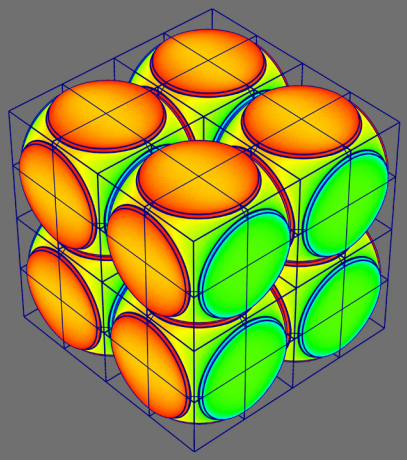
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 3, с. 47–70.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/287/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:48

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-3-4770

Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов

© Ю.И. Димитриенко, М.С. Черкасова, А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена микроструктурная модель слоистых упруго-пластических композитов на основе анизотропной теории течения. Модель представляет собой эффективные определяющие соотношения трансверсально-изотропной теории пластического течения, в которой константы модели определяются не экспериментально, а на основе аппроксимаций диаграмм деформирования композитов, полученных путем прямого численного решения задач на ячейке периодичности для базовых траекторий нагружения, которые возникают в методе асимптотического осреднения. Сформулирована задача идентификации констант этой модели композита, для численного решения этой задачи применяются методы оптимизации функционала ошибки. Представлены результаты численного моделирования предложенным методом для слоистых упруго-пластических композитов, показавшие хорошую точность аппроксимации численных диаграмм деформирования.

Ключевые слова: *микроструктурная модель, слоистые композиты, теория пластического течения, метод асимптотического осреднения, диаграммы деформирования*

Введение. В настоящее время существует достаточно большое число работ, посвященных моделированию эффективных механических характеристик композиционных материалов на основе информации о микроструктуре и свойствах, входящих в них компонентов (фаз) [1–9]. Одним из наиболее перспективных таких методов является метод гомогенизации (метод асимптотического осреднения), предложенный A. Bensoussan, J.D. Lions, G. Papanicolaou [10], Н.С. Бахваловым, Г.П. Панасенко [11], Э. Санчес–Паленсией [12], Б.Е. Победрей [13]. Метод асимптотического осреднения достаточно хорошо развит в настоящее время и успешно применяется для разных задач механики, но главным образом для линейных задач [14], для решения которых созданы эффективные методы конечно-элементного анализа. В работах [15–19] метод МАО применяется для моделирования деформирования упруго-пластических композитов.

Для решения задач макроскопического деформирования элементов конструкций из упруго-пластических композитов на основе метода МАО необходимо решать связанную задачу микро-макроскопического деформирования, что является достаточно трудоемким процессом, даже для современных вычислительных систем. В работах [20, 21] был предложен метод решения связанных

задач многомасштабного моделирования путем построения микроструктурных моделей определяющих соотношений, расчета констант, входящих в эти модели на основе аппроксимации численных диаграмм деформирования, полученных методом МАО, и последующего решения макроскопических задач уже для сред с эффективными нелинейными, например, упруго-пластическими свойствами.

Цель настоящей работы — разработка микроструктурной модели для слоистых упруго-пластических композитов на основе теории течения. Аналогичный метод для деформационной теории пластичности предложен в [21].

Эффективные определяющие соотношения слоистых упруго-пластических слоистых композитов на основе теории течения. Рассмотрим слоистый композиционный материал периодической структуры, каждый слой которого является упруго-пластическим изотропным материалом, соответствующим модели теории пластического течения [22] с поверхностью пластичности в форме Губера-Мизеса с кинематическим упрочнением. Применим к этому композиту метод МАО, тогда, как было показано в работе [22], согласно этому методу возникают локальные задачи теории пластичности на ячейке периодичности (ЯП), решая которые [22] можно получить эффективные упруго-пластические определяющие соотношения композита, которые записываются в итерационном виде

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}} = \tilde{\bar{C}}_{ijmn}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{mn}^{\{m\}}, \tag{1}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{p\{m\}} = \tilde{\bar{Y}}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}, \tag{2}$$

где обозначены: $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}}$ — средние по ЯП значения компонент тензоров скоростей напряжений, $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{p\{m\}}$ — средние значения скоростей пластических деформаций композита, $m-$номер итерации, $\bar{h}$ — индикатор пластического нагружения композита, а также введены: $\tilde{\bar{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}}$ — эффективный приведенный тензор модулей упругости и $\bar{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}}$ — эффективный тензор концентраций пластических деформаций слоистого композита, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} &= \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} \right\rangle, \\ \bar{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}} &= \left\langle \hat{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}} \right\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

здесь $\left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} \right\rangle$ — осреднение по ЯП. Тензоры $\hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}}$ и $\hat{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}}$ вычисляются по формулам [22]

$$\hat{\tilde{C}}^{\{m-1\}}_{ijsp} = \tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijsp} + \tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijk3}(\tilde{C}^{\{m-1\}}_{k3q3})^{-1}$$
$$\left(\left\langle(\tilde{C}^{\{m-1\}}_{q3r3})^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle(\tilde{C}^{\{m-1\}}_{r3l3})^{-1}\tilde{C}^{\{m-1\}}_{l3sp}\right\rangle - \tilde{C}^{\{m-1\}}_{q3sp}\right);$$
$$\hat{Y}^{\{m-1\}}_{ijsp} = Y^{\{m-1\}}_{ijsp} + Y^{\{m-1\}}_{ijk3}(\tilde{C}^{\{m-1\}(0)}_{k3q3})^{-1} \qquad (4)$$
$$\left(\left\langle(\tilde{C}^{\{m-1\}}_{q3r3})^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle(\tilde{C}^{\{m-1\}}_{r3l3})^{-1}\tilde{C}^{\{m-1\}}_{l3sp}\right\rangle - \tilde{C}^{\{m-1\}}_{q3sp}\right).$$

где $\tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijsp}$ — приведенный тензор модулей упругости компонентов композита на $m-1$ итерации, а в $Y^{\{m-1\}}_{ijsp}$ — тензор концентрации пластических деформаций компонентов композита на $m-1$ итерации. Эти тензоры вычисляются с помощью следующих выражений

$$Y_{klij} = hQ_{klmp}\tilde{C}_{mpij},$$
$$\tilde{C}_{mpkl} = T^{-1}_{mpij}C_{ijkl};\ T_{ijmp} = \Delta_{ijmp} + hC_{ijkl}Q_{klmp},$$
$$Q_{ijkl} = \frac{I_{2p}^{2(1-n)}A_{kl}A_{ij}}{HS_{spmp}A_{sp}A_{mp}},$$
$$A_{ij} = B_{ijkl}\left(\sigma_{kl} - H\varepsilon^p_{kl}\right),$$
$$S_{ijmp} = I_{2p}^{2(1-n)}\Delta_{mpij} - \frac{2\alpha nH}{H_0}B_{klmp}\varepsilon^p_{kl}\varepsilon^p_{ij}, \qquad (5)$$
$$H = \frac{H_0}{1+\alpha I_{2p}^{2n}};\ \ 0 \le n \le 1,\ \alpha > 0,$$
$$I^2_{2p} \equiv I^2_2\left(\varepsilon^p_{ij}\right) \equiv B_{ijkl}\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{kl},$$
$$B_{ijkl} = \Gamma_{ijmn}\Gamma_{mnkl};\ \ \Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Здесь H — параметр упрочнения в модели пластического течения, H_0, α и n — константы этой модели, и I_{2p} — второй инвариант тензора (интенсивность), Δ_{mnij} — компоненты единичного тензора четвертого ранга ${}^4\Delta$, C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости компонентов композита [23], σ_{kl} — компоненты тензора напряжений в компонентах композита, ε^p_{ij} — компоненты тензора пластических деформаций компонента композита, для которых имеют место соотношения

$$\dot{\varepsilon}^p_{kl} = hQ_{klij}\dot{\sigma}_{ij}, \qquad (6)$$

а h — индикатор пластического деформирования в компонентах композита:

$$h = \begin{cases} 0, & f < 0; \\ 1, & f = 0, \end{cases} \tag{7}$$

здесь f — функция поверхности пластичности компонентов композита

$$f = \frac{1}{2}\left(I_2\left(\sigma_{ij} - H\varepsilon^p_{ij}\right)\right)^2 - \sigma_S^2, \tag{8}$$

где σ_S — предел текучести компонентов.

