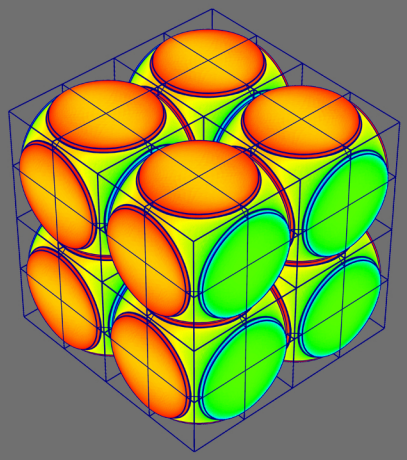
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С.
Моделирование волнового воздействия на горизонтальные элементы конструкций в верхнем слое стратифицированного течения. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №4 (4), с. 74-87

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/29/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
25.11.2026 04:15:24

УДК 532.58

Моделирование волнового воздействия на горизонтальные элементы конструкций в верхнем слое стратифицированного течения

© И.Ю. Владимиров[1], Н.Н. Корчагин[1], А.С. Савин[2]

[1] Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва,117851, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проведены модельные исследования силового воздействия на обтекаемые горизонтальные элементы инженерных сооружений в верхнем слое резко стратифицированного течения, связанного с генерацией волн на границе раздела жидких слоев. Получены интегральные представления волнового сопротивления и подъемной силы. Выполнены численные расчеты для реальной морской среды. Выявлены условия, при которых происходит значительное увеличение гидродинамических реакций на обтекаемые элементы конструкций.

Ключевые слова: *протяженное горизонтальное препятствие в потоке, стратифицированное течение, волновое сопротивление, подъемная сила.*

Введение. На обтекаемые морским течением элементы инженерных сооружений действует сила вязкого сопротивления. Кроме того, в случае обтекания подводного сооружения стратифицированным потоком возникают внутренние волны, вследствие чего появляется дополнительное волновое сопротивление. Как установлено в работе [1], такой эффект может быть весьма существенным. Условия для возникновения внутренних волн при обтекании различных препятствий создают, в частности, придонные мутьевые потоки. Плотность таких потоков может превышать плотность чистой воды на десять и более процентов, а толщина достигать десятков метров [2].

Используемые в настоящей статье подходы к расчету силовых воздействий на обтекаемое препятствие, связанных с образованием внутренних волн в стратифицированном потоке, основаны на результатах исследований [3−7], в которых были получены выражения для комплексных потенциала и скорости возмущенных стратифицированных потоков различной геометрии. Настоящая работа выполнена как продолжение исследования [1] силового воздействия морского течения на подводный трубопровод, находящийся в придонном слое (этим вопросам посвящены работы [8−15]). Далее рассматривается задача обтекания протяженных элементов инженерных конструкций при иных условиях их локализации в морской среде, а именно в верхнем слое стратифицированного потока. Полученные результаты сравниваются с результатами [1].

Постановка задачи и ее аналитическое решение. Рассмотрим двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий протяженный элемент конструкции, который с достаточной точностью можно считать цилиндром с образующей, параллельной дну. Цилиндр с круговым поперечным сечением радиусом R моделируется точечным диполем с моментом

$$m = 2\pi VR^2, \tag{1}$$

где V — скорость набегающего потока. Обозначим толщину верхнего слоя H, нижнего — H_1, а плотности слоев — соответственно ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Поставим задачу определить волновую часть гидродинамической нагрузки, испытываемой рассматриваемым элементом конструкции. Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, а ось y — вертикально вверх. Моделирующий элемент конструкции диполь находится над границей раздела двух слоев на оси y в точке $(0, h)$ (рис. 1).

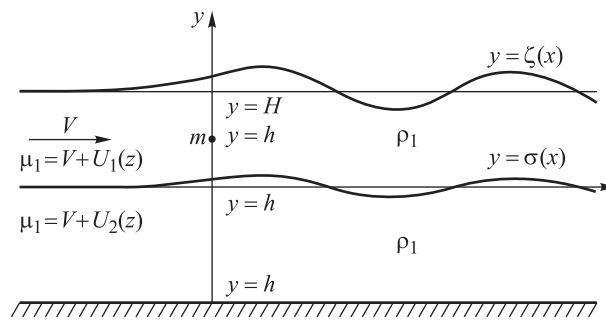


Рис. 1. Обтекание диполя, локализованного в верхнем слое

Предполагая течение потенциальным, комплексно-сопряженную скорость в каждом из слоев представим в виде $\mu_k = V + U_k$, $U_k = u_k - iv_k$, $k = \{1, 2\}$. Обозначим отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения $y = H$ через $\zeta(x)$, а величину возвышения границы раздела слоев потока как $\sigma(x)$. Поскольку вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ вектор скорости произвольной частицы жидкости коллинеарен ее касательной, то

$$\zeta'(x) = \left.\frac{v_1}{V + u_1}\right|_{y=H+\zeta(x)}.$$

Линеаризуя данное условие и перенося его со свободной поверхности на прямую $y = H$, имеем кинематическое граничное условие

$$v_1 = V\zeta'(x) \text{ при } y = H. \tag{2}$$

Аналогично получаем линеаризованное кинематическое условие вдоль поверхности раздела слоев

$$v_1 = V\sigma'(x); v_2 = V\sigma'(x) \text{ при } y = 0. \tag{3}$$

Отсюда имеем одно условие для вертикальных компонент скорости:

$$v_1 = v_2 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{4}$$

Поскольку возмущения от диполя затухают вверх по потоку, то интеграл Бернулли вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ можно записать следующим образом:

$$\frac{|\mu_1^2|}{2} + \frac{p_0(x)}{\rho_1} + g(H + \zeta(x)) = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0^{(\infty)}}{\rho_1} + gH,$$

где $p_0(x)$ — давление вдоль свободной поверхности, $p_0^{(\infty)} = \lim\limits_{x\to-\infty} p_0(x)$; g — ускорение свободного падения. Считая давление постоянным вдоль всей свободной поверхности, получаем динамическое условие на границе верхнего слоя:

$$\zeta(x) = \left.\frac{V^2 - |\mu_1|^2}{2g}\right|_{y=H+\zeta(x)},$$

которое посредством линеаризации преобразуется к виду

$$\zeta(x) = -\frac{V}{g}u_1 \text{ при } y = H. \tag{5}$$

Продифференцируем равенство (5) по x и из полученного соотношения исключим величину $\zeta'(x)$ с помощью формулы (2). В результате придем к граничному условию для компонент вектора скорости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = H, \quad \nu = \frac{g}{V^2}. \tag{6}$$

Интегралы Бернулли, записанные для линий тока на верхней и нижней сторонах поверхности раздела слоев $y = \sigma(x)$, выглядят следующим образом:

$$p_1(x) + \frac{\rho_1}{2}|\mu_1^2| + \rho_1 g\sigma(x) = p_1^{(\infty)} + \frac{\rho_1}{2}V^2 \quad \text{при} \quad y = \sigma(x);$$

$$p_2(x) + \frac{\rho_2}{2}|\mu_2^2| + \rho_2 g\sigma(x) = p_2^{(\infty)} + \frac{\rho_2}{2}V^2 \quad \text{при} \quad y = \sigma(x),$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — давления вдоль соответствующих сторон этой поверхности, $p_1^{(\infty)} = \lim\limits_{x\to-\infty} p_1(x)$, $p_2^{(\infty)} = \lim\limits_{x\to-\infty} p_2(x)$. Поскольку при переходе через поверхность разрыва касательных скоростей давление непрерывно, то $p_1(x) = p_2(x)$, $p_1^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$, и два предыдущих равенства могут быть приведены к одному условию для компонент скорости:

$$\frac{\rho_1}{2}(2Vu_1 + u_1^2 + v_1^2) + \rho_1 g\sigma(x) = \frac{\rho_2}{2}(2Vu_2 + u_2^2 + v_2^2) + \rho_2 g\sigma(x) \text{ при } y = \sigma(x).$$

Пренебрегая в последнем соотношении квадратами малых величин u_k и v_k $k = \{1, 2\}$ и перенося его на невозмущенное положение скачка плотности, получаем линеаризованное динамическое условие на границе раздела слоев:

$$\rho_1(Vu_1 + g\sigma(x)) = \rho_2(Vu_2 + g\sigma(x)) \text{ при } y = 0.$$

Продифференцируем обе его части по x и в полученное равенство подставим выражения для величины $\sigma'(x)$, следующие из формул (3). В результате приходим к граничному условию для возмущений скорости на слое скачка плотности, не содержащему неизвестной функции $\sigma(x)$:

$$\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1\right) = \rho_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu v_2\right) \text{ при } y = 0. \qquad (7)$$

Кроме того, на дне должно быть выполнено условие непротекания:

$$v_2 = 0 \text{ при } y = -H_1. \qquad (8)$$

Перепишем соотношения (6), (7), (4), (8) соответственно в терминах возмущений комплексно-сопряженной скорости:

$$\mathrm{Im}\left[i\frac{dU_1}{dz} - \nu U_1\right] = 0 \text{ при } y = H; \qquad (9)$$

$$\delta\mathrm{Im}\left[i\frac{dU_1}{dz} - \nu U_1\right] = \mathrm{Im}\left[i\frac{dU_2}{dz} - \nu U_2\right] \text{ при } y = 0; \qquad (10)$$

$$\mathrm{Im}\,U_1 = \mathrm{Im}\,U_2 \text{ при } y = 0; \qquad (11)$$

$$\mathrm{Im}\,U_2 = 0 \text{ при } y = -H_1, \qquad (12)$$

где $\delta = \rho_1 / \rho_2$; $z = x + iy$. Таким образом, исходная задача сведена к отысканию функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (9)–(12), причем $U_2(z)$ регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$, а $U_1(z)$ — в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$ всюду за

исключением точки $z = ih$, в которой она имеет полюс второго порядка (так как в этой точке расположен диполь).

В соответствии с изложенным выше будем искать комплексно-сопряженную скорость $U_2(z)$ в виде ее разложения в интеграл Фурье по волновым числам, а $U_1(z)$ — как сумму комплексно-сопряженной скорости, индуцированной диполем в безграничном потоке, и регулярной функции, представленной интегралом Фурье:

$$U_1 = \frac{m}{2\pi}\left[-\frac{1}{(z-ih)^2} + \int_0^\infty \left[A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz} \right] dk \right]; \tag{13}$$

$$U_2 = \frac{m}{2\pi}\int_0^\infty \left[C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz} \right] dk, \tag{14}$$

где функции $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$ подлежат определению. С помощью соотношения

$$-\frac{1}{(z-ih)^2} = \begin{cases} \int_0^\infty ke^{kh}e^{ikz}\,dk, \text{ если } y > h; \\ \int_0^\infty ke^{-kh}e^{-ikz}\,dk, \text{ если } y < h, \end{cases}$$

перепишем (13) для комплексно-сопряженной скорости $U_1(z)$ в областях верхнего слоя, расположенных соответственно выше и ниже диполя:

$$U_1(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi}\int_0^\infty [(ke^{kh} + A(k))e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}]dk, \text{ если } y > h; \\ \frac{m}{2\pi}\int_0^\infty [A(k)e^{ikz} + (ke^{-kh} + B(k))e^{-ikz}]dk, \text{ если } y < h. \end{cases} \tag{15}$$

Подстановка формул (14)–(15) в граничные условия (9)–(12) приводит к неоднородной системе линейных уравнений относительно функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$:

$$\begin{cases} (k+\nu)e^{-kH}A & +(k-\nu)e^{kH}B & & & = & -k(k+\nu)e^{k(h-H)}; \\ \delta(k+\nu)A & +\delta(k-\nu)B & -(k+\nu)C & -(k-\nu)D & = & -\delta k(k-\nu)e^{-kh}; \\ A & -B & -C & +D & = & ke^{-kh}; \\ & & e^{kH_1}C & -e^{-kH_1}D & = & 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k)=\frac{k\left[(\delta k+(1-\delta)\nu)\,\mathrm{th}\,kH_1-k\right]\left[\nu\,\mathrm{ch}\,k(H-h)-k\,\mathrm{sh}\,k(H-h)\right]}{\mathrm{ch}\,kH\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\,\mathrm{th}\,kH\,\mathrm{th}\,kH_1-k\nu(\mathrm{th}\,kH+\mathrm{th}\,kH_1)\right\}};$$

$$B(k)=\frac{k(k+\nu)e^{-kH}\left\{[(1-\delta)\nu\,\mathrm{ch}\,kh-\delta k\,\mathrm{sh}\,kh]\,\mathrm{th}\,kH_1-k\,\mathrm{ch}\,kh\right\}}{\mathrm{ch}\,kH\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\,\mathrm{th}\,kH\,\mathrm{th}\,kH_1-k\nu(\mathrm{th}\,kH+\mathrm{th}\,kH_1)\right\}}. \qquad (16)$$

Перепишем далее равенство (13) следующим образом:

$$U_1(z)=-\frac{m}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2}+f(z),$$

где

$$f(z)=\frac{m}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}A(k)e^{ikz}dk+\int_0^{\infty}B(k)e^{-ikz}dk\right].$$

Заметим, что для получения физически реализуемого решения (т. е. решения, которое удовлетворяет условию отсутствия возмущений далеко вверх по потоку) контур интегрирования в первом слагаемом выражения для $f(z)$ следует сместить в нижнюю полуплоскость, а во втором — в верхнюю. Таким образом, всюду в дальнейшем $f(z)$ понимается как следующий предел:

$$f(z)=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{m}{2\pi}\left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty}A(k)e^{ikz}dk+\int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty}B(k)e^{-ikz}dk\right]. \qquad (17)$$

Для вычисления равнодействующей R гидродинамических сил, приложенных к диполю (трубопроводу), воспользуемся формулой С.А. Чаплыгина, согласно которой

$$R^*=X-iY=\frac{i\rho_1}{2}\int_K\mu_1^2(z)dz. \qquad (17а)$$

Здесь X — волновое сопротивление; Y — подъемная сила, а интегрирование осуществляется по произвольному контуру K, расположенному в верхнем слое и охватывающему рассматриваемый диполь. Поскольку

$$\mu_1(z)=V+U_1(z)=V-\frac{m}{2\pi(z-ih)^2}+f(z)$$

и функция $f(z)$ регулярна в области, занятой верхней жидкостью, то функция $\mu_1^2(z)$ имеет в этой области единственную особую точку: $z=ih$. Применяя теорему о вычетах, находим

$$\int_K \mu_1^2(z)dz = -\frac{m}{\pi}\int_K \frac{f(z)}{(z-ih)^2}dz = -2im \operatorname*{res}_{z=ih}\frac{f(z)}{(z-ih)^2}.$$

Вычет подынтегральной функции в точке $z = ih$

$$\operatorname*{res}_{z=ih}\frac{f(z)}{(z-ih)^2} = f'(ih).$$

Следовательно,

$$R^* = \rho_1 m\, f'(ih). \tag{18}$$

Из (17) имеем

$$f'(ih) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\frac{im}{2\pi}\left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty} kA(k)e^{-kh}dk - \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty} kB(k)e^{kh}dk\right].$$

С помощью интегральной теоремы Коши можно показать, что данный предел будет

$$f'(ih) = \frac{im}{2\pi}\int_0^{+\infty} k(A(k)e^{-kh} - B(k)e^{kh})dk - \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k(A(k)e^{-kh} + B(k)e^{kh})\right\}.$$

Таким образом,

$$R^* = \frac{i\rho_1 m^2}{2\pi}\int_0^{+\infty} k(A(k)e^{-kh} - B(k)e^{kh})dk - \frac{\rho_1 m^2}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k(A(k)e^{-kh} + B(k)e^{kh})\right\}. \tag{19}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а вычеты берутся по всем s полюсам k_j функции $k(A(k)e^{-kh} + B(k)e^{kh})$, расположенным на положительной действительной оси. Из (16) видно, что эти полюса являются положительными корнями уравнения

$$k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2]\operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1) = 0. \tag{20}$$

Кроме того, очевидно, что точки $k = k_j$ (и только они) являются особыми для подынтегральной функции в первом слагаемом (19) (т. е. полюсами, расположенными на контуре интегрирования).

Проведенный в работе [6] анализ показал, что уравнение (20) имеет два положительных корня при выполнении условия

$$V < V_{\text{кр}}^{\text{вн}} = \sqrt{\frac{gH(\beta + 1 - \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\varepsilon\beta})}{2}} \tag{21}$$

и один положительный корень, если

$$V < V_{\text{кр}}^{\text{пов}} = \sqrt{\frac{gH(\beta + 1 + \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\varepsilon\beta})}{2}}; \tag{22}$$

при $V > V_{\text{кр}}^{\text{пов}}$ положительных решений нет. Здесь $\varepsilon = 1 - \delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ — относительный перепад плотности между слоями обтекаемого потока; $\beta = H_1 / H$. С физической точки зрения критические скорости $V_{\text{кр}}^{\text{вн}}$ и $V_{\text{кр}}^{\text{пов}}$ означают максимальную скорость течения, при которой в потоке за обтекаемым препятствием образуются волны, обусловленные, соответственно, наличием слоя скачка плотности и свободной поверхности (т. е. внутренние и поверхностные).

Выделяя в (19) вещественную и мнимую части, с учетом соотношения (1), связывающего момент диполя с радиусом моделируемого им цилиндра, окончательно получаем следующие выражения для волнового сопротивления и подъемной силы:

$$X = -2\pi^2 \rho_1 V^2 R^4 \sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k(A(k)e^{-kh}dk + B(k)e^{kh}) \right\};$$

$$Y = -2\pi \rho_1 V^2 R^4 \int_0^{+\infty} k(A(k)e^{-kh} - B(k)e^{kh})dk.$$

Необходимо отметить, что в выражение для вычисления подъемной силы не включена действующая на трубопровод сила Архимеда.

Подсчет вычетов осуществляем по формуле

$$\operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k(A(k)e^{-kh}dk + B(k)e^{kh}) \right\} = \left. \frac{k(g_1(k)e^{kh} + g_2(k)e^{-kh})}{dg_3(k)/dk} \right|_{k=k_j},$$

где

$$g_1(k) = \frac{k\left[(\delta k + (1-\delta)\nu)\,\text{th}\,kH_1 - k\right]\left[\nu\,\text{ch}\,k(H-h) - k\,\text{sh}\,k(H-h)\right]}{\text{ch}\,kH};$$

$$g_2(k) = \frac{k(k+\nu)e^{-kH}\left\{[(1-\delta)\nu\,\text{ch}\,kh - \delta k\,\text{sh}\,kh]\,\text{th}\,kH_1 - k\,\text{ch}\,kh\right\}}{\text{ch}\,kH};$$

$$g_3(k) = k^2 + [\delta k^2 + (1–\delta)\nu^2]\,\text{th}\,kH\,\text{th}\,kH_1 - k\nu(\text{th}\,kH + \text{th}\,kH_1).$$

Численные расчеты для реальных условий моря. Расчеты гидродинамических реакций велись при значениях характеристик среды, соответствующих реальным условиям моря. Так, плотность верхнего слоя ρ_1 была принята равной 1024 кг/м^3. С целью исследования влияния величины скачка плотности $\varepsilon = 1 - \delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ модельные расчеты были проведены для двух вариантов значений перепада плотности между верхним и нижним слоями воды: $\rho_2/\rho_1 = \{1{,}01;\ 1{,}10\}$. Причем второй вариант $\rho_2/\rho_1 = 1{,}10$ соответствует взвесенесущему (или мутьевому) потоку с высокой концентрацией взвешенных частиц в его нижнем слое у дна [2]. Для удобства срав-

нения с результатами работы [1] радиус цилиндра был принят равным $R = 0{,}71$ м. Рассматривался случай, когда общая глубина потока (от поверхности до дна) составляла $H_0 = H + H_1 = 50\,\text{м}$ при толщине верхнего слоя $H = 40\,\text{м}$, а моделирующий цилиндр диполь находился на расстояниях от невозмущенного положения поверхности раздела двух слоев $h_i = \{1{,}5;\ 2{,}0;\ 3{,}0;\ 4{,}5\,\text{м}\}$.

Результаты вычисления волнового сопротивления X и подъемной силы Y, действующих на погонный метр длины цилиндрического элемента, в зависимости от скорости набегающего потока V приведены на рис. 2, 3. Для наглядности сравнения величин $X(V)$ и $Y(V)$ при различных локализациях моделирующего цилиндрический элемент конструкции диполя графики на этих рисунках представлены парами (левая пара — локализация под скачком плотности, правая — над ним). При этом верхние графики соответствуют значению перепада плотности $\rho_2 / \rho_1 = 1{,}01$, нижние — $\rho_2 / \rho_1 = 1{,}10$. На каждом графике приведены четыре кривые, согласно разным расстояниям h_i от диполя до границы раздела жидких слоев. Увеличение расстояния $h_i = \{1{,}5;\ 2{,}0;\ 3{,}0;\ 4{,}5\ \text{м}\}$ от поверхности границы раздела слоев до диполя (трубопровода) соответствует уменьшению максимума волнового сопротивления и подъемной силы. Причем относительные изменения величин X и Y к соответствующему изменению расстояния $\Delta h_i\ -\ (X_{h_{i+1}} - X)_{h_i}) / \left(h_{i+1} - h_i\right) = \Delta X_{h_i} / \Delta h_i$ — очень существенны и в случае перепада плотности $\rho_2 / \rho_1 = 1{,}01$ изменяются от единиц до десятков $\text{Н} / \text{м}^2$, а при $\rho_2 / \rho_1 = 1{,}1$ относительные изменения X и Y на порядок выше. Таким образом, скачки плотности в морской среде дополнительно дают весьма значительный вклад в гидродинамическую нагрузку на обтекаемую преграду. В то же время, как показали модельные расчеты, силовые характеристики X и Y практически не зависят от толщин слоев набегающего потока H_i. Также отметим, что при удалении диполя от слоя скачка плотности водной среды максимумы волнового сопротивления и подъемной силы смещаются при увеличении скорости потока (см. рис. 2, 3).

Как видно на всех графиках рис. 2, характерная особенность функции $X(V)$ — это наличие резкого максимума $X_{\max}(V)$ и быстрое убывание при увеличении скорости набегающего потока. Аналогичное поведение демонстрирует и амплитуда поверхностной волны [7, 8]. При скоростях, бóльших критической скорости $V_{\text{кр}}^{\text{вн}}$ (см. (21), (22)), волновое сопротивление резко уменьшается практически до нуля. Далее оно вновь достигает значительных величин лишь

при существенно бóльших значениях скорости $V > 4\,\text{м/с}$. Заметим, что такие скорости течения не свойственны реальным условиям моря.

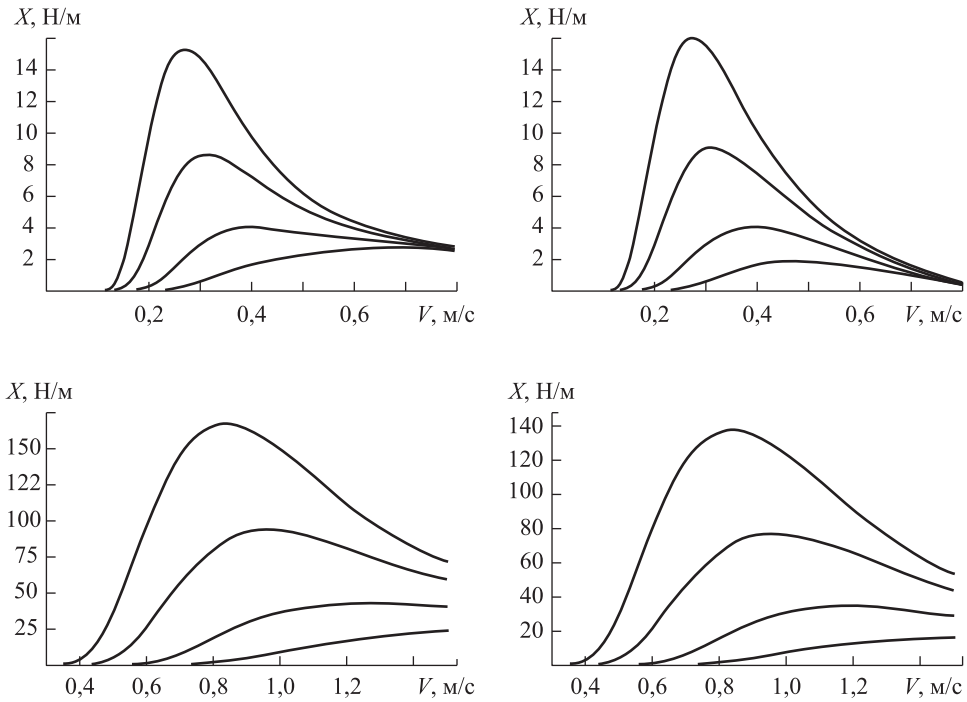


Рис. 2. График зависимости волнового сопротивления диполя от скорости потока

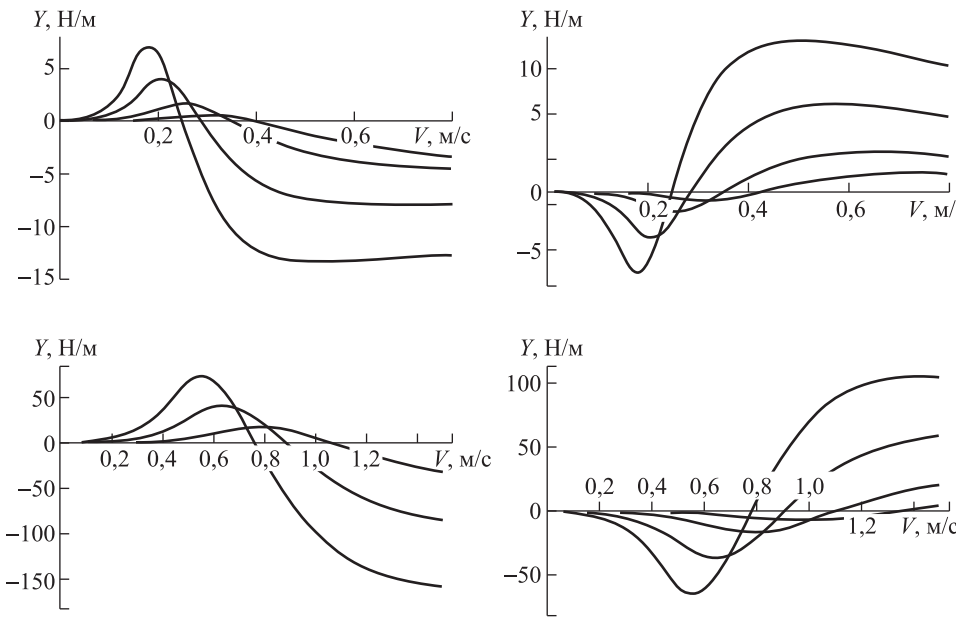


Рис. 3. График зависимости подъемной силы диполя от скорости потока

Представленные на рис. 2 графики силового сопротивления $X(V)$ с одинаковыми значениями параметров ε_j, ρ_2/ρ_1 и h_i показывают, что изменения их форм практически идентичны как при локализации диполя над скачком плотности, так и под ним. В отличие от графиков $X(V)$, изменения кривых $Y(V)$ существенно отличны и обладают другой характерной особенностью: в относительно узком диапазоне изменения скорости потока подъемная сила резко меняет свое направление на противоположное (см. рис. 3). Так, например, перепад значений подъемной силы ΔY_{h_1} в диапазоне значений скорости обтекания $\Delta V = 0{,}15\ldots0{,}35$ м/с составляет ≈ 20 Н/м (при перепаде плотности $\rho_2/\rho_1 = 1{,}01$ — см. левый верхний график), а в случае $\rho_2/\rho_1 = 1{,}1$ — $\Delta Y_{h_1} \simeq 220$ Н/м в диапазоне значений $\Delta V = 0{,}55\ldots1{,}15$ м/с. Таким образом, с ростом величины скачка плотности увеличивается и перепад (от максимума до минимума) подъемной силы.

Заключение. При значительном перепаде плотности взвесенесущего потока волновое сопротивление горизонтальных элементов конструкций в верхнем слое существенно возрастает до значений, которыми нельзя пренебречь при анализе безопасности их функционирования. Кроме того, следует учитывать выявленную особенность подъемной силы. Как видно из проведенных расчетов, в относительно узком диапазоне изменения скорости потока, характерном для реальных морских условий, подъемная сила резко меняет свое направление на противоположное. Поскольку морские течения непостоянны, такой эффект может привести к возникновению противоположно направленных по вертикали силовых воздействий, рассредоточенных по длине элемента конструкции, что в конечном итоге может привести к его деформации и последующему разрушению. Таким образом, выявленные эффекты необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации различных подводных сооружений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 13-08-00538).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия стратифицированного течения на подводный трубо-провод. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 84–98.

[2] Жмур В.В., Сапов Д.А. Катастрофические взвесенесущие гравитационные потоки в придонном слое океана. *Мировой океан. Геология и тектоника океана. Катастрофические явления в океане*, 2013, т. 1, с. 499−524.

[3] Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Волны на поверхности моря, обусловленные обтеканием подводного препятствия. *Океанология*, 2009, № 3, с. 348−354.

[4] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде. *Докл. РАН*, 2011, № 6, с. 826−829.

[5] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Обтекание препятствий стратифицированным потоком со свободной границей. *Океанология*, 2011, № 6, с. 974−983.

[6] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование обтекания преград в потоке со свободной границей. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки,* 2011, спец. вып. «Математическое моделирование», с. 114−135.

[7] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные возмущения при обтекании препятствий стратифицированным потоком конечной глубины. *Океанология*, 2012, № 6, с. 1−11.

[8] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Влияние стратификации и глубины на поверхностные возмущения при обтекании препятствий морским течением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 2(14). URL:http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/609.pdf

[9] Резник С.Н., Троицкая Ю.И. Волновое сопротивление источника массы в стратифицированном сдвиговом потоке, имеющем критический слой. Двумерный случай. *Изв. РАН. МЖГ*, 1997, № 2, с. 131−140.

[10] Казаков В.И., Коротков Д.П., Серин Б.В., Таланов В.И., Троицкая Ю.И. Автоколебания в турбулентном стратифицированном сдвиговом потоке. *Изв. РАН. ФАО*, 2002, т. 38, № 4, с. 504−514.

[11] Ерманюк Е.В., Гаврилов Н.В. Дифракция внутренних волн на круговом цилиндре, расположенном вблизи пикноклина. *ПМТФ*, 1999, т. 40, № 2, с. 79–85.

[12] Ерманюк Е.В., Гаврилов Н.В. Экспериментальное исследование силового воздействия уединенной внутренней волны на погруженный круговой цилиндр. *ПМТФ*, 2005, т. 46, № 6, с. 36−44.

[13] Scase M. M. and Dalziel S. B.. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 498, pp. 289–313. doi:10.1017/S0022112003006815

[14] Greenslande M. D. Drag on a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 418, pp. 339–350. doi:10.1017/S0022112000001361

[15] Zhu G., Bearman P.W., Graham J.M.R. Prediction of drag and lift using velocity and vorticity fields. *Aeron*., *J*. 2002, vol. 106, no. 1064, pp. 547–554.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия на горизонтальные элементы конструкций в верхнем слое стратифицированного сечения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 74–87.

Владимиров Игорь Юрьевич родился в 1983 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. Автор около 10 научных публикаций.

Корчагин Николай Николаевич родился в 1945 г., окончил МФТИ в 1967 г. Д-р физ-мат. наук. Главный научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. Является автором свыше 100 научных работ. e-niknik@mail.ru

Савин Александр Сергеевич родился в 1958 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 105 научных публикаций.

Simulation of wave action on horizontal structure elements in the upper layer of stratified flow

© I.Yu. Vladimirov [1], N.N. Korchagin [1], A.S. Savin [2]

[1] Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, 117851, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article describes performed simulation of force action on streamlined horizontal elements of engineering structures in the upper layer of sharply stratified flow associated with the generation of waves at the interface between the liquid layers. We obtained an integral representation of the wave drag and lift, made numerical calculations for a real marine environment. The conditions under which there is a significant increase in the hydrodynamic reactions on streamlined structural elements were revealed.

Keywords: *extended horizontal obstacle in the flow, stratified flow, wave drag, lift.*

REFERENCES

[1] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods,* 2014, no. 2, pp. 84–98.

[2] Zhmur V.V., Sapov D.A. Katastroficheskie vzvesenesushchie gravitatsionnye potoki v pridonnom sloe okeana [Catastrophic suspension currents in the bottom layer of the ocean]. *Mirovoy okean. Geologiya i tektonika okeana. Katastroficheskie yavleniya v okeane* [World Ocean. Ocean geology and tectonics. Catastrophic events in the ocean], 2013, vol. 1, pp. 499−524.

[3] Korchagin N.N., Savin A.S., Savina E.O. *Okeanologiya – Oceanology*, 2009, no. 3, pp. 348−354.

[4] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Doklady RAN – Reports of RAS,* 2011, no. 6, pp. 826−829.

[5] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. Savina E.O. *Okeanologiya – Oceanology*, 2011, no. 6, pp. 974−983.

[6] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences,* 2011, special issue "Mathematical Modeling", pp. 114−135.

[7] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Okeanologiya – Oceanology*, 2012, no. 6, pp. 1−11.

[8] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations,* 2013, no. 2(14). Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/609.pdf

[9] Reznik S.N., Troitskaya Yu.I. *Izvestiya RAN. MZhG — Fluid Dynamics,* 1997, no. 2, pp. 131−140.

[10] Kazakov V.I., Korotkov D.P., Serin B.V., Talanov V.I., Troitskaya Yu.I. *Izvestiya RAN. FAO — Atmospheric and Oceanic Physics,* 2002, vol. 38, no. 4, pp. 504−514.

[11] Yermanuk E.V., Gavrilov N.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 1999, vol. 40, no. 2, pp. 79–85.
[12] Yermanuk E.V., Gavrilov N.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 2005, vol. 46, no. 6, pp. 36−44.
[13] Scase M.M., Dalziel S.B. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 498, pp. 289–313. doi: 10.1017/S0022112003006815.
[14] Greenslande M.D. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 418, pp. 339–350. doi: 10.1017/S0022112000001361.
[15] Zhu G., Bearman P.W., Graham J.M.R. *Aeronautical Journal*, 2002, vol. 106, no. 1064, pp. 547–554.

Vladimirov I.Yu. (b. 1983) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph.D., researcher at the Shirshov Institute of Oceanology RAS. Author of about 10 publications.

Korchagin N.N. (b. 1945) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1967. Dr. Sci. (Phys. & Math.), senior staff scientist at the Shirshov Institute of Oceanology RAS. Author of more than 100 publications. e-mail: e-niknik@mail.ru

Savin A.S. (b. 1958) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1981. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, head of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of 105 publications.