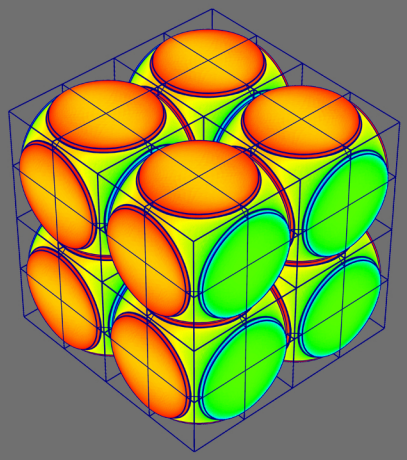
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. «Смешанная» модель противоборства многочисленных группировок при линейных зависимостях от времени эффективных скоростей воздействий единицами сторон. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 2, с. 104–115

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/283/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 13:08:41

УДК 519.8 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-2-102113

«Смешанная» модель противоборства многочисленных группировок при линейных зависимостях от времени эффективных скоростей воздействий единицами сторон

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

С использованием метода динамики средних разработана «смешанная» модель противоборства многочисленных группировок при линейных зависимостях от времени эффективных скоростей нанесения воздействий единицами сторон. Построен алгоритм, позволяющий исследовать ход протекания процесса и вычислить его основные показатели. Установлено, что использование моделей с постоянными эффективными скоростями нанесения воздействий во многих случаях приводит к значительным ошибкам при вычислении основных показателей процесса. Исследовано влияние упреждающего воздействия одной из противоборствующих сторон на ход его протекания и окончательный итог.

Ключевые слова: *модель противоборства многочисленных группировок, эффективная скорость нанесения воздействия, упреждающее воздействие, параметр начального соотношения сил*

Введение. В различных областях социально-экономических, организационно-технических и виртуальных систем возникают задачи исследования и моделирования конфликтов противоборствующих сторон, систем [1-4]. Значительный интерес представляет задача моделирования конфликта противоборствующих сторон, представляющих собой многочисленные группировки из отдельных единиц и обменивающихся воздействиями. Для исследования возможных сценариев такого конфликта необходима разработка модели именно двухсторонних воздействий, так как она позволяет более детально и достоверно учесть большее количество факторов, влияющих на итоги конфликта, чем модели без учёта реакции противостоящей стороны [5 –6].

Широко распространённым способом отображения процесса взаимных воздействий многочисленных группировок является метод динамики средних [7-9]. Построение моделей этого типа основано на следующем допущении. Согласно закону больших чисел, в каждый момент времени противоборства количества сохранившихся единиц обеих противостоящих сторон близки к своим средним численностям (математическим ожиданиям). Это даёт возможность не рассматривать подробности, связанные со случайным состоянием каждой участвующей в процессе единицы и рассматривать процесс как детерминированный [10-12]. При этом допущении все показатели не будут

случайными величинами и заменятся своими математическими ожиданиями.

Последовательность воздействий, производимых каждой участвующей в процессе единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [12]. Применяется также приём, заключающийся в переходе от потока воздействий к потоку успешных воздействий, который также полагается пуассоновским [5]. «Успешным» назовём воздействие, выводящее из строя единицу противника [4].

Рассмотрим противоборство двух группировок X и Y. Сторона X в начале действия имеет m однотипных единиц. Сторона Y имеет в начале n однотипных единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X. Считаем, что каждая единица стороны X может наносить воздействие по любой единице противника, и наоборот, и что одним воздействием нельзя вывести из строя более одной единицы противника. Также полагаем, что в любой момент времени противостояния суммарная мощь каждой стороны пропорциональна не случайному числу её сохранившихся единиц, а его среднему значению (математическому ожиданию).

Введём следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности вывода из строя единицы противника одним воздействием единицы сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y — практические скорости нанесения воздействий единицами сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ назовём эффективными скоростями нанесения воздействий единицами сторон.