Для получения значений функций $\tilde{C}^{\{m-1\}}_{ijsp}$ и $Y^{\{m-1\}}_{ijsp}$, $Y^{\{m-1\}}_{ijsp}$ в выражениях (5) компоненты ε^p_{ij} и σ_{kl} заменяются на $\varepsilon^{p\{m-1\}}_{ij}$ и $\sigma^{\{m-1\}}_{kl}$ для соответствующей $m-1$ итерации.

Все соотношения (1)–(8) записаны в декартовой прямоугольной системе координат с базисом $\vec{e}_i$, в котором вектор $\vec{e}_3$ ортогонален к плоскостям раздела слоев композита. Компоненты всех тензоров и векторов в (1)–(8) записаны в этом базисе $\vec{e}_i$.

Микроструктурная модель теории течения для трансверсально-изотропного упруго-пластического композита. Соотношения (1) с учетом (2)–(8) не допускают явного аналитического представления для поверхности пластичности композита, что затрудняет использование этих соотношений при решении сложных макроскопических задач конечно-элементного анализа, поскольку приходится анализировать условия перехода в пластическое состояние каждого компонента композита в каждой точке (каждом конечном элементе) конструкции. Потому для дальнейшего используем концепцию построения микроструктурных моделей композита, которая была предложена в [21].

Воспользуемся тем, что слоистый композит в целом, как однородная гомогенизированная среда, является трансверсально-изотропной средой, и рассмотрим совместные инварианты $J^{(3)}_\gamma(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$, $\gamma = 1,..., z_1$ [23, 24] осредненного тензора напряжений $\bar{\sigma}$ и пластических деформаций $\bar{\varepsilon}^p$ композита для группы трансверсальной-изотропии T_3 с осью трансверсальной изотропии $O\vec{c}_3$, где $\vec{c}_i$ — главный базис трансверсальной анизотропии. Тогда, согласно общей теории ассоциированных моделей анизотропных упруго-пластических сред [24], для тензора скоростей пластических деформаций композита можно записать следующие определяющие соотношения:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \bar{h}\sum_{\gamma=1}^{z_1} \psi_\gamma J^{(3)}_{\gamma\sigma}, \tag{9}$$

где

$$\psi_\gamma = \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\lambda}_\beta f_{\beta\gamma},$$
$$f_{\beta\gamma} = \frac{\partial f_\beta}{\partial J_\gamma^{(3)}}, \quad J_{\gamma\sigma}^{(3)} = \frac{\partial J_\gamma^{(3)}}{\partial \bar{\sigma}}, \tag{10}$$

а

$$f_\beta = f_\beta(J_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)), \quad \beta = 1,...,k, \tag{11}$$

— пластические потенциалы, определяющие поверхность пластичности композита, которая задается системой уравнений:

$$f_\beta = 0, \quad \beta = 1,...,k, \tag{12}$$

в пространстве макро-напряжений $\bar{\sigma}$. В уравнениях (9) обозначен $\bar{h}$ — индикатор пластического нагружения композита, определяемый текущим состоянием нагружения по отношению к поверхности пластичности (12) и $\dot{\lambda}_\beta$ — коэффициенты пропорциональности.

Выберем для трансверсально-изотропной среды функциональный базис совместных инвариантов $J_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ в следующем виде [24]

$$J_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = I_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma} - H_\gamma \bar{\varepsilon}^p), \quad \gamma = 1,...,4, \tag{13}$$

где $I_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma} - H_\gamma \bar{\varepsilon}^p)$ — линейные и квадратичные инварианты тензора второго ранга в функциональном базисе трансверсальной изотропии [23]

$$I_1^{(3)}(\sigma) = (E - c_3^2) \cdot\cdot \sigma, \quad I_2^{(3)}(\sigma) = c_3^2 \cdot\cdot \sigma,$$
$$I_3^{(3)}(\sigma) = ((E - c_3^2) \cdot \sigma) \cdot\cdot (c_3^2 \cdot \sigma), \tag{14}$$
$$I_4^{(3)}(\sigma) = \sigma^2 \cdot\cdot E - I_2^{(3)2}(\sigma) - 2I_3^{(3)}(\sigma),$$

здесь E — метрический тензор, $c_3^2 = \vec{c}_3 \otimes \vec{c}_3$, а $\otimes$ — тензорное умножение [23].

Параметры упрочнения H_γ в (13) выбираются в следующем виде

$$H_\gamma = H_\gamma^0 (I_\gamma^{(3)}(\bar{\varepsilon}^p))^{n_\gamma}, \quad \gamma = 1,...,4, \tag{15}$$

где H_γ^0, n_γ — константы модели.

Тензоры производных $J_{\gamma\sigma}^{(3)}$ от совместных инвариантов (14) имеют следующий вид [23]:

$$J_{1\sigma}^{(3)} = (E - \vec{c}_3^2),\ \ J_{2\sigma}^{(3)} = \vec{c}_3^2,$$
$$J_{3\sigma}^{(3)} = \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2)\cdot\cdot(\bar{\sigma} - H_\gamma \bar{\varepsilon}^p), \qquad (16)$$
$$J_{4\sigma}^{(3)} = {}^4O_3 \cdot\cdot(\bar{\sigma} - H_\gamma \bar{\varepsilon}^p),$$

где O_β и ${}^4O_3$ — направляющие тензоры группы трансверсальной изотропии [23]

$$O_1 = \vec{c}_2 \otimes \vec{c}_3 + \vec{c}_3 \otimes \vec{c}_2,\ \ O_2 = \vec{c}_1 \otimes \vec{c}_3 + \vec{c}_3 \otimes \vec{c}_1,$$
$$ {}^4O_3 = 2({}^4\Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \vec{c}_3^2 \otimes \vec{c}_3^2). \qquad (17)$$

Подставляя выражения (16) в (9), получаем представление определяющего соотношения для пластических деформаций слоистого композита в тензорном базисе

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \bar{h}(\psi_1(E - \vec{c}_3^2) + \psi_2 \vec{c}_3^2 +$$
$$+ \frac{\psi_3}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2)\cdot\cdot(\bar{\sigma} - H_3 \bar{\varepsilon}^p) + \qquad (18)$$
$$+ \psi_4\, {}^4O_3 \cdot\cdot(\bar{\sigma} - H_4 \bar{\varepsilon}^p)).$$

Если главный базис трансверсальной анизотропии $\vec{c}_i$ совпадает с декартовым базисом $\vec{e}_i$, то инварианты (14) можно записать с помощью декартовых компонент тензоров

$$I_1^{(3)}(\bar{\sigma} - H_1 \bar{\varepsilon}^p) = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} - H_1(\bar{\varepsilon}_{11}^p + \bar{\varepsilon}_{22}^p),$$
$$I_2^{(3)}(\bar{\sigma} - H_2 \bar{\varepsilon}^p) = \bar{\sigma}_{33} - H_2 \bar{\varepsilon}_{33}^p,$$
$$I_3^{(3)}(\bar{\sigma} - H_3 \bar{\varepsilon}^p) = (\bar{\sigma}_{13} - H_3 \bar{\varepsilon}_{13}^p)^2 + (\bar{\sigma}_{23} - H_3 \bar{\varepsilon}_{23}^p)^2, \qquad (19)$$
$$I_4^{(3)}(\bar{\sigma} - H_4 \bar{\varepsilon}^p) = (\bar{\sigma}_{11} - H_4 \bar{\varepsilon}_{11}^p)^2 + (\bar{\sigma}_{22} - H_4 \bar{\varepsilon}_{22}^p)^2 + 2(\bar{\sigma}_{12} - H_4 \bar{\varepsilon}_{12}^p)^2,$$

а определяющие соотношения (18) в компонентах в этом случае можно записать следующим образом:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p = \bar{h}(\psi_1(\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{3j}) + \psi_2 \delta_{i3}\delta_{3j} +$$
$$+ \frac{\psi_3}{2}((\delta_{2i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{2j})(\bar{\sigma}_{23} - H_3 \bar{\varepsilon}_{23}^p) +$$
$$+ (\delta_{1i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{1j})(\bar{\sigma}_{13} - H_3 \bar{\varepsilon}_{13}^p)) + \qquad (20)$$
$$+ 2\psi_4(\delta_{1i}\delta_{1j}(\bar{\sigma}_{11} - H_4 \bar{\varepsilon}_{11}^p) + \delta_{2i}\delta_{2j}(\bar{\sigma}_{22} - H_4 \bar{\varepsilon}_{22}^p) +$$
$$+ 2(\delta_{1i}\delta_{2j} + \delta_{2i}\delta_{1j})(\bar{\sigma}_{12} - H_4 \bar{\varepsilon}_{12}^p)))$$

Для слоистого трансверсально-изотропного композита пластические свойства можно разделить на две группы: связанные с 1) напряжениями межслойных сдвигов и поперечного растяжения-сжатия, 2) напряжениям растяжения-сжатия и сдвига в плоскости трансверсальной изотропии. Тогда для слоистого КМ можно ввести два пластических потенциала (11) (т.е. $k=2$) f_1 и f_2, каждый их которых зависит от совместных инвариантов в группе 1) или 2) соответственно

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1\left(I_1^{(3)}(\bar{\sigma}-H_1\bar{\varepsilon}^p),\ \ I_4^{(3)}(\bar{\sigma}-H_4\bar{\varepsilon}^p)\right),\\ f_2 &= f_2\left(I_2^{(3)}(\bar{\sigma}-H_2\bar{\varepsilon}^p),\ \ I_3^{(3)}(\bar{\sigma}-H_3\bar{\varepsilon}^p)\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Вычисляя производные от f_β и подставляя их в (10), получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \dot{\lambda}_1 f_{11}, \quad \psi_2 = \dot{\lambda}_2 f_{22},\\ \psi_3 &= \dot{\lambda}_2 f_{23}, \quad \psi_4 = \dot{\lambda}_1 f_{14} \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда определяющие соотношения (18) для тензора скоростей пластической деформации принимают вид

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_1 \bar{h} P_{1H} + \dot{\lambda}_2 \bar{h} P_{2H}, \tag{23}$$

где обозначены тензоры

$$\begin{aligned} P_{1H} &\equiv f_{11}\left(E - c_3^2\right) + f_{14}\,{}^4O_3 \cdot\cdot (\bar{\sigma} - H_4\bar{\varepsilon}^p),\\ P_{2H} &\equiv f_{22}c_3^2 + \frac{f_{23}}{2}\left(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2\right)\cdot\cdot(\bar{\sigma} - H_3\bar{\varepsilon}^p). \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку эти тензоры ортогональны друг другу, то из (23) получаем выражения для коэффициентов пропорциональности

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \pm\sqrt{\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p \cdot\cdot P_{1H}}{P_{1H} \cdot\cdot P_{1H}}},\\ \dot{\lambda}_2 &= \pm\sqrt{\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p \cdot\cdot P_{2H}}{P_{2H} \cdot\cdot P_{2H}}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Если подставить (25) в (23), то для нахождения всех компонент тензора пластической деформации к соотношениям (23) следует добавить еще два скалярных уравнения (12) с учетом (21)

$$f_1 = 0, \ \ f_2 = 0, \tag{26}$$

Выберем пластические потенциалы f_β в квадратичном виде, подобном модели Мизеса для изотропного случая:

$$2f_1 = \frac{J_4^{(3)}}{\sigma_{4s}^2} + \left(\frac{\left| J_1^{(3)} \right| + J_1^{(3)}}{2\sigma_{1s}^+} \right)^2 + \left(\frac{\left| J_1^{(3)} \right| - J_1^{(3)}}{2\sigma_{1s}^-} \right)^2 - 1,$$
$$2f_2 = \left(\frac{\left| J_2^{(3)} \right| + J_2^{(3)}}{2\sigma_{2s}^+} \right)^2 + \left(\frac{\left| J_2^{(3)} \right| - J_2^{(3)}}{2\sigma_{2s}^-} \right)^2 + \frac{J_3^{(3)}}{\sigma_{3s}^2} - 1. \qquad (27)$$

Здесь $J_\gamma^{(3)}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ — совместные инварианты (13) в виде (19).

Функции $\sigma_{1s}^{\pm}$ — это пределы текучести композита при продольном растяжении и сжатии, соответственно, а σ_{4s} — предел текучести композита при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, $\sigma_{2s}^{\pm}$ — пределы текучести при поперечном растяжении и сжатии, а σ_{3s} — предел текучести при межслойном сдвиге. Для анизотропных сред различие пределов текучести при растяжении и сжатии обычно достаточно существенно, поэтому функции $\sigma_{\alpha s}^+$ и $\sigma_{\alpha s}^-$ могут значительно отличаться.

Частные производные $f_{\beta\gamma}$ для потенциалов (27) имеют вид

$$f_{\alpha\alpha} = \frac{\left| J_\alpha^{(3)} \right| + J_\alpha^{(3)}}{2\sigma_{\alpha s}^+} + \frac{\left| J_\alpha^{(3)} \right| - J_\alpha^{(3)}}{2\sigma_{\alpha s}^-},\ \alpha = 1,2,$$
$$f_{14} = \frac{1}{2\sigma_{4s}^2},\ \ f_{23} = \frac{1}{2\sigma_{3s}^2}. \qquad (28)$$

Для упругих деформаций $\bar{\varepsilon}^e$ слоистого композита имеем классические определяющие соотношения линейно-упругости трансверсально изотропной среды [24]

Для упругих деформаций $\bar{\varepsilon}^e$ слоистого композита имеем классические определяющие соотношения линейно-упругости трансверсально изотропной среды [24]

$$\bar{\sigma} = {}^4\bar{C} \cdot\cdot \bar{\varepsilon}^e \qquad (29)$$

где ${}^4\bar{C}$ — эффективный тензор модулей упругости трансверсально-изотропной среды [24]

$${}^4\bar{C} = l_1 E \otimes E + l_2 c_3^2 \otimes c_3^2 + l_3 (E \otimes c_3^2 + c_3^2 \otimes E) +$$
$$+ l_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + l_5\, {}^4\Delta, \qquad (30)$$

а $l_1, ..., l_5$ — эффективные упругие константы композита.

Задачи макроскопического деформирования элементов конструкций из упруго-пластических композитов. Макроскопическая квазистатическая задача теории пластичности для композита имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\bar{\sigma}=0,\ \vec{\bar{x}}\in\bar{V},\\ \bar{\varepsilon}\ =\frac{1}{2}(\nabla\otimes\vec{\bar{u}}+\nabla\otimes\vec{\bar{u}}^{T}),\ \vec{\bar{x}}\in\bar{V}\bigcup\bar{\Sigma},\\ \vec{\bar{n}}\cdot\bar{\sigma}\Big|_{\bar{\Sigma}_\sigma}=\vec{\bar{S}}_e,\ \vec{\bar{u}}\Big|_{\bar{\Sigma}_u}=\vec{\bar{u}}_e,\end{gathered}\qquad(31)$$

где $\bar{\Sigma}=\bar{\Sigma}_\sigma\bigcup\bar{\Sigma}_u$ — поверхность гомогенизированной области $\bar{V}$ композита, в глобальных координатах $\vec{\bar{x}}$ [22], $\bar{\Sigma}_\sigma$ — часть поверхности, но которой задан вектор усилий $\vec{\bar{S}}_e$, $\bar{\Sigma}_u$ — часть поверхности, на которой задан вектор перемещений $\vec{\bar{u}}_e$. К системе (32) присоединяются определяющие соотношения макро-пластичности (23)–(29) согласно микроструктурной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического композита или прямые эффективные определяющие соотношений слоистого композита (1)–(8).

Методика идентификации констант микроструктурной модели трансверсально-изотропной упруго-пластической среды. Предложенная микроструктурная модель трансверсально-изотропной упруго-пластической среды содержит следующие константы

$$l_1,...,l_5,H_1^0,\ H_2^0,\ H_3^0,\ H_4^0,n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \sigma_{1s}^{\pm},\ \sigma_{2s}^{\pm},\sigma_{3s},\sigma_{4s}\qquad(32)$$

Эффективные упругие константы слоистого композита $l_1,...,l_5$ могут быть вычислены явным образом по упругим константам слоев композита, используя для этого аналитические формулы (4) для первого приближения $m=1$, без учета пластических деформаций.

Для определения упруго-пластических констант в перечне (33) используем сследующую методику: построим диаграммы деформирования слоистого композита, полученные при различных путях нагружения в пространстве напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$, на основе прямого решения задачи на ЯП, т.е. с помощью определяющих соотношений (1)-(8). Затем построим аналогичные диаграммы с помощью аналитических определяющих соотношений композита (23)–(27), и построим процедуру аппроксимации диаграмм первого типа диаграммами деформирования второго типа $\bar{\sigma}_{ij}=F_{ij}\left(\bar{\varepsilon}_{mn}\right)$.

Тогда константы (31) найдем из условия наилучшей аппроксимации диаграмм первого типа диаграммами второго типа.

Рассмотрим далее перечень специального класса задач для определения констант модели (30) слоистого композита. Для этой цели выберем задачи макроскопического деформирования конструкции в виде прямоугольного параллелепипеда $\overline{V}$, ребра которого ориентированы по осям $O\vec{c}_i$ — главного базиса трансверсальной анизотропии (полагаем для простоты, что $\vec{c}_i = \vec{e}_i$), и рассмотрим различные случаи нагружения этой конструкции в виде одноосного растяжения-сжатия по разным направлениям $O\vec{e}_i$ и сдвигов в различных координатных плоскостях.

Одноосное поперечное растяжение-сжатие композита. Рассмотрим случай растяжения-сжатия параллелепипеда $\overline{V}$ вдоль оси $O\vec{e}_3$. Решение макроскопической задачи (30) с определяющими соотношениями (23)–(27) ищем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{33} = \text{const} \neq 0, \text{ а остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0. \tag{33}$$

Тогда согласно соотношениям (23)–(27) имеем

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22} \neq 0, \ \bar{\varepsilon}_{33} \neq 0, \ \text{ остальные } \ \bar{\varepsilon}_{ij} = 0. \tag{34}$$

Аналогичные соотношения имеют место для упругих и пластических деформаций $\bar{\varepsilon}^e_{ij}$ и $\bar{\varepsilon}^p_{ij}$.

Выразим деформацию $\bar{\varepsilon}^e_{33}$ через $\bar{\sigma}_{33}$ с помощью соотношений (28)

$$\bar{\varepsilon}^e_{33} = \frac{\bar{\sigma}_{33}}{\bar{E}_3}, \tag{35}$$

где E_3 — модуль упругости, выражается через модули упругости $\bar{C}_{ijkl}$ композита стандартным образом [24].

Найдем теперь зависимость тензора пластических деформаций $\bar{\varepsilon}^p_{33}$ от компоненты тензора напряжений $\bar{\sigma}_{33}$ из соотношений (26) и (27) с учетом одноосности нагружения (28) и (29)

$$\frac{\pm(\bar{\sigma}_{33} - H_2\bar{\varepsilon}^p_{33})}{\sigma^{\pm}_{2s}} = 1. \tag{36}$$

Подставляя в это уравнение выражение (15), получаем для пластических деформаций следующую формулу

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{p}=\begin{cases}0, & \text{если } -\sigma_{2s}^{-}<\bar{\sigma}_{33}<\sigma_{2s}^{+},\\ \left(\dfrac{\bar{\sigma}_{33}-\sigma_{2s}^{+}}{H_2^0}\right)^{\frac{1}{n_2+1}}, & \text{если } \bar{\sigma}_{33}>\sigma_{2s}^{+},\\ \left(-\dfrac{\bar{\sigma}_{33}+\sigma_{2s}^{-}}{H_2^0}\right)^{\frac{1}{n_2+1}}, & \text{если } \bar{\sigma}_{33}<-\sigma_{2s}^{-}.\end{cases} \tag{37}$$

Объединяя (36) и (38), получаем диаграмму деформирования композита при одноосном поперечном растяжении-сжатии

$$\bar{\sigma}_{33}=\bar{F}_3^{\pm}(\bar{\varepsilon}_{33}). \tag{38}$$

В этой зависимости присутствуют пять неизвестных констант модели: $\bar{E}_3$, H_2^0, n_2, σ_{2s}^{+}, σ_{2s}^{-}. Модуль упругости $\bar{E}_3$ полагаем установленным описанным выше способом. Поиск остальных 4 констант осуществляем путем сравнения с «экспериментальными» диаграммами деформирования $\bar{F}_3^{(э)\pm}(\bar{\varepsilon}_{33})$, полученными в результате прямого решения задачи с определяющими соотношениями (1)–(8) при поперечном одноосном растяжении-сжатии слоистого композиционного материала.

Межслойный сдвиг композита. Рассмотрим случай межслойного сдвига композитного параллелепипеда $\bar{V}$ в плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_3$. В этом случае решение макроскопической задачи (30) с определяющими соотношениями (23)–(30) ищем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{13}=\text{const}\neq 0,\ \text{а остальные } \bar{\sigma}_{ij}=0. \tag{39}$$

Согласно (23)–(29) отличной от нуля в этом случае будет только сдвиговая деформация $\bar{\varepsilon}_{13}\neq 0$, а остальные $\bar{\varepsilon}_{ij}=0$. Тоже самое относится к упругим и пластическим деформациям $\bar{\varepsilon}_{ij}^{e}$ и $\bar{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Из (29), (30) и (39), находим

$$\bar{\varepsilon}_{13}^{e}=\frac{\bar{\sigma}_{13}}{2\bar{G}_{13}}. \tag{40}$$

где $\bar{G}_{13}$ — модуль сдвига композита в плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_3$.

Условия пластичности (26), (27) в данном случае нагружения записываются следующим образом:

$$2f_2=\frac{(\bar{\sigma}_{13}-H_3\bar{\varepsilon}_{13}^{p})^2}{\sigma_{3s}^2}-1=0, \tag{41}$$

а единственное тождественно ненулевое соотношение в (20) в данном случае имеет вид

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{13} = \frac{\bar{h}\dot{\lambda}_2}{4\sigma^2_{3s}}(\bar{\sigma}_{13} - H_3\bar{\varepsilon}^p_{13})) \tag{42}$$

Выразим компоненту тензора пластических деформаций $\bar{\varepsilon}^p_{13}$ из уравнения (41) с учетом выражения (15) для $H_3 = H^0_3 \left|\bar{\varepsilon}^p_{13}\right|^{2n_3}$

$$\bar{\varepsilon}^p_{13} = \left(\frac{\bar{\sigma}_{13} - \sigma_{3s}}{H^0_3}\right)^{\frac{1}{2n_3+1}}. \tag{43}$$

Тогда с учетом (35) получаем диаграмму деформирования КМ $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$ при межслойном сдвиге:

$$\bar{\varepsilon}_{13} = \frac{\bar{\sigma}_{13}}{2\bar{G}_{13}} + \left(\frac{\bar{\sigma}_{13} - \sigma_{3s}}{H^0_3}\right)^{\frac{1}{2n_3+1}}. \tag{44}$$

В данной функции содержится четыре неизвестных константы: $\bar{G}_{13}$, n_3, H^0_3, σ_{3s}. Их поиск осуществляем путем сравнения с «экспериментальной» диаграммой деформирования $\bar{F}^{(э)}_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$, полученной в результате прямого решения задачи с определяющими соотношениями (1)–(8) при межслойном сдвиге слоистого композиционного материала.

Сдвиг в плоскости слоя композита. Рассмотрим случай межслойного сдвига композитного параллелепипеда $\bar{V}$ в плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. В этом случае решение макроскопической задачи (30) с определяющими соотношениями (23)–(30) ищем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{12} = \text{const} \neq 0, \text{ а остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0. \tag{45}$$

Отличной от нуля в этом случае будет только сдвиговая деформация $\bar{\varepsilon}_{12} \neq 0$, а остальные $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$, аналогично и для упругих и пластических деформаций $\bar{\varepsilon}^e_{ij}$ и $\bar{\varepsilon}^p_{ij}$. Из (29), (30) и (45) находим

$$\bar{\varepsilon}^e_{12} = \frac{\bar{\sigma}_{12}}{2\bar{G}_{12}}. \tag{46}$$

Условия пластичности (26), (27) в данном случае нагружения записываются следующим образом:

$$2f_1 = \frac{2(\bar{\sigma}_{12} - H_4\bar{\varepsilon}_{12}^p)^2}{\sigma_{4s}^2} - 1 = 0 \tag{47}$$

а единственное тождественно ненулевое соотношение в (20) в данном случае имеет вид

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{12}^p = \frac{2\bar{h}\dot{\lambda}_1}{\sigma_{4s}^2}(\bar{\sigma}_{12} - H_4\bar{\varepsilon}_{12}^p)). \tag{48}$$

Выразим компоненту тензора пластических деформаций $\bar{\varepsilon}_{12}^p$ из уравнения (47) с учетом выражения (15) для $H_4 = 2^{n_4} H_4^0 \left|\bar{\varepsilon}_{12}^p\right|^{2n_4}$

$$\bar{\varepsilon}_{12}^p = \left(\frac{\bar{\sigma}_{12} - \sigma_{4s}}{2^{n_4} H_4^0}\right)^{\frac{1}{2n_4+1}}. \tag{49}$$

Тогда с учетом (46) получаем диаграмму деформирования КМ $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$ при продольном сдвиге

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{\bar{\sigma}_{12}}{2\bar{G}_{12}} + \left(\frac{\bar{\sigma}_{12} - \sigma_{4s}}{2^{n_4} H_4^0}\right)^{\frac{1}{2n_4+1}}. \tag{50}$$

Эта функция содержит четыре неизвестных константы: $\bar{G}_{12}$, n_4^0, H_4^0, σ_{4s}. Их поиск осуществляем путем сравнения с экспериментальной диаграммой деформирования $\bar{F}_{12}^{(э)}(\bar{\varepsilon}_{12})$, полученной в результате решения локальных задач МАО, возникающих при сдвиге в плоскости слоя композита.

Одноосное продольное растяжение-сжатие композита. Рассмотрим случай растяжения-сжатия параллелепипеда $\bar{V}$ вдоль оси $O\vec{e}_1$. При таком нагружении $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{11}^0 = \text{const}$, а остальные $\bar{\sigma}_{ij} = 0$. Тогда согласно соотношениям (23)–(27) имеем

$$\bar{\varepsilon}_{11} \neq 0,\ \bar{\varepsilon}_{22} \neq 0,\ \bar{\varepsilon}_{33} \neq 0,\quad \text{ост.}\quad \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = 0. \tag{51}$$

Аналогичные соотношения имеют место для упругих и пластических деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}^e$ и $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$

Из соотношений (28) получаем

$$\bar{\varepsilon}_{11}^e = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{E}_1},\ \bar{\varepsilon}_{22}^e = -\frac{\bar{\nu}_{12}\bar{\sigma}_{11}}{\bar{E}_1},\ \bar{\varepsilon}_{33}^e = -\frac{\bar{\nu}_{13}\bar{\sigma}_{11}}{\bar{E}_1}, \tag{52}$$

где $\bar{E}_1$, $\bar{\nu}_{12}$, $\bar{\nu}_{13}$ — эффективные упругие константы композита.

В системе (20) для данного случая нагружения имеется три тождественно ненулевых соотношения

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{11} = \bar{h}\psi_1 + 2\bar{h}\psi_4(\bar{\sigma}_{11} - H_4\bar{\varepsilon}^p_{11}),$$
$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{22} = \bar{h}\psi_1 - 2\bar{h}\psi_4 H_4\bar{\varepsilon}^p_{22}, \qquad (53)$$
$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{33} = \bar{h}\psi_2.$$

Функции ψ_1, согласно (22) и (28) для данного нагружения имеют вид

$$\psi_1 = \dot{\lambda}_1\left(\frac{\left|J^{(3)}_1\right| + J^{(3)}_1}{2\sigma^+_{1s}} + \frac{\left|J^{(3)}_1\right| - J^{(3)}_1}{2\sigma^-_{1s}}\right), \quad J^{(3)}_1 = (\bar{\sigma}_{11} - H^0_1(\bar{\varepsilon}^p_{11} + \bar{\varepsilon}^p_{22})^{n_1+1}),$$
$$\psi_2 = \dot{\lambda}_2\left(\frac{\left|J^{(3)}_2\right| + J^{(3)}_2}{2\sigma^+_{2s}} + \frac{\left|J^{(3)}_2\right| - J^{(3)}_2}{2\sigma^-_{2s}}\right), \quad J^{(3)}_2 = -H^0_2(\bar{\varepsilon}^p_{33})^{n_2+1}, \qquad (54)$$
$$\psi_4 = \frac{\dot{\lambda}_1}{2\sigma^2_{4s}},$$

а параметры упрочнения (15) в данном случае выражаются по формулам

$$H_1 = H^0_1(\bar{\varepsilon}^p_{11} + \bar{\varepsilon}^p_{22})^{n_1}, \; H_4 = H^0_4((\bar{\varepsilon}^p_{11})^2 + (\bar{\varepsilon}^p_{22})^2)^{n_4}. \qquad (55)$$

Из третьего уравнения системы (54) и выражения для функции ψ_2, зависящей только от $\bar{\varepsilon}^p_{33}$, следует, что $\bar{\varepsilon}^p_{33} \equiv 0$ для $\forall t \geq 0$. Тогда условие пластичности в системе (26), (27) для данного вида нагружения только одно, и оно имеет вид

$$\frac{J^{(3)}_4}{\sigma^2_{4s}} + \left(\frac{\left|J^{(3)}_1\right| + J^{(3)}_1}{2\sigma^+_{1s}}\right)^2 + \left(\frac{\left|J^{(3)}_1\right| - J^{(3)}_1}{2\sigma^-_{1s}}\right)^2 = 1, \qquad (56)$$

где

$$J^{(3)}_4 = (\bar{\sigma}_{11} - H_4\bar{\varepsilon}^p_{11})^2 + H_4(\bar{\varepsilon}^p_{22})^2. \qquad (57)$$

Рассмотрим условия нагружения в области растяжения, когда $J^{(3)}_1 \geq 0$. Тогда из (48) и (51) имеем систему трех уравнений (53) и (56)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p_{11} = \bar{h}\dot{\lambda}_1 U_1, \; \dot{\bar{\varepsilon}}^p_{22} = \bar{h}\dot{\lambda}_1 U_2,$$
$$\frac{1}{\sigma^{+2}_{1s}}(\bar{\sigma}_{11} - H_1(\bar{\varepsilon}^p_{11} + \bar{\varepsilon}^p_{22}))^2 + \frac{1}{\sigma^2_{4s}}((\bar{\sigma}_{11} - H_4\bar{\varepsilon}^p_{11})^2 + (H_4\bar{\varepsilon}^p_{11})^2) = 1, \qquad (58)$$

для определения функций $\bar{\varepsilon}_{11}^{p}$, $\bar{\varepsilon}_{22}^{p}$, $\dot{\lambda}_1$, здесь обозначены

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_{1s}^{+2}}(\bar{\sigma}_{11} - H_1^0(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p})^{n_1+1}) + \frac{1}{\sigma_{4s}^{2}}(\bar{\sigma}_{11} - H_4\bar{\varepsilon}_{11}^{p}),$$
$$U_2 = \frac{1}{\sigma_{1s}^{+2}}(\bar{\sigma}_{11} - H_1^0(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p})^{n_1+1}) - \frac{1}{\sigma_{4s}^{2}}H_4\bar{\varepsilon}_{11}^{p}. \quad (59)$$

Поделим второе уравнение системы (58) на первое, а третье уравнение в (58) продифференцируем по t. Тогда, после приведения подобных, получим систему двух дифференциальных уравнений относительно $\bar{\varepsilon}_{11}^{p}$, $\bar{\varepsilon}_{22}^{p}$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{22}^{p} = \Phi_1\dot{\bar{\varepsilon}}_{11}^{p},\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{11}^{p} = \Phi_2\dot{\bar{\sigma}}_{11}, \quad (60)$$

где обозначены функции

$$\Phi_1 = \frac{U_2}{U_1},\ \Phi_2 = \frac{U_3}{U_4},$$
$$U_3 = \left(\frac{1}{\sigma_{1s}^{+2}} + \frac{1}{\sigma_{4s}^{2}}\right)(\bar{\sigma}_{11} - H_1(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p})),$$
$$U_4 = \frac{1}{\sigma_{1s}^{+2}}(\bar{\sigma}_{11} - H_1(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p}))(\tilde{H}_1(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p}) + H_1(1+\Phi_1)) + \quad (61)$$
$$+ \frac{1}{\sigma_{4s}^{2}}(\bar{\sigma}_{11} - 2H_4\bar{\varepsilon}_{11}^{p})(\tilde{H}_4\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + H_4)),$$
$$\tilde{H}_1 = H_1^0 n_1(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p})^{n_1-1}(1+\Phi_1),$$
$$\tilde{H}_4 = 2H_4^0 n_4(\bar{\varepsilon}_{11}^{p2} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p2})^{n_4-1}(\bar{\varepsilon}_{11}^{p} + \bar{\varepsilon}_{22}^{p}\Phi_1).$$

Аналогичные соотношения имеют место для случая продольного одноосного сжатия вдоль оси $O\vec{e}_1$, когда $J_1^{(3)} \le 0$, в этом случае в формулах (61) следует заменить σ_{1s}^{+2} на σ_{1s}^{+2}. После численного решения системы (60) с учетом соотношений (52) находим диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_{11}^{\pm}(\bar{\varepsilon}_{11})$ композита при одноосном продольном растяжении-сжатии. В данных зависимостях присутствуют десять констант модели композита: $\bar{E}_1$, $\bar{\nu}_{12}$, $\bar{\nu}_{13}$, H_1^0, H_4^0, n_1^0, n_4^0, σ_{1s}^{+}, σ_{1s}^{-}, σ_{4s}. Упругие константы полагаем предварительно вычисленными указанным выше способом, также полагаем, что предварительно определены константы H_4^0, n_4^0, σ_{4s} из «экспериментов» на сдвиг в плоскости слоя. Поиск оставшихся констант H_1^0, n_1^0, σ_{1s}^{+}, σ_{1s}^{-}, осуществляем путем сравнения экспериментальных диаграмм

деформирования $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_{11}^{(э)\pm}(\bar{\varepsilon}_{11})$, полученных в результате решения локальных задач МАО, возникающих при продольном одноосном растяжении (сжатии) слоистого композита, с диаграммами деформирования $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_{11}^{\pm}(\bar{\varepsilon}_{11})$.

Алгоритм численного решения задачи поиска параметров модели. Для каждого из 4-х рассмотренных случаев нагружения Задачу нахождения неизвестных констант (33) микроструктурной модели сформулируем как задачу минимизации некоторой метрики $R\left(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^{(э)}\right)$, которая характеризует ошибку — отклонение теоретических диаграмм деформирования $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{kl})$ при всех видах нагружения для конкретного набора упругих констант от соответствующих «экспериментальных» диаграмм деформирования $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}^{(э)}(\bar{\varepsilon}_{kl})$, полученных с помощью асимптотически точных определяющих соотношений (1)–(8) слоистого КМ при тех же самых четырех видах нагружения:

$$\underset{\substack{l_1,...,l_5,\ H_1^0,...,\ H_4^0,\\ n_1,...,n_4^0,\ \sigma_{1s}^{\pm},\sigma_{2s}^{\pm},\ \sigma_{3s}\,\sigma_{4s},}}{R\left(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^{(э)}\right)} \to \min. \qquad (62)$$

Используем метрику для вычисления ошибки:

$$R\left(\bar{\sigma},\ \bar{\sigma}^{(э)}\right) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta} \left| 1 - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t_i))}{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(э)}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t_i))} \right| \right)^{0,5}, \qquad (63)$$

с помощью которой можно минимизировать среднеквадратичное отклонение экспериментальной и теоретической кривых в N точках, здесь $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t_i)$ — деформации в моменты времени t_1, $i = 1,..., N$. Для решения задач минимизации (63) использовался метод Хука-Дживса.

Пример решения задач идентификации констант микроструктурной модели слоистого упруго-пластического композита. В качестве примера был рассмотрен слоистый КМ, ЯП которого состояла из двух слоев с относительными толщинами $h_s = 0,5$ и $h_A = 1 - h_S$. Слои полагались изотропными, характеристики одного из слоев ЯП соответствовали типичному алюминиевому сплаву, а другого слоя – высокопрочной стали (условное наименование этого композита Al/S). Компоненты тензора модулей упругости слоев C_{ijkl} в соотношениях (5) имели стандартный вид [24] для изотропных сред

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right); \qquad (64)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{65}$$

где λ, μ — константы Ламе, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона [24]. Константы, характеризующие пластические свойства слоев, согласно модели (1)–(8), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Константы, в упруго-пластической модели (1)–(8) слоев композита Al/S

Материал	E, ГПа	ν	H_0, ГПа	α	n	σ_S, ГПа
Сталь	200	0,31	100	0,7	0,9	0,6400
Алюминий	70	0,3	40	0,5	0,7	0,0625

С помощью разработанного метода были рассчитаны и построены осредненные диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{ij} = F_{ij}\left(\bar{\varepsilon}_{mn}\right)$ слоистого композита при одноосных нагружениях в разных направлениях для растяжения и сжатия. Также при помощи задачи минимизации функционала (62) были найдены константы (33).

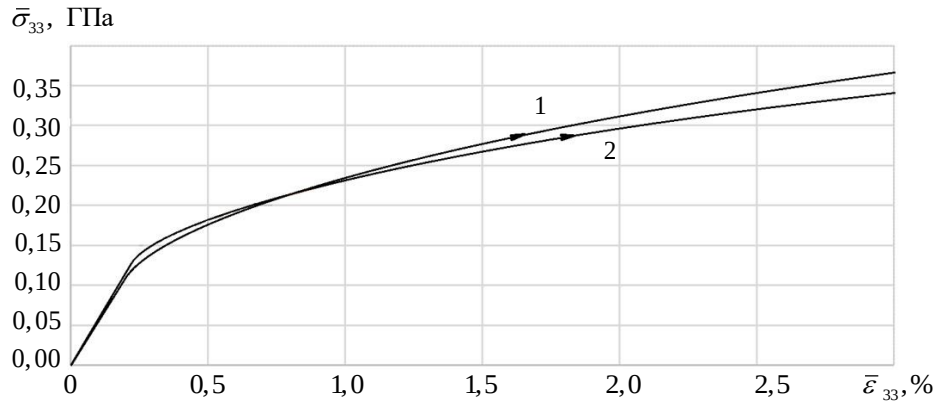
Экспериментальные $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_{33}^{(э)\pm}(\bar{\varepsilon}_{33})$ и расчётные $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_{33}^{\pm}(\bar{\varepsilon}_{33})$ диаграммы деформирования при одноосном нагружении в поперечном направлении $O\vec{e}_3$ представлены на рис. 1, значения для вычисленных оптимальных констант E_3, H_2^0, n_2^0, σ_{2s}^+, σ_{2s}^- приведены в табл. 2.

На рис. 2 приведены диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{13}^{(э)}(\bar{\varepsilon}_{13})$ и расчётные $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$ при межслойном сдвиге, значения для их констант $\bar{G}_{13}$, n_3^0, H_3^0, σ_{3s} приведены в табл. 3.

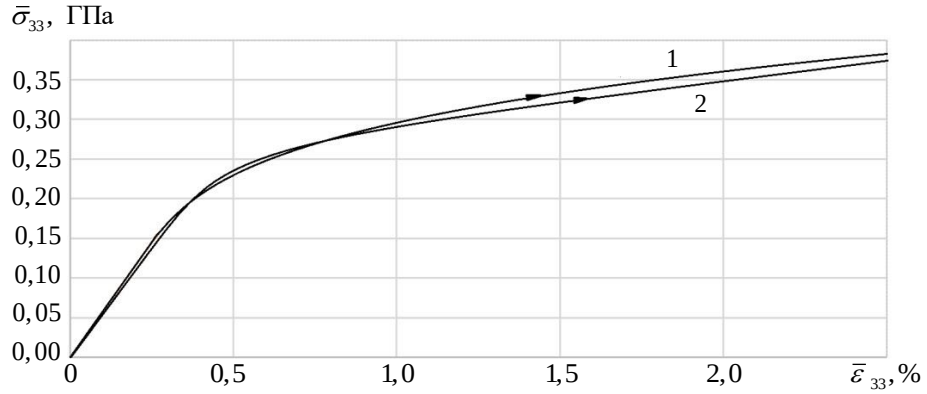
На рис. 3 приведены диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{12}^{(э)}(\bar{\varepsilon}_{12})$ и расчётные $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$ диаграммы деформирования при сдвиге в плоскости слоя $\left(\bar{\sigma}_{12} \sim \bar{\varepsilon}_{12}\right)$ а значения вычисленных констант модели $\bar{G}_{12}$, n_4^0, H_4^0, σ_{4s} — в табл. 4.

На рис. 4 приведены экспериментальные $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_{11}^{(э)\pm}(\bar{\varepsilon}_{11})$ и расчётные $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_{11}^{\pm}(\bar{\varepsilon}_{11})$ диаграммы деформирования композита при продольном растяжении — сжатии, а значения оптимальных констант $\bar{E}_1$, H_1^0, H_2^0, n_1^0, n_2^0, σ_{1s}^+, σ_{1s}^-, σ_{2s}^+, σ_{2s}^-, σ_{4s} — приведены в табл. 5.

Максимальная относительная погрешность для полученных диаграмм составляет 11%, что говорит об удовлетворительном качестве модели эффективной трансверсально-изотропной упруго-пластической среды.



а



б

Рис. 1. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$ композита при одноосном нагружении в поперечном направлении:
1 — экспериментальные; 2 — расчетные,
а — растяжение; *б* — сжатие

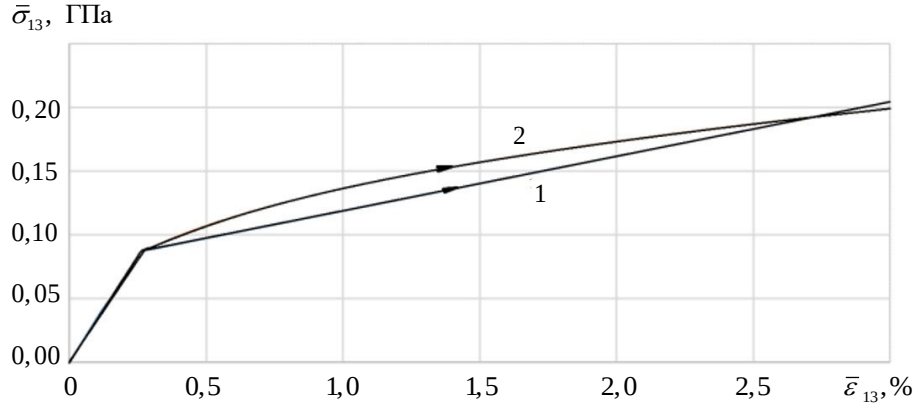


Рис. 2. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{13} \sim \bar{\varepsilon}_{13}$ композита при сдвиге в плоскости слоя:
1 — экспериментальные; 2 — расчетные

Таблица 2

Значения констант микроструктурной модели для композита Al/S при одноосном растяжении- сжатии в поперечном направлении

Константы	E, ГПа	H_2^0, ГПа	$-n_2^0$	σ_{2s}^+, ГПа	σ_{2s}^-, ГПа
Значения	75	0,65	0,71	0,12	0,15

Таблица 3

Значения констант микроструктурной модели для композита Al/S при межслойном сдвиге

Константы	$\bar{G}_{13}$, ГПа	H_3^0, ГПа	$-n_3^0$	σ_{3s}, ГПа
Значения	20	0,60	0,67	0,09

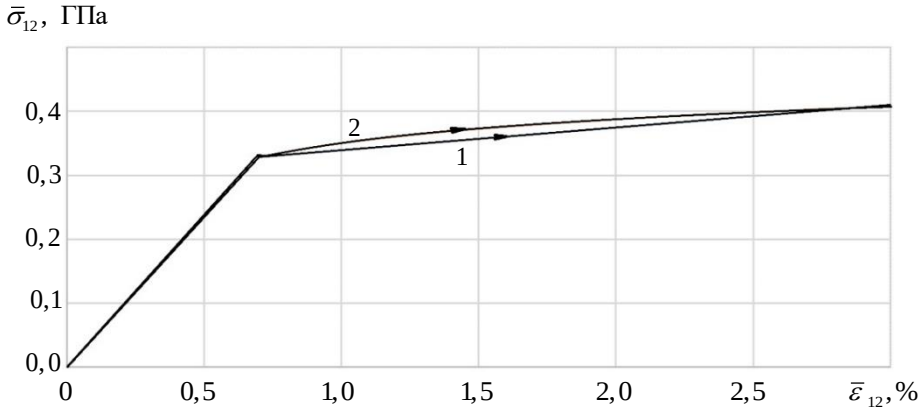


Рис. 3. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{12} \sim \bar{\varepsilon}_{12}$ композита при сдвиге в плоскости слоя:
1 — экспериментальные; 2 — расчетные

Таблица 4

Значения констант микроструктурной модели для композита Al/S при сдвиге в плоскости слоя

Константы	$\bar{G}_{12}$, ГПа	H_4^0, ГПа	$-n_4^0$	σ_{4s}, ГПа
Значения	25	0,62	0,55	0,25

Таблица 5

Значения констант микроструктурной модели для композита Al/S при одноосном растяжении и сжатии в продольном направлении

Константы	E, ГПа	H_1^0, ГПа	$-n_1^0$	σ_{1s}^+, ГПа	σ_{1s}^-, ГПа
Значения	130	0,63	0,2	0,2	0,18

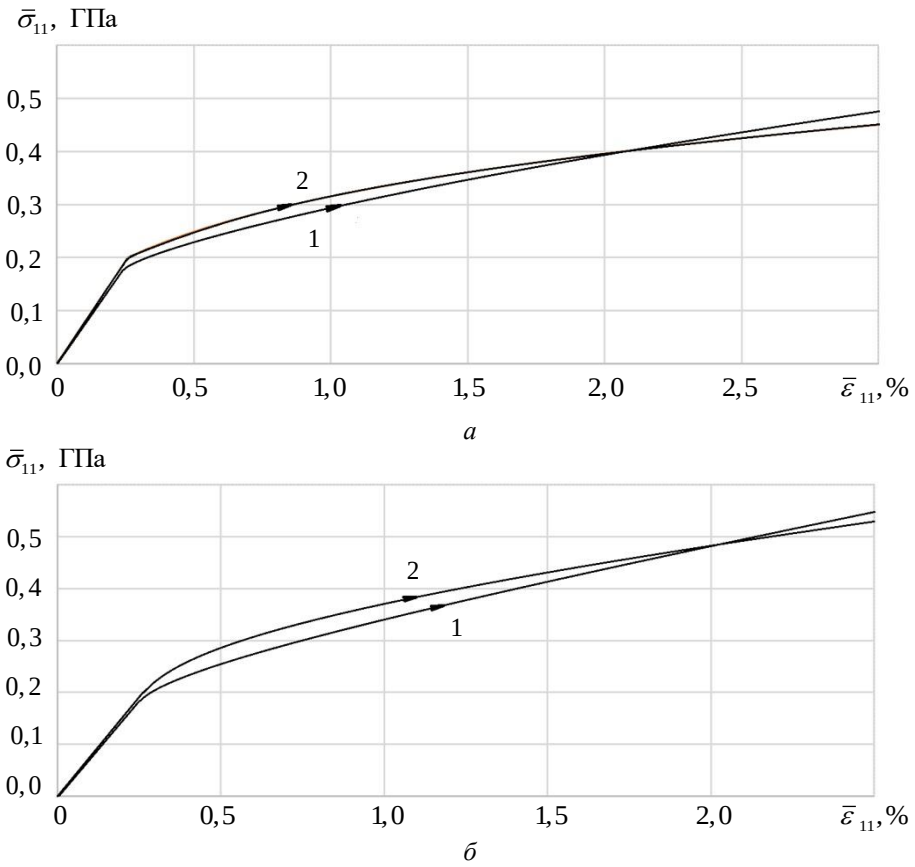


Рис. 4. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{11} \sim \bar{\varepsilon}_{11}$ композита при одноосном нагружении в поперечном направлении:
1 — экспериментальные; 2 — расчетные,
а — растяжение; *б* — сжатие

Выводы. Предложена микроструктурная модель трансверсально-изотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. Константы этой модели вычисляются на основе сравнения базовых диаграмм деформирования, полученных на основе модели и на основе метода асимптотического осреднения (с помощью численного эксперимента).

Предложен метод идентификации констант микроструктурной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического слоистого композита, путем решения задачи минимизации функционала среднеквадратического отклонения экспериментальных диаграмм деформирования, полученных с помощью численного решения задач на ЯП, и теоретических диаграмм деформирования, полученных путем аппроксимации.

Приведен пример решения задачи идентификации констант модели двухслойного упруго-пластического слоистого композита, который показал эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kvale Joki R., Grytten F., Osnes H. Coupling of plasticity and damage in glass fibre reinforced polymer composites. *EPJ Web of Conferences*, 2012, vol. 26, art no. 04028. DOI: 10.1051/epjconf/20122604028

[2] Yi G.–S. Anisotropic constitutive model for predictive analysis of composite laminates. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8, pp. 189– 193.

[3] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.

[4] Ковтунов А.И., Мямин С.В., Семистенова Т.В. *Слоистые композиционные материалы: электронное учебное пособие.* Тольятти, Изд-во ТГУ, 2017, 75 с.

[5] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[6] Былим А.В., Сараев Л.А., Сахабиев В.А. Особенности упругопластического деформирования двухкомпонентных композитов. *Вестник СамГУ*, 1998, № 4, с. 113–119.

[7] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.

[8] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[9] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[10] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[11] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[12] Санчес–Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[13] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, №2, с. 95–108.

[15] Эглит М.Э. Об усредненном описании процессов в периодических упругопластических средах. *Механика композитных материалов*, 1984, № 5, с. 825–831.

[16] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[17] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе

микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2, с. 3–22.

[19] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[20] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

[21] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

[22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых периодических композитов на основе теории пластического течения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 15–37.

[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[24] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 15.06.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 47–70.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Черкасова Мария Сергеевна — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: cerkasovam220@gmail.com

Димитриенко Александр Юрьевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Microstructural model anisotropic flow theory for elastic-plastic layered composites

© Yu.I. Dimitrienko, M.S. Cherkasova, A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A microstructural model of layered elastic-plastic composites based on the anisotropic flow theory is proposed. The model represents the effective constitutive relations of the transversally isotropic theory of plastic flow, in which the model constants are determined not experimentally, but on the basis of approximations of the deformation curves of composites obtained by direct numerical solution of problems on the periodicity cell for basic loading trajectories, which arise in the method of asymptotic averaging. The problem of identifying the constants of this composite model is formulated; for the numerical solution of this problem, methods of optimizing the error functional are used. The results of numerical simulation by the proposed method for layered elastic-plastic composites are presented, which showed good accuracy of approximation of numerical strain diagrams.

***Keywords**: microstructural model, layered composites, plastic flow theory, asymptotic averaging method, deformation diagrams*

REFERENCES

[1] Kvale Joki R., Grytten F., Osnes H. Coupling of plasticity and damage in glass fibre reinforced polymer composites. *EPJ Web of Conferences*, 2012, vol. 26, art no. 04028. DOI: 10.1051/epjconf/20122604028

[2] Yi G.–S. Anisotropic constitutive model for predictive analysis of composite laminates. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8, pp. 189– 193.

[3] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.

[4] Kovtunov A.I., Mamin S.V., Semistenova T.V. *Sloistyye kompozitsionnyye materialy: elektronnoye uchebnoye posobiye.* [Layered composite materials: electronic textbook]. Togliatti, TSU Publ., 2017, 75 p.

[5] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.

[6] Bilim A.V., Saraev L.A., Sahabiev V.A.The persicularities of two–component composite materials elastic–plastic deformation. *Vestnik of Samara University*, 1998, no. 4, pp. 113–119.

[7] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[8] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[9] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[10] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[11] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[12] Sanches–Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[13] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[14] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. Finite Element Method of Calculation of Efficient Characteristics of Composites with Periodical Structure. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.
[15] Églit M.E. An averaged description of processes in periodic elasticoplastic media. *Mechanics of Composite Materials*, 1985, vol. 20, iss. 5, pp.568 –574.
[16] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.
[17] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I. Modeling the elastic–plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 3–22.
[19] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of elastic–plastic composites with an allowance for fault probability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, № 2, pp. 3–23.
[20] Dimitrienko Y.I., Sborschikov S.V, Yurin Y.V. Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, № 4, pp. 3–26.
[21] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Dimitrienko A.Yu., Yurin Yu.V. Modeling microstructural model of the plasticity defor-mation theory for quasi-isotropic composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 17–44.
[22] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Cherkasova M.S. Modeling the deformation of layered periodic composites based on the theory of plastic flow. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 2, pp. 15–37.
[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.
[24] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Cherkasova M.S., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: cerkasovam220@gmail.com

Dimitrienko A.Yu., Graduate student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru