4 = 0,$$
$$U_5 = \beta_2 w_0 \bar{L} - \frac{\bar{L}}{\bar{C}_{1111}} T_{11}^T.$$

Решая систему (47), находим все константы C_m

$$C_m = \sum_{m=0}^{5} \Phi_{ms}^{-1} U_s,\ m = 0,...,5, \tag{48}$$

где Φ_{ms}^{-1} — матрица, обратная к Φ_{sm}.

Напряжения в цилиндрической оболочке при осесимметричном изгибе и неравномерном нагреве. Получим явные выражения для тенгенциальных σ_{IJ}, касательных σ_{I3} и поперечных σ_{33} компонент тензора напряжений, используя формулы (28) и (32)–(34) для задачи об осесимметричном изгибе оболочки

$$\begin{gathered}
\sigma_{IJ} = C_{IJ11}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + C_{IJ22}^{(0)} \varepsilon_{22}^{(0)} - C_{IJkl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + æ C_{IJ11}^{(0)} \xi \eta_{11}, \\
-\sigma_{13} = æ \left(\left\{ C_{1111}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \left\{ C_{1122}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \left\{ C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi,1} \right) + \\
+ æ^2 \left\{ C_{1111}^{(0)} \xi \right\}_\xi \eta_{11,1}, \\
-\sigma_{23} = æ \left(\left\{ C_{1211}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \left\{ C_{1222}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \left\{ C_{12kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi,1} \right) + \\
+ æ^2 \left\{ C_{1211}^{(0)} \xi \right\}_\xi \eta_{11,1}, \\
\sigma_{33} = æ \left(\left\{ C_{2211}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{11}^{(0)} + \left\{ C_{2222}^{(0)} \right\}_\xi \varepsilon_{22}^{(0)} - \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi \right) + \\
+ æ^2 \left(\left\{ \left\{ C_{1111}^{(0)} \right\}_\xi \right\}_\xi \varepsilon_{11,11}^{(0)} + \left\{ \left\{ C_{1122}^{(0)} \right\}_\xi \right\}_\xi \varepsilon_{22,11}^{(0)} + \left\{ C_{2211}^{(0)} \xi \right\}_\xi \eta_{11} \right) + \\
+ æ^3 \left(p_- + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) + \left\{ \left\{ C_{1111}^{(0)} \xi \right\}_\xi \right\}_\xi \eta_{11,11} \right).
\end{gathered} \tag{49}$$

Здесь учтено, что $R_{\alpha KLJ}^{(1)}$, $V_{\alpha 3KLJ}$, $E_{33KLJM}^{(2)}$ согласно формулам (22) имеют следующий явный вид

$$\begin{gathered}
R_{1111}^{(1)} = \left\{ C_{1111}^{(0)} \right\}_\xi,\ R_{1221}^{(1)} = \left\{ C_{1122}^{(0)} \right\}_\xi,\ R_{2111}^{(1)} = \left\{ C_{1211}^{(0)} \right\}_\xi, \\
R_{2221}^{(1)} = \left\{ C_{1222}^{(0)} \right\}_\xi,\ V_{13111} = \left\{ C_{1111}^{(0)} \xi \right\}_\xi,\ V_{23111} = \left\{ C_{1211}^{(0)} \xi \right\}_\xi, \\
E_{331111}^{(2)} = \left\{ \left\{ C_{1111}^{(0)} \right\}_\xi \right\}_\xi, \\
E_{332211}^{(2)} = \left\{ \left\{ C_{1122}^{(0)} \right\}_\xi \right\}_\xi, \\
U_{331111}^{(3)} = \left\{ \left\{ C_{1111}^{(0)} \xi \right\}_\xi \right\}_\xi.
\end{gathered} \tag{50}$$

Таким образом, получены явные выражения тангенциальных σ_{IJ}, касательных σ_{I3} и поперечных σ_{33} компонент тензора напряжений.

Выражения для тепловых напряжений σ_{ij}^{T} согласно формулам (12), (17) и (21) имеют вид

$$\sigma_{IJ}^{T} = C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)},$$
$$\sigma_{\alpha 3}^{T} = \text{æ}\left\{C_{1\alpha kl}^{(0)}\varepsilon_{kl,1}^{T(0)}\right\}_{\xi} = 0,\ \sigma_{33}^{T} = \text{æ}\left\{C_{22kl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)}\right\}_{\xi}. \quad (51)$$

В силу того, что в данной задаче температурное поле не зависит от координаты X^1, касательные тепловые напряжения $\sigma_{\alpha 3}^{T}$ в слоях цилиндрической оболочки отсутствуют. Однако из-за того, что перемещения $u_3^{(0)}$ и $u_1^{(0)}$ зависят от всех тепловых напряжений в совокупности, касательные напряжения σ_{I3} в слоях оболочки все равно зависят от температуры.

Расчет характеристик композиционного материала цилиндрической оболочки. При проведении расчетов цилиндрической композитной оболочки была рассмотрена многослойная слоисто-волокнистая структура (пакет слоев), каждый слой которой представлял однонаправленно-армированный системой нитей материал (1D материал), ориентированный под некоторым углом $\phi_{(s)}$ к направлению X^1 в касательной плоскости, ортогональной к оси OX^3, совпадающей с направлением ξ. Введем собственную систему координат $X_{(s)}^{i}$ в каждом $s-$м слое, повернутую на угол $\phi_{(s)}$ к системе координат X^i в каждой точке оболочки. Обозначим компоненты тензоров модулей упругости, теплопроводности и теплового расширения 1D материала в собственной системе координат $X_{(s)}^{i}$ как $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}$, $\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}, \hat{\alpha}_{ij}^{(s)}$. Однонаправленные слои полагаем трансверсально-изотропными [42]. Для расчета компонент тензоров $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}$ в собственной системе координат используем формулу [14]: $\hat{C}_{ijkl}^{(s)} = \hat{\Pi}_{ijkl}^{(s)-1}$, где $\hat{\Pi}_{ijkl}^{(s)}$ — тензор упругих податливостей , являющийся обратным к $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}$, и выражающийся через технические упругие константы E_L — продольный модуль упругости, E_T — поперечный модуль упругости, ν_L — продольный коэффициент Пуассона, ν_T — поперечный коэффициент Пуассона, G_T — поперечный модуль сдвига, G_L — продольный модуль сдвига 1D материала [15]. Также в собственной системе координат $X_{(s)}^{i}$ компоненты тензоров $\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}$, $\hat{\alpha}_{ij}^{(s)}$ 1D материала выражаются через α_L — продольный коэффициент теплового расширения (к.т.р.),

α_T — поперечный к.т.р., λ_L — продольный коэффициент теплопроводности и λ_T — поперечный коэффициент теплопроводности 1D материала. 1D материал в каждом слое полагается состоящим из матрицы и волокон одного и того же типа, с одним и тем же коэффициентом армирования.

Значения компонент тензоров в единой для всех слоев системе координат X^i вычисляются с помощью тензорных формул преобразования компонент при повороте системы координат на угол $\phi_{(s)}$ [42]

$$C_{ijkl}(\xi) = \hat{C}^{(s)}_{mnpq} Q^{(s)}{}_{im} Q^{(s)}{}_{jn} Q^{(s)}{}_{kp} Q^{(s)}{}_{\ell q}, \quad \xi \in V_{\xi s},$$
$$\alpha_{ij}(\xi) = \hat{\alpha}^{(s)}_{mn} Q^{(s)}{}_{im} Q^{(s)}{}_{jn}, \quad \lambda_{ij}(\xi) = \hat{\lambda}^{(s)}_{mn} Q^{(s)}{}_{im} Q^{(s)}{}_{jn}, \quad \xi \in V_{\xi s},$$

а $V_{\xi s}$ — $s-$ый слой оболочки, а $Q^{(s)}{}_{im}$ — элементы матрицы поворота слоя с номером s на угол $\phi_{(s)}$, $s = 1,...,S$.

При расчетах были приняты следующие значения констант 1D материала:

$$E_L = 100 \text{ ГПа}; \; E_T = 6 \text{ ГПа}; \; \nu_L = 0{,}1; \; \nu_T = 0{,}15; \; G_L = 4 \text{ ГПа};$$
$$\alpha_L = 4 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}; \; \alpha_T = 50 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}; \; \lambda_L = 1{,}5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)};$$
$$\lambda_T = 0{,}3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Углы ориентации волокон в слоях $\phi_{(s)}$ (пакет слоев) был выбран пакет из четырех слоев с системой углов $[\phi_{(1)} / \phi_{(2)} / \phi_{(3)} / \phi_{(4)}] = [+45^0 / +30^0 / -30^0 / -45^0]$. Толщины всех слоев были выбраны одинаковыми, что обеспечивало ортотропность всего композиционного материала оболочки, как эффективной среды.

Толщина оболочки была постоянной и равной $h = 2 \cdot 10^{-2}$ м, радиус срединной поверхности оболочки $R = 0{,}2$ м, безразмерная длина оболочки $\bar{L} = 0{,}5$. Давление на внешней стороне оболочки: $\tilde{p}_+ = 10^{-4}$ ГПа, давление на внутренней стороне оболочки: $\tilde{p}_- = 0$ ГПа. На внешней оболочке был задан конвективный теплообмен с внешней средой, а внутренняя поверхность оболочки была теплоизолирована:

$$\alpha^T_+ = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}, \; \theta_{e+} = 573 \text{ К}, \; q_{e-} = 0.$$

Результаты численного моделирования. В данном разделе представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при совместном воздействии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева с

внешней стороны оболочки. Расчеты проведены для относительно короткой оболочки $\bar{L} = 0,5$.

На рис. 2 показаны распределения температуры по толщине оболочке в различные моменты времени: от 1 до 40 с. В силу условий теплоизоляции на внутренней поверхности оболочки в течение указанного промежутка времени температурное поле в оболочке выходит на равномерное по всей толщине.

Наиболее существенный вклад в НДС температурное поле вносит на начальных моментах времени, когда градиент температуры по толщине имеет максимальные значения.

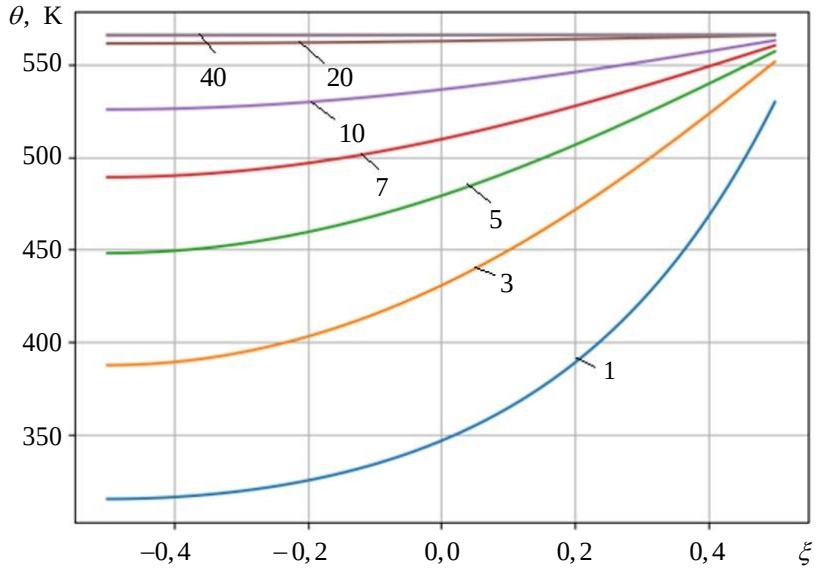


Рис. 2. Распределение температуры θ, K по толщине оболочки для различных моментов времени t

На рис. 3 приведены распределения тепловых деформаций ε_{ij}^{T} в слоях оболочки для различных моментов времени. Графики поперечной тепловой деформации ε_{33}^{T} подобны распределениям температуры, поскольку коэффициенты теплового расширения α_{33} всех слоев в поперечном направлении практически совпадают и близки к к.т.р. матрицы. Вследствие этого функции $\varepsilon_{33}^{T}(\xi)$ для всех моментов времени являются гладкими.

В тоже время к.т.р. слоев α_{IJ} в тангенциальной плоскости существенно различаются, т.к. они существенным образом зависят от угла армирования слоя. Для слоев 1 и 4 угол армирования равен $\pm 45^{\circ}$, а для слоев 3 и 4 угол армирования равен $\pm 30^{\circ}$. Вследствие этого различия к.т.р. в слоях графики функций $\varepsilon_{IJ}^{T}(\xi)$ являются кусочно-

гладкими (рис. 3*б*, 3*в* и 3*г*), причем в слоях 1 и 4 тепловые деформации почти на порядок меньше тепловых деформаций в слоях 2 и 3 во все рассматриваемые моменты времени.

При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание значений компонент тензора тепловой деформаций $\varepsilon_{IJ}^{T}(\xi)$, при этом при увеличении времени графики этих функций остаются кусочно-постоянными.

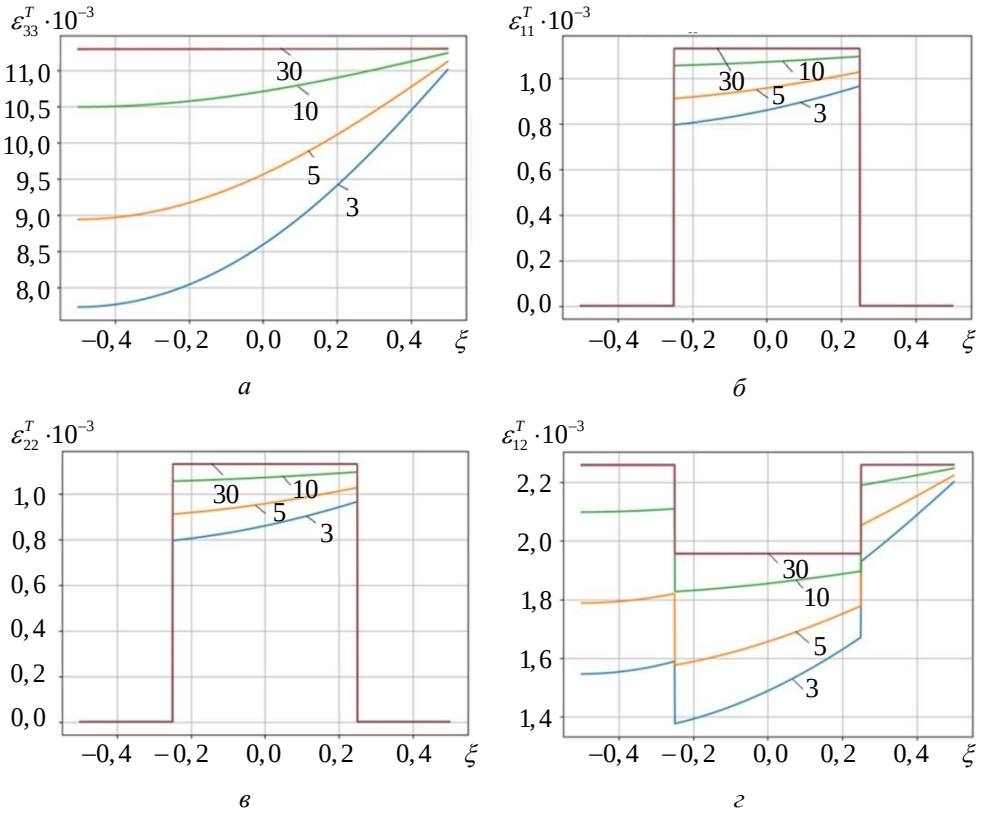


Рис. 3. Распределение тепловых деформаций по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с):
а — ε_{33}^{T}; *б* — ε_{11}^{T}; *в* — ε_{22}^{T}; *г* — ε_{12}^{T}

Графики функций тепловых напряжений $\sigma_{IJ}^{T}(\xi)$ (рис. 4) также являются кусочно-гладкими, поскольку эти напряжений полностью определяются тепловыми деформациями $\varepsilon_{ij}^{T}(\xi)$, $\varepsilon_{ij}^{T}(\xi)$, но поскольку в эти деформации вносит вклад также и поперечная компонента тепловой деформации $\varepsilon_{33}^{T}(\xi)$, то в слоях 1 и 4 тепловые напряжения оказываются сопоставимы с тепловыми напряжениями в слоях 2 и 3. Как видно из графиков, при увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание абсолютных значений напряжений $\sigma_{IJ}^{T}(\xi)$.

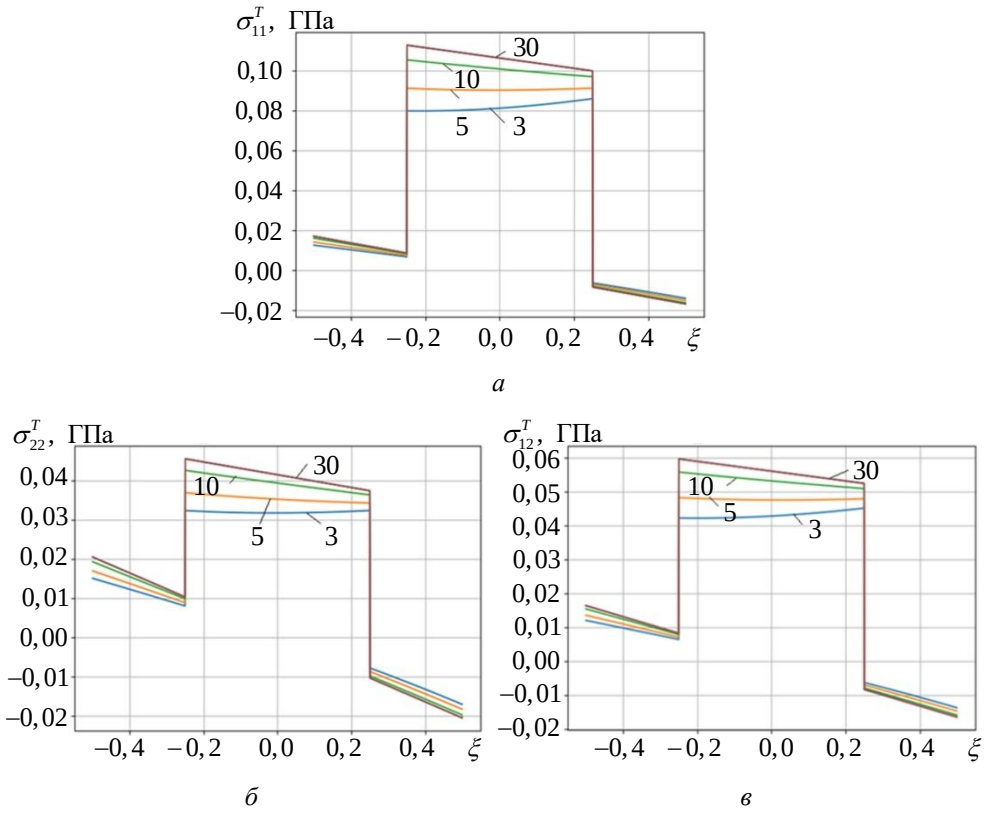


Рис. 4. Распределение тепловых напряжений σ_{22}^T, ГПа по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с):
а — $\sigma_{11}^T(\xi)$; *б* — $\sigma_{22}^T(\xi)$; *в* — $\sigma_{12}^T(\xi)$

На рис. 5…7 представлены результаты расчета осредненных параметров оболочки, также для различных моментов времени нагрева.

Графики изгибающего момента M_{11} при наличии нагрева существенным образом отличаются случая отсутствия нагрева. Локальные максимумы на торцах оболочки момент M_{11} имеют отрицательные значения, а в центре оболочки — положительное значение. По мере увеличения общего прогрева оболочки экстремальные значения функции $M_{11}(X^1)$ возрастают.

Подобным же образом наличие нагрева изменяет распределение перерезывающей силы Q_1 по длине оболочки: максимальные значения функции $Q_1(X^1)$ на торцах оболочки меняют знаки, а абсолютные значения этих максимумов функции $Q_1(X^1)$ возрастают примерно на порядок по сравнению со случаем нагружения без нагрева. С увеличением времени нагрева экстремальные значения функции $Q_1(X^1)$ возрастают (рис. 5*б*).

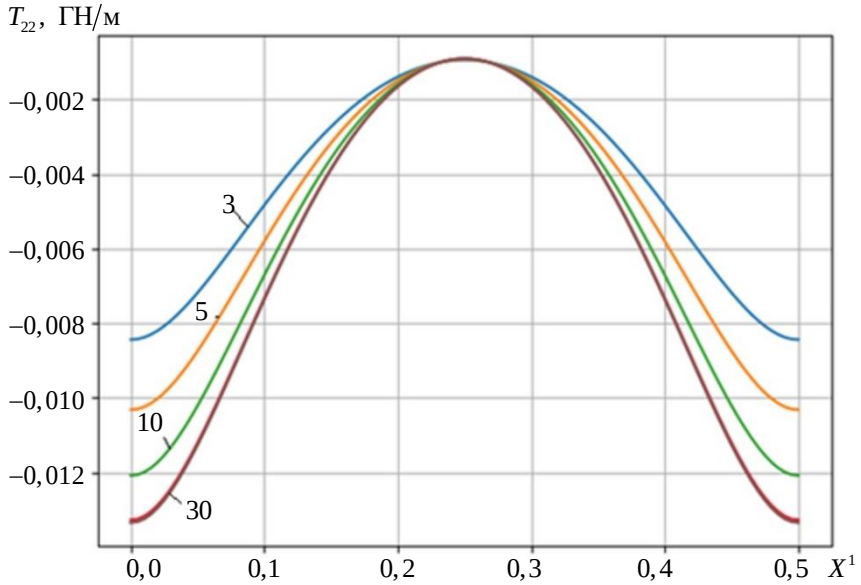
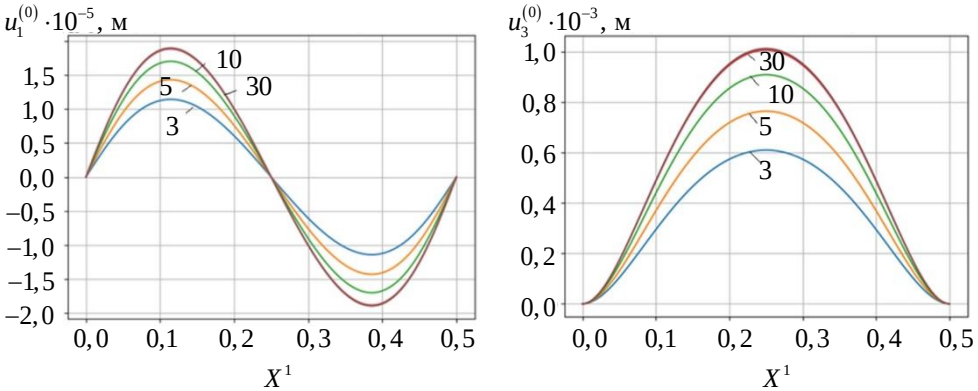


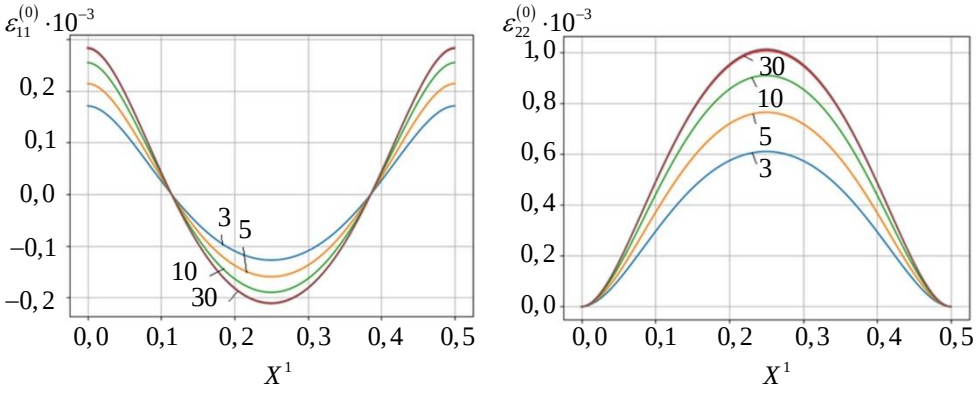
Рис. 6. Распределение окружного усилия T_{22} по длине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с)



а *б*

Рис. 7. Распределение перемещений по длине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с) нагрева:
$а$ — $u_1^{(0)}$; $б$ — $u_3^{(0)}$

Аналогичные результаты имеют место и для окружного усилия T_{22} (рис. 6), для прогиба $u_3^{(0)}$ (рис. 7*б*), для продольного перемещения $u_1^{(0)}$ (рис. 7*а*), для продольной деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ (рис. 8*а*) и окружной деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ (рис. 8*б*) при воздействии одностороннего нагрева на оболочку дополнительно к внешнему давлению. При наложении нагрева с внешней стороны оболочки прогиб $u_3^{(0)}$ меняет знак: происходит осесимметричное выпучивание оболочки в сторону действующего источника нагрева.

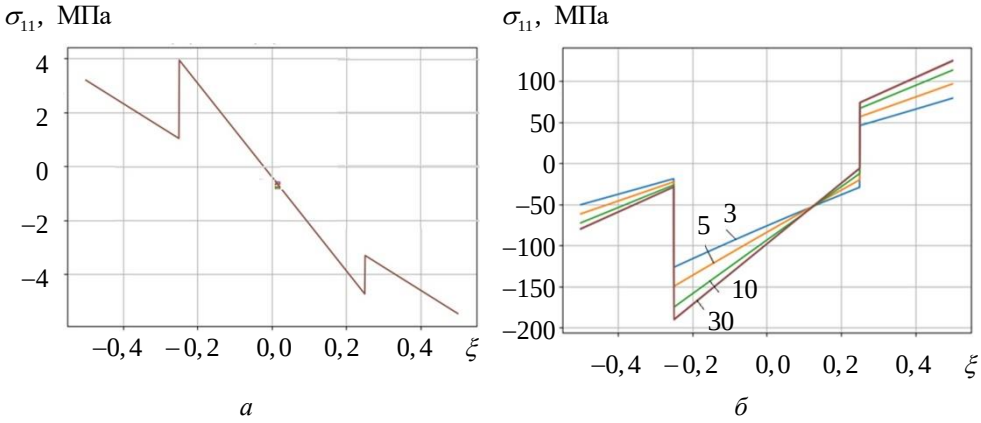


а *б*

Рис. 8. Распределение тангенциальных деформаций срединной поверхности по длине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с) нагрева:
а — $\varepsilon_{11}^{(0)}$; *б* — $\varepsilon_{22}^{(0)}$

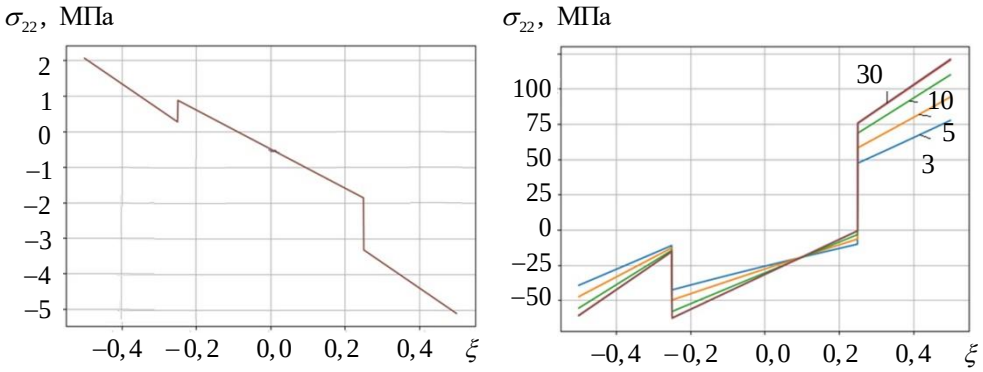
Напряжения в оболочке при наличии одностороннего нагрева показаны на рис. 9…13. Влияние нагрева приводит к существенному возрастанию общего уровня всех напряжений, прежде всего изгибных σ_{11} (рис. 9), окружных σ_{22} (рис. 10) и касательных σ_{12} (рис. 11), возрастание экстремальных значений напряжений происходит более, чем на порядок. По мере прогрева оболочки по толщине с увеличением времени t общий уровень этих напряжений возрастает.

Качественно распределение всех тангенциальных напряжений σ_{IJ} в слоях при наличии нагрева также меняется.



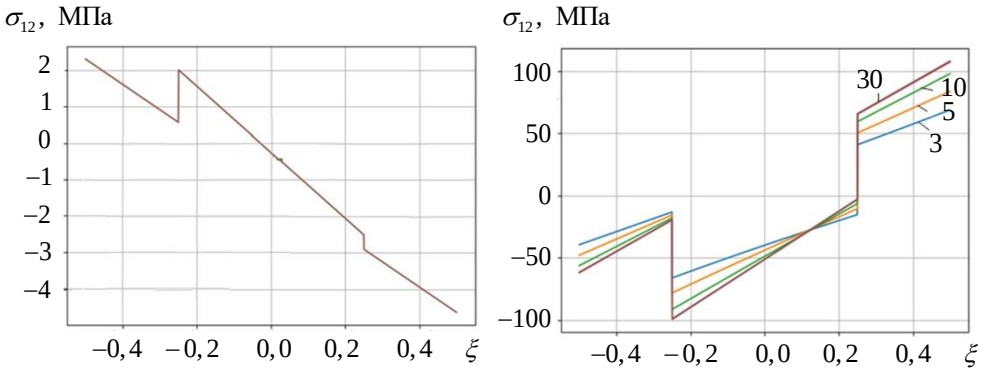
а *б*

Рис. 9. Распределение изгибных напряжений σ_{11} по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с):
а — без нагрева;
б — с добавлением нагрева



а *б*

Рис. 10. Распределение окружных напряжений σ_{22} по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с): *а* — без нагрева; *б* — с добавлением нагрева



а *б*

Рис. 11. Распределение касательных напряжений σ_{12} по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с): *а* — без нагрева; *б* — с добавлением нагрева

При отсутствии нагрева и действии только внешнего давления изгибные напряжения σ_{11} во внешних слоях 3 и 4 — отрицательные (рис. 9*а*), а во внутренних слоях 1 и 2 — положительные. Добавление одностороннего внешнего нагрева приводит к тому, что знак напряжений σ_{11} меняется: во внешнем, наиболее нагретом слое 4 оно становится положительным, а в остальных слоях 1,2 и 3 — отрицательным. С увеличением времени нагрева происходит постепенное возрастание значений напряжений σ_{11} по абсолютной величине.

Аналогичный эффект изменения знака напряжений при действии нагрева возникает и для окружных напряжений σ_{22} (рис. 10), а также для касательных напряжений σ_{12} (рис. 11).

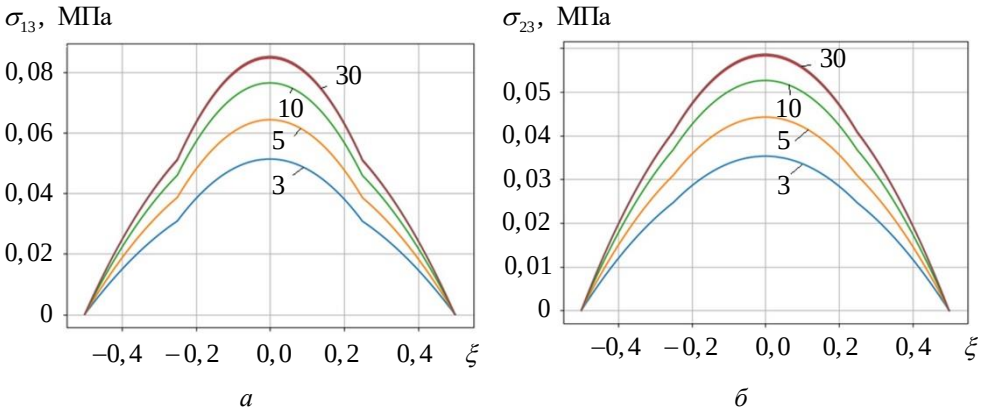


Рис. 12. Распределение напряжений межслойного сдвига по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с): *а* — σ_{13} ; *б* — σ_{23}

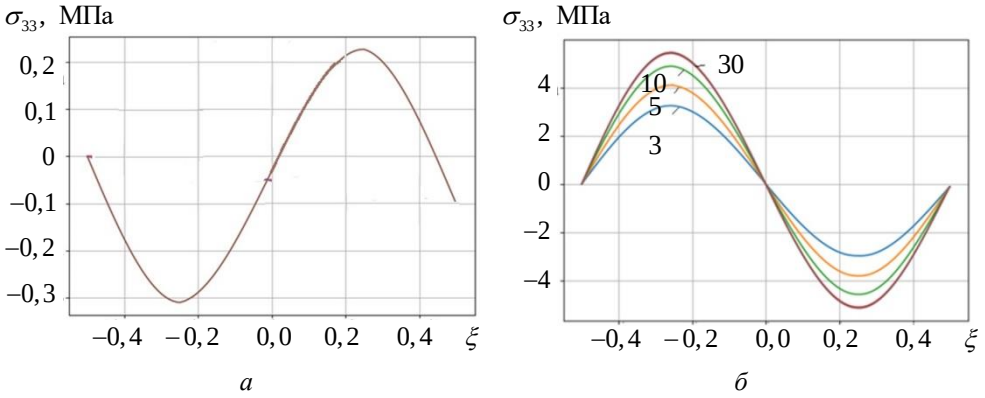


Рис. 13. Распределение поперечных напряжений σ_{33} по толщине оболочки для различных моментов времени t (цифры у кривых — время, с): *а* — без нагрева; *б* — с добавлением нагрева

Напряжения межслойного сдвига σ_{13} и σ_{23} (рис. 12) при наложении одностороннего нагрева увеличивают значения, однако не на порядок, как тангенциальные напряжений, а примерно в 2 раза. Распределение напряжений межслойного сдвига по толщине сохраняет вид, подобный параболическому, с увеличением времени нагрева максимум этих напряжений возрастает.

Поперечные напряжения σ_{33} при наложении одностороннего нагрева возрастают, так же как и тангенциальные напряжения, примерно на порядок (рис. 13*а* и 13*б*). Максимумы этих напряжений по абсолютной величине существенно превосходят значение напряжений, обусловленных только давлением сжатия $\tilde{p}_+ = 0{,}1$ МПа. Расчет этих напряжений грает важную роль для оценки возможных расслоений композитных конструкций, так как при нагреве эти

напряжения $|\sigma_{33}|$, больше по абсолютной величине напряжений межслойного сдвига $|\sigma_{\alpha 3}|$, которые обычно считаются наиболее «опасными» для слоистых композитов при воздействии только механических нагрузок.

При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание абсолютных значений поперечных напряжений $|\sigma_{33}|$.

Выводы. С использованием разработанной в части 1 статьи асимптотической общей теории тонких многослойных оболочек сформулированы осредненные двумерные уравнения термоупругости теории многослойных анизотропных цилиндрических оболочек, а также получены явные аналитические выражения для вычисления всех шести компонент напряжений, как функций от поперечной и продольных координат. При выводе этих выражений не использованы каких-либо дополнительные гипотезы о характере напряжений или перемещений по толщине.

Разработанная теория тонких цилиндрических оболочек является логически непротиворечивой: геометрические допущения, используемые при построении этой теории, не противоречат полученным результатам о характере распределения неизвестных функций и о порядке их малости.

Приведен пример расчета термонапряжений в цилиндрической композитной оболочке при совместном воздействии внешнего равномерного давления (задача об осесимметричном изгибе) и одностороннего нестационарного нагрева. Показано, что разработанная теория позволяет получать детальную картину о распределении всех напряжений по толщине оболочки, в частности показано, что при одностороннем нагреве поперечные термонапряжения являются более «опасными», чем традиционно считающиеся таковыми напряжения межслойного сдвига для слоистых композитов. Для решения этого класса задач разработанная асимптотическая теория представляет, по-видимому, наибольший практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.

[2] Агаловян Л.А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек*. Москва, Наука, Физматлит, 1997, 414 с.

[3] Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных оболочек*. Москва, Физматгиз, 1961, 384 с.

[4] Бакулин В.Н. *Методы оптимального проектирования и расчёта композиционных конструкций. Том 1*. Москва, Физматлит, 2008, 256 с.

[5] Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. Расчет пластин методом конечных элементов: учеб. пособие для вузов. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 232 с.

[6] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1977, 488 с.
[7] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1980, 375 с.
[8] Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. *Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры*. Днепропетровск, Пороги, 2008, 197 с.
[9] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 271 с.
[10] Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*, 1990, № 2, с. 158–167.
[11] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.
[12] Гольденвейзер А.Л. *Теория тонких упругих оболочек*. Москва, Наука, 1976, 512 с.
[13] Горбачёв В.И., Кабанова Л.А. О постановке задач в общей теории Кирхгофа-Лява неоднородных анизотропных пластин. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 2018, № 3, с. 43–50.
[14] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[15] Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. Москва, Физматлит, 2018, 448 с.
[16] Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. *Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов*. Москва, Машиностроение,1972, 168 с.
[17] Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М. *Композиционные материалы: справочник*. Москва, Машиностроение, 1989, 510 с.
[18] Сендецки Дж. К*омпозиционные материалы. Том 2. Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, 564 р.
[19] Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. Москва, Физматгиз, 1957, 463 с.
[20] Лурье А.И. *Статика тонкостенных упругих оболочек*. Москва, Гостехиздат, 1947, 252 с.
[21] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 635 с.
[22] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.
[23] Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Ленинград, Судпромгиз, 1962, 432 с.
[24] Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. *Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела*. Киев, Вища школа, 1982, 153 с.
[25] Назаров С.А. Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки). *Математический сборник*, 2000, т. 191, № 7, с. 129–159.
[26] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
[27] Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 49–61.
[28] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M. Microstructural optimization of functionally graded composites subjected to a thermal gradient via the coupled higher-order theory. *Composites Part B: Engineering*, 1997, vol. 28, iss. 1–2, pp. 93–108.

[29] Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. *Analysis, design and optimization of composite structures*. New York, John Wiley and Sons, 1997, 368 p.

[30] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.

[31] Kolpakov A.G. *Stressed composite structures: Homogenized models for thin-walled non-homogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Springer-Verlag, 2004, 228 p.

[32] Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, vol. 29, iss. 3, pp. 309–326.

[33] Lewinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. World Scientific, 2000, 768 p.

[34] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–99.

[35] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные метод*ы, 2018, № 3, с. 114–132.

[36] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 84–110.

[37] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

[38] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 12 (60), с. 1–25.

[39] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с. 16–40.

[40] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[41] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7 (19), с. 1–20.

[42] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление.* Москва, Высшая школа, 2001, 575 с.

Статья поступила в редакцию 11.06.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е., Белькова К.В., Борин Д.М. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 3–30.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Пичугина Анна Евгеньевна — старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com

Белькова Ксения Владимировна — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: k.belkova@icloud.com

Борин Даниил Михайлович — инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: borin.danila@yandex.ru

Modeling of thermal stresses in composite shells based on asymptotic theory. Part 2. Calculation of cylindrical shells

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, A.E. Pichugina, K.V. Bel'kova, D.M. Borin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The general asymptotic theory of thin multilayer shells developed by the authors earlier in Part 1 of this study is applied to cylindrical anisotropic thermoelastic shells. It is shown that for cylindrical shells the general theory is substantially simplified: general two-dimensional averaged thermoelasticity equations for multilayer shells are obtained. These equations are similar to the classical equations of cylindrical shells in the Kirchhoff-Love theory, but they are obtained in a completely different way: on the basis of only an asymptotic analysis of the general three-dimensional equations of the theory of thermoelasticity. No hypotheses regarding the distribution of displacements or stresses over the thickness are used in this theory, which makes it logically consistent. In addition, the developed theory makes it possible to obtain explicit analytical expressions for all 6 components of the stress tensor in cylindrical anisotropic shells. Explicit expressions are obtained for all tensor constants included in these stress formulas. An example of calculating thermal stresses in a cylindrical composite shell with axisymmetric bending due to the combined action of external pressure and one-sided non-stationary heating is given. An example of a layered-fiber 4-layer shell with different angles of helical winding of reinforcing fibers is considered. It is shown that the developed one allows one to study in detail such complex effects as the formation of significant transverse thermal stresses during heating, which significantly exceed the level of interlayer shear stresses, which are traditionally considered the most dangerous for layered composites.

***Keywords**: asymptotic theory, multilayer cylindrical shells, composites, stress tensor, Kirchhoff — Love shells*

REFERENCES

[1] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnyh plastin I obolochek iz kompozicionnyh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.

[2] Agalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnyh plastin i obolochek* [Asymptotic theory of anisotropic plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 1997, 414 p.

[3] Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnyh obolochek* [Theory of anisotropic shells]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 384 p.

[4] Bakulin V.N. *Metody optimal'nogo proektirovaniya i raschyota kompozicionnyh konstrukcij. Tom 1* [Methods of optimal design and calculation of composite structures. Volume 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 256 p.

[5] Belkin A.E., Gavryushin S.S. *Raschet plastin metodom konechnyh elementov: ucheb. posobie dlya vuzov* [Calculation of plates by the finite element method: textbook. manual for universities]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 232 p.

[6] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennyh konstrukcij* [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 488 p.

[7] Bolotin V.V., Novikov Yu.N. *Mekhanika mnogoslojnyh konstrukcij* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 375 p.

[8] Bolshakov V.I., Andrianov I.V., Danishevsky V.V. *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnyh materialov s uchetom vnutrennej struktury* [Asymptotic methods for calculating composite materials taking into account the internal structure]. Dnepropetrovsk, Porogi Publ., 2008, 197 p.

[9] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstrukcii iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 271 p.

[10] Vasiliev V.V., Lurie S.A. On the problem of constructing non-classical plate theories. *Mechanics of Solids*, 1990, no. 2, pp. 158–167.

[11] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[12] Goldenweiser A.L. *Teoriya tonkih uprugih obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 512 p.

[13] Gorbachev V.I., Kabanova L.A. Formulation of problems in the general Kirchhoff-Love theory of inhomogeneous anisotropic plates. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2018, vol. 73, no. 3, pp. 60–66.

[14] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[15] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composite structures under high temperatures*. Springer, 2016, 434 p.

[16] Elpatyevsky A.N., Vasiliev V.V. *Prochnost' cilindricheskih obolochek iz armirovannyh materialov* [Strength of cylindrical shells made of reinforced materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972, 168 p.

[17] Vasiliev V.V., Tarnopolsky Yu.M. *Compozicionnye materialy: spravochnik* [Composite materials: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 510 p.

[18] Sendeckyj G.P. *Mechanics of composite materials: composite materials. Volume 2*. New York and London, Academic Press, 1974, 520 p.

[19] Lehnitsky S.G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1957, 463 p.
[20] Lurie A.I. *Statika tonkostennyh uprugih obolochek* [Statics of thin-walled elastic shells]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1947, 252 p.
[21] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, McGrawHill Publ., 1959, 595 p.
[22] Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.
[23] Novozhilov V.V. *Teoriya tonkih obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1962, 432 p.
[24] Manevich L.I., Pavlenko A.V., Koblik S.G. *Asimptoticheskie metody v teorii uprugosti ortotropnogo tela* [Asymptotic methods in the theory of elasticity of an orthotropic body]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1982, 153 p.
[25] Nazarov S.A. Asymptotic analysis of an arbitrary anisotropic plate of variable thickness (sloping shell). *Sbornik: Mathematics*, 2000, vol. 191, iss. 7, pp. 1075–1106.
[26] Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross–sections. *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, iss. 6, pp. 57–63.
[27] Sheshenin S.V., Skoptsov K.A. Theory of plates based on the method of asymptotic decompositions. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 49–61.
[28] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M. Microstructural optimization of functionally graded composites subjected to a thermal gradient via the coupled higher-order theory. *Composites Part B: Engineering*, 1997, vol. 28, iss. 1–2, pp. 93–108.
[29] Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. *Analysis, design and optimization of composite structures*. New York, John Wiley and Sons, 1997, 368 p.
[30] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.
[31] Kolpakov A.G. *Stressed composite structures: Homogenized models for thin-walled non-homogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Springer-Verlag, 2004, 228 p.
[32] Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, vol. 29, iss. 3, pp. 309–326.
[33] Lewinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. World Scientific, 2000, 768 p.
[34] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–99.
[35] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Modeling of the stresses in thin composite cylindrical shells based on the asymptotic theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 114–132.
[36] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Thermal stress modeling in composite shells based on asymptotic theory. Part 1. General shell theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 4, pp. 84–110.
[37] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.
[38] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Explicit formulas for the calculation of the complete tensor of the stresses in the monoclinic thin

composite shells based on the asymptotic homogenization method. *Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Science and Engineering Publication*, 2016, no. 12 (60), pp. 1–25.

[39] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Timoshenko-type asymptotic theory for thin multi-layered plates shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 16–40.

[40] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. The asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2015, vol. 6. iss. 1, pp. 13–51.

[41] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Comparison analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimentional theory of elasticity. *Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Science and Engineering Publication*, 2013, no. 7 (19), pp. 1–20.

[42] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 575 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Pichugina A.E., Senior lecturer, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com

Bel'kova K.V., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: k.belkova@icloud.com

Borin D.M., engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: borin.danila@yandex.ru