Принятие эффективных скоростей нанесения воздействий в течение боя постоянными далеко не всегда приемлемо. При отражении воздействия противника происходит сближение противоборствующих сторон, что приводит к возрастанию точности воздействий и увеличению практических скоростей их нанесения единицами противоборствующих сторон. В ряде случаев хорошей аппроксимацией эффективных скоростей нанесения воздействий являются линейные функции времени, то есть

$$\begin{cases} v = k_x\left(1 + a_x t\right), \\ u = k_y\left(1 + a_y t\right). \end{cases}$$

Также отметим, что хорошая маскировка единиц обороняющейся стороны X не позволяет сопернику в течение достаточно долгого времени иметь достоверную информацию об их состоянии (выведены из строя или нет) и заставляет его наносить равномерные воздействия как по уцелевшим, так и по выведенным из строя единицам. А сторона X такую информацию имеет и наносит воздействие только по уцелевшим единицам соперника.

В [13] исследована аналогичная «смешанная» модель динамики средних при постоянных эффективных скоростях нанесения воздействий единицами сторон, в [14] — при их экспоненциальных зависимостях от времени действия.

Исследуемый в настоящей статье процесс действий при одновременном начале нанесения взаимных воздействий обеими сторонами опишется системой уравнений

$$\begin{cases} x' = -k_y\left(1+a_y t\right)\dfrac{xy}{m}, \\ y' = -k_x\left(1+a_x t\right)x, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = m, \\ y(0) = n, \end{cases} \tag{2}$$

где m, n — численности сторон X и Y в начале противодействия, x, y — математические ожидания численностей сторон X и Y в его процессе, x', y' — их производные по времени.

Если в течение времени t_c сторона X наносит воздействие сопернику, не испытывая ответного противодействия (то есть наносит упреждающее воздействие), то при $t \in [0; t_c]$ процесс опишется системой уравнений

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = -k_x\left(1+a_x t\right)m, \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c начала нанесения ответного воздействия стороной Y имеем:

$$\begin{cases} x(t_c) = m, \\ y(t_c) = n\left(1-\dfrac{\bar{t}_c}{æ}\right), \end{cases} \tag{4}$$

где $æ = \dfrac{n}{m}\sqrt{\dfrac{k_y}{k_x}}$ — параметр начального соотношения сил,

$$\bar{t}_c = \sqrt{k_x k_y}\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)$$

— приведённое время нанесения стороной X упреждающего воздействия (при $a_x = 0$, $\bar{t}_c = \sqrt{k_x k_y}\, t_c$).

Дальнейшее протекание процесса опишется системой уравнений (1) с начальными условиями (4).

Если же в течение времени t_c упреждающий воздействие наносит сторона Y, то при $t \in [0; t_c]$ процесс опишется системой уравнений

$$\begin{cases} x' = -k_y \left(1 + a_y t\right) \dfrac{nx}{m}, \\ y' = 0, \end{cases} \tag{5}$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c ответного воздействия стороной X имеем

$$\begin{cases} x\left(t_c\right) = me^{-\text{æ}\bar{t}_c}, \\ y\left(t_c\right) = n, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\bar{t}_c = \sqrt{k_x k_y}\left(t_c + \frac{a_y t_c^2}{2}\right)$$

— приведённое время нанесения стороной Y упреждающего воздействия (при $a_y = 0$, $\bar{t}_c = \sqrt{k_x k_y}\, t_c$). Дальнейшее протекание процесса опишется системой уравнений (1) с начальными условиями (6).

Авторами разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать ход протекания противоборства и вычислить его основные показатели. В первую очередь, к ним относятся математические ожидания численностей группировок в каждый момент этого противоборства и при его окончании. Полагаем, что процесс ведётся до полного вывода из строя единиц хотя бы одной из противоборствующих сторон.

Анализ результатов расчётов. Введём следующие обозначения:

$$\mu = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x + a_y},$$

$$\nu = \frac{a_y}{a_x + a_y}.$$

Параметр μ характеризует изменение интенсивности протекания процесса. Чем больше μ, тем медленнее она возрастает. В реальных условиях $\mu \geq 2$. Параметр ν $(0 \leq \nu \leq 1)$ характеризует относительную скорость изменения эффективных скоростей нанесения воздействий единицами одной стороны относительно другой в процессе противоборства. При $\nu = 1$ величина $a_x = 0$, то есть эффективные скорости

нанесения воздействий единицами стороны X в течение всего процесса постоянны. При $\nu = 0$ постоянны эффективные скорости нанесения воздействий единицами стороны Y, то есть $a_y = 0$. При $\nu = 0,5$ имеем $a_y = a_x$.

Граничным значением параметра начального соотношения сил является то его значение, при котором к концу противоборства будут полностью выведены из строя обе противоборствующие группировки. Значения $æ_0$ при различных μ и ν приведены на рис. 1. Красные линии соответствуют значению $\mu = 2$, синие — $\mu = 4$. Верхние линии соответствуют упреждающему воздействию стороны X при $t_c = 0,5$, средние — одновременному воздействию обеими сторонами, нижние — упреждающему воздействию стороны Y при $t_c = 0,5$.

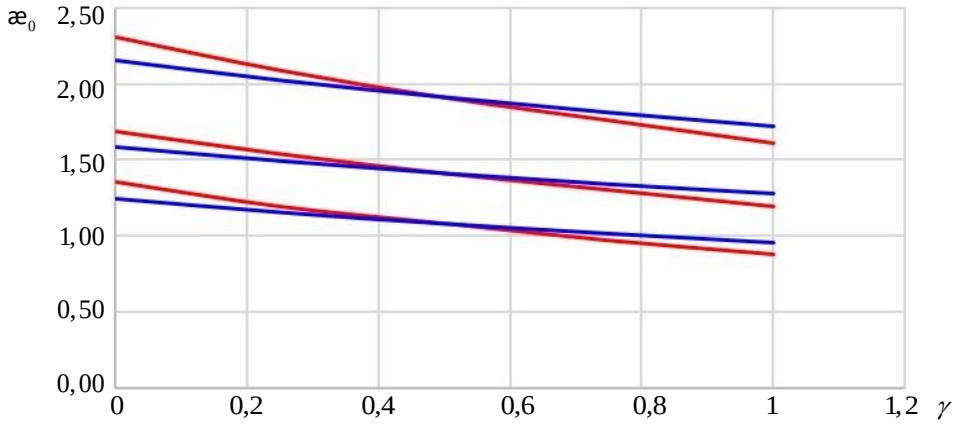


Рис. 1. Граничные значения параметра начального соотношения сил $æ_0$ при различных значениях μ

Для модели данного типа с постоянными эффективными скоростями нанесения воздействий всеми единицами параметр начального соотношения сил имеет граничное значение $æ_0 = \sqrt{2}$ при одновременном взаимном воздействии обеих сторон и $æ_0 = \sqrt{2} + \bar{t}_c$ при упреждающем воздействии стороны он X, определяется как решение уравнения

$$æe^{\frac{æ\bar{t}_c}{2}} = \sqrt{2}$$

при упреждающем воздействии стороны Y [15].

Результаты расчётов показали, что использование моделей противоборства с постоянными эффективными скоростями нанесения воздействий всеми единицами может во многих случаях привести к

грубым ошибкам в описании процесса и вычислении его основных показателей.

К ним в первую очередь относятся относительные количества сохранившихся к окончанию действий единиц сторон, то есть

$$m_x = \frac{x_k}{m},\ m_y = \frac{y_k}{n},$$

где x_k, y_k — математические ожидания сохранившихся к окончанию процесса единиц сторон X и Y соответственно.

Для соотношения «100:200» при

$$k_x = 0,01;\ k_y = 0,0064;$$
$$a_x = 0,0036;\ a_y = 0,0004$$

(при этом $æ = 1,6$; $\mu = 2$; $\nu = 0,1$) при одновременном нанесении воздействий обеими сторонами получаем $m_x = 0,018$; $m_y = 0,000$. Если же эффективные скорости нанесения воздействий единицами сторон считать в течение всего противостояния постоянными и равными их значениям в момент начала, имеем $m_x = 0,000$; $m_y = 0,468$. Если их принять равными их значениям в середине процесса, получаем $m_x = 0,259$; $m_y = 0,000$ (при этом $\nu = 0,019$; $u = 0,007$; $æ = 1,217$).

Для соотношения «150:150» при

$$k_x = 0,025;\ k_y = 0,036;$$
$$a_x = 0,0015;\ a_y = 0,0135$$

(при этом $æ = 1,2$; $\mu = 2$; $\nu = 0,9$) при одновременном нанесении воздействие обеими сторонами $m_x = 0,098$; $m_y = 0,000$. Если величины ν и υ считать постоянными и равными их значениям в начале процесса, то получим $m_x = 0,028$; $m_y = 0,000$. Если эффективные скорости нанесения воздействий единицами сторон считать равными их значениям в середине процесса, то есть $\nu = 0,0295$, $u = 0,0943$ (при этом $æ = 1,788$), то имеем $x_k = 0,000$, $y_k = 0,612$.

При упреждающем воздействии одной из группировок ошибки модели с постоянными эффективными скоростями нанесения воздействий единицами при вычислении основных показателей боя, как правило, несколько увеличиваются. Однако при достаточно близких значениях a_x и a_y ($0,45 < \gamma < 0,55$), а также при существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон погрешности при вычислении m_x и m_y незначительны.

Упреждающее воздействие одной из группировок оказывает значительное влияние на ход противоборства и его основные показатели.

Для соотношения «100:100» при

$$k_x = 0,04;\ k_y = 0,09;$$
$$a_x = a_y = 0,015$$

(при этом $æ = 1,5$; $\mu = 2$; $\nu = 0,5$) при одновременном нанесении воздействие обеими сторонами победу одержит сторона Y ($m_x = 0,000$; $m_y = 0,333$), а при упреждающем воздействие стороны X при $\bar{t}_c = 0,5$ победу одержит она ($m_x = 0,500$; $m_y = 0,000$).

А для варианта «200:100» при

$$k_x = 0,02;\ k_y = 0,08;$$
$$a_x = 0,001;\ a_y = 0,009$$

(при этом $\mu = 4$; $\nu = 0,9$; $æ = 1$) при одновременном вступлении в процесс обеих группировок $m_x = 0,458$; $m_y = 0,000$ и победа будет одержана стороной X, тогда как при упреждающем воздействии стороны Y при $\bar{t}_c = 0,5$ победу одержит она, при этом $m_x = 0,000$; $m_y = 0,230$.

Результаты расчётов показали, что наличие информации о состоянии единиц противостоящей стороны при отсутствии у неё такой информации в совокупности с упреждающим воздействием может до двух раз увеличить возможности группировки. Упреждающее воздействие группировки, не имеющей информации о состоянии единиц другой стороны, может полностью компенсировать это отсутствие.

На рис. 2–4 показаны значения величин m_x (красные линии) и m_y (синие линии) в зависимости от параметра начального соотношения сил æ для значения $\mu = 2$, то есть когда параметр μ наиболее существенно влияет на ход противоборства и его основные показатели. Рис. 2 соответствует одновременному воздействию обеих сторон, рис. 3 — упреждающему воздействию стороны X, рис. 4 — упреждающему воздействию стороны Y. На рис. 3 и 4 приведённое время упреждающего воздействию принято равным $\bar{t}_c = 0,5$. Это соответствует проведению единицами стороны, наносящей упреждающий воздействие по одному — два воздействия, не испытывая ответного противодействия противника, так как в реальных условиях после проведения одного — двух воздействий единица, как правило, будет обнаружена и ей будет нанесён ответный воздействие.

Правые линии на рис. 2–4 соответствуют значению $\gamma = 0$ ($a_y = 0$), левые — значению $\gamma = 1$ ($a_x = 0$), то есть тем значениям γ, которые наиболее сильно влияют на ход процесса и его основные показатели.

Средние линии на рис. 2–4 соответствуют значению $\gamma = 0,5$ ($a_x = a_y$), то есть случаю, когда рост эффективных скоростей нанесения воздействий единицами у единиц сторон X и Y одинаковый.

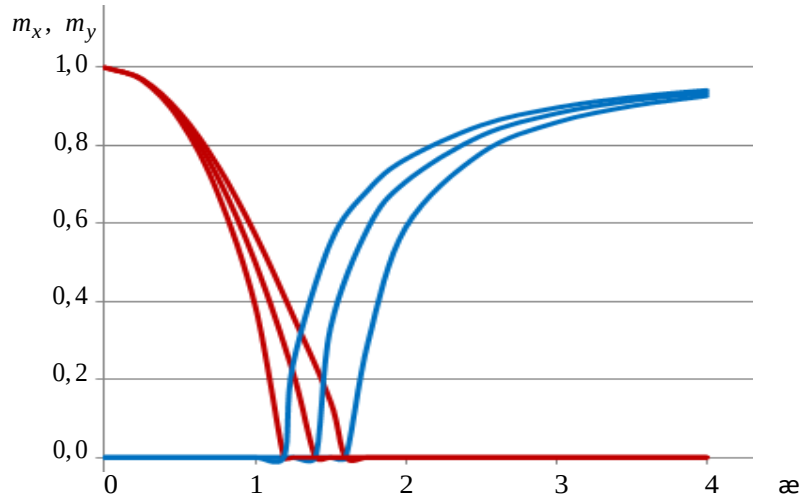


Рис. 2. Значения m_x и m_y при одновременном нанесении воздействий обеими сторонами ($\mu = 2$)

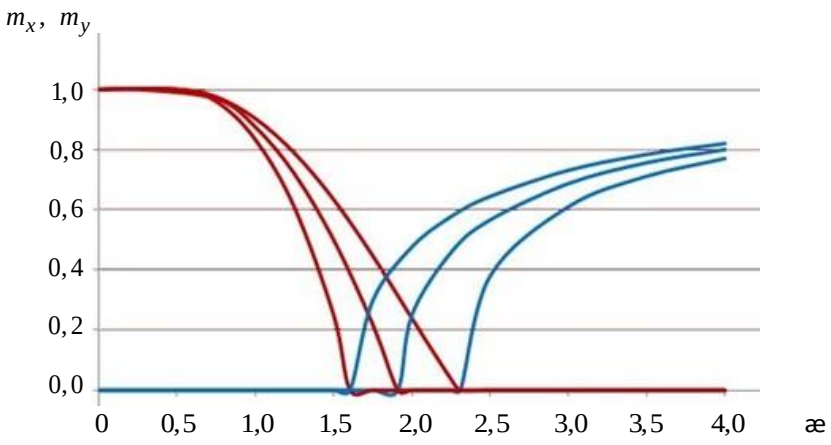


Рис. 3. Значения m_x и m_y при упреждающем воздействии стороны X ($\mu = 2$; $\overline{t_c} = 0,5$)

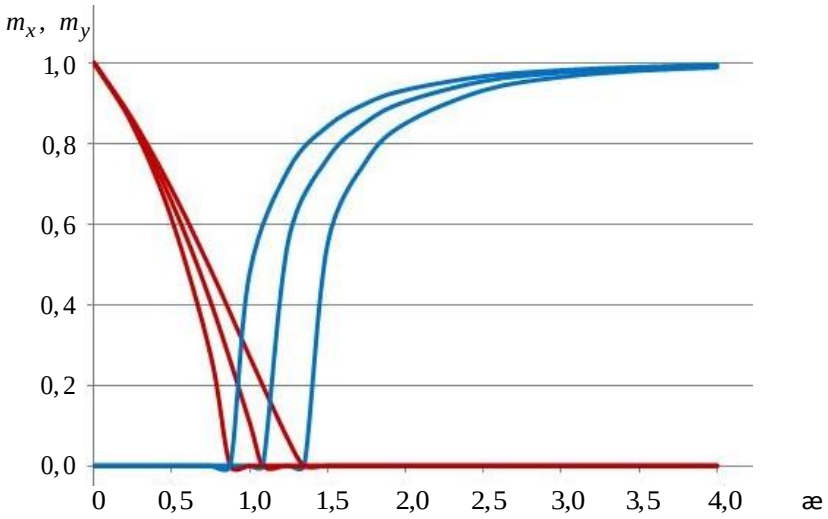


Рис. 4. Значения m_x и m_y при упреждающем воздействии стороны Y ($\mu = 2$; $\overline{t_c} = 0,5$)

Выводы. Результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы.

1. На основе метода динамики средних разработана «смешанная» модель двухстороннего противоборства многочисленных группировок с линейными зависимостями эффективных скоростей нанесения воздействий от времени воздействия.

2. Установлено, что использование моделей противоборства с постоянными эффективными скоростями нанесения воздействий во многих случаях приводит к значительным ошибкам в описании процесса и вычислении его основных показателей.

3. Показано, что упреждающее воздействие одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на исход и основные показатели противостояния близких по возможностям сторон. При значительном превосходстве одной из противоборствующих сторон упреждающее воздействие оказывает влияние только на потери победившей стороны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[4] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле.* Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[5] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2007, 208 с.
[6] Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота. *Программные продукты и системы*, 2006, № 1, с. 23–27.
[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.
[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Duxbury Press, 2001, 128 p.
[9] Chen X, Jing Y, Li C, Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21, no. 1, pp. 94–105.
[10] Lanchester F. *Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.
[11] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.
[12] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.
[13] Пашков Н.Ю., Строгалёв В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника*, 2000, № 9–10, с. 19–21.
[14] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. «Смешанная» модель двухсторонних боевых действий при переменных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон. *Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2019, № 3, с. 71–76.
[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели динамики средних двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *LAP LAMBERT Academie Publishing*, 2014, 72 с.
[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боя двух однотипных боевых единиц против двух разнотипных. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 2, с. 107–116.

Статья поступила в редакцию 16.02.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Чуев В.Ю., Дубограй И.В. «Смешанная» модель противоборства многочисленных группировок при линейных зависимостях от времени эффективных скоростей воздействий единицами сторон. *Математическое моделирование и численные методы,* 2022, № 2, с. 104–115.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

A "mixed" model of the confrontation of numerous groups with linear dependencies on the time of the effective speed of strikes by units of the parties

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubograi

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Using the method of dynamics of averages, a "mixed" model of numerous groupings confrontation has been developed with linear dependencies on the time of effective speeds of striking by units of the parties. An algorithm is constructed that allows to investigate the course of the process and calculate its main indicators. It is established that the use of confrontation models with constant effective speed of strikes in many cases leads to significant errors in the calculation of the main indicators of the process. The influence of a preemptive strike by one of the opposing sides on the course of the progress and the final outcome are investigated.

***Keywords**: model of confrontation of numerous groups, effective strike rate, preemptive strike, parameter of the initial balance of forces*

REFERENCES

[1] Alexandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. Mathematical and computer modeling — the basis of modern engineering sciences. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[3] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deistviy* [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[4] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military arts]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[5] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, URSS Publ., 2007, 208 p.

[6] Ilyin V. A. Simulation of the fleet fighting forces [Modelirovanie boevyh dejstvij sil flota]. *Software products and systems*, 2006, no.1, pp. 23–27.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Duxbury Press, 2001, 128 p.

[9] Chen X, Jing Y, Li C, Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21, no. 1, pp. 94–105.

[10] Lanchester F. *Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[11] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[12] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, KnoRus Publ., 2016, 658 p.

[13] Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. Smeshannaya model' dinamiki srednih dlya mnogochislennyh gruppirovok [A mixed model of the dynamics of averages for multiple groupings]. *Oboronnaya tekhnika* [Defense Technology], 2000, no. 9–10, pp. 19–21.

[14] Dubogray I.V., Ryabtsev R.A., Chuev V.Yu. "Mixed" model of bilateral fighting of the variable effective firing rate of fighting units of sides. *Izvestiya Rossijskoj Akademii Raketnyh i Artillerijskih Nauk* [Proceedings of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences], 2019, no. 3, pp. 71–76.

[15] Chuev V.Yu., Dubograi I.V. *Modeli dinamiki srednih dvustoronnih boevyh dejstvij mnogochislennyh gruppirovok* [Models of dynamics of average bilateral military operations of numerous groups]. *LAP LAMBERT Academie Publishing*, 2014, 72 p.

[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Probabilistic model of the battle of two similar combat units against two different types. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2020, no. 2, pp. 107–116.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru