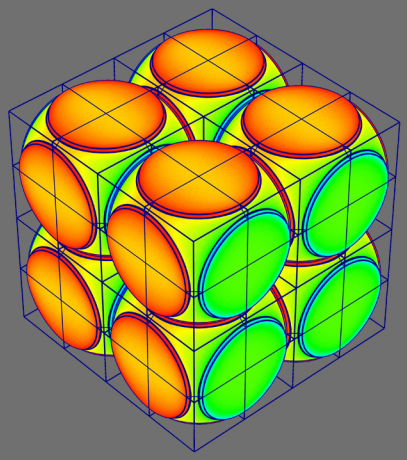
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Котенев В.П., Тонких Е.Г. Новая зависимость профиля энтальпии в модели пограничного слоя. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 2, с. 80–89

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/281/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 20:41:21

УДК 533.6.011.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-2-7887

Новая зависимость для профиля энтальпии в модели пограничного слоя

© В.П. Котенев[1,2], Е.Г. Тонких[1,2]

[1]АО «ВПК «НПО машиностроения», Реутов, 143966, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предлагается новая аналитическая зависимость для профиля энтальпии в пограничном слое, использование которой позволяет быстро и эффективно получить распределение теплового потока по поверхности затупленных тел.

Ключевые слова: *затупленное тело, тепловой поток, пограничный слой*

Введение. Общее решение уравнений пограничного слоя при произвольном распределении давления на исследуемом теле является сложной задачей [1-11].

Если принять, что число Прандтля равно единице, то, как известно, независимо от распределения давления, существует интеграл, отражающий тот факт, что полная энтальпия в пограничном слое постоянна (интеграл Бернулли) [1]. В этом случае тепловой поток на стенке равен нулю (так называемо изолированное тело). Если дополнительно принять, что давление не меняется в продольном направлении (безградиентное течение), то полную энтальпию потока можно представить в виде линейной функции от скорости (интеграл Крокко) [2]. В этом случае для определения теплового потока к стенке необходимо знать профиль скорости в пограничном слое.

В статье предлагается новая зависимость энтальпии от скорости и ее производных, удовлетворяющая условиям на стенке и границе пограничного слоя. При этом число Прандтля не обязательно равно единице, а давление может быть переменным в продольном направлении. Основанный на этом метод дает хорошую точность в определении теплового потока на затупленных телах, о чем свидетельствует сравнение с результатами расчетов в рамках уравнений Навье-Стокса.

Система уравнений ламинарного пограничного слоя. Для последующего определения теплового потока на поверхности затупленных тел введем следующие координаты ξ, η:

$$\xi = x;\ \eta = \frac{\int_0^y \frac{\mu_1(x)}{\mu(x,y)}dy}{\delta_1}. \qquad (1)$$

Здесь η — безразмерное приведенное расстояние; $\delta_1 = \int\limits_0^{\delta(x)} \frac{\mu_1}{\mu} dy$ — приведенная толщина пограничного слоя; $\delta(x)$ — конечное расстояние от стенки, на котором пограничный слой смыкается с внешним течением, $0 \le \eta \le 1$, $0 \le y \le \delta(x)$, x — координата, направленная вдоль образующей тела, y — по нормали к ней.

Согласно [4, 5] система уравнений ламинарного пограничного слоя в новых координатах ξ, η записывается в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho u r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\
\rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \\
\rho u\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial h}{\partial \eta} = u\frac{dP}{dx} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность; u, v — проекции вектора скорости на оси x и y; r — цилиндрический радиус образующей тела; P — давление; μ — динамическая вязкость; h — энтальпия; Pr — число Прандтля.

На границе пограничного слоя $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 = 0$. Так как первая производная от скорости по нормальной координате равна нулю, то после подстановки в уравнение движения получим $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_1 = 0$.

Здесь и далее индексы «0» и «1» соответствуют параметрам потока на стенке и на границе пограничного слоя.

Примем следующие граничные условия:

- условие прилипания на стенке:

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ при } y = 0;$$

- на границе пограничного слоя для скорости u и энтальпии h зададим значения соответствующих параметров $u = u_1$ и $h = h_1$.

Динамическую вязкость определим из степенной зависимости:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\omega}. \tag{3}$$

Метод Польгаузена. Согласно методу Польгаузена безразмерная скорость в пограничном слое выражается полиномом [4, 5]:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1(x)} = a(x)\eta + b(x)\eta^2 + c(x)\eta^3 + d(x)\eta^4. \quad (4)$$

Из [4, 5, 7] определим классический полином Польгаузена:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)\eta - \frac{\Lambda}{2}\eta^2 + \left(-2 + \frac{\Lambda}{2}\right)\eta^3 + \left(1 - \frac{\Lambda}{6}\right)\eta^4. \quad (5)$$

Согласно [4, 5] для теплового потока $Q > 0$ для формпараметра Λ справедлива оценка $0 < \Lambda < 4$.

Параметры потока на границе пограничного слоя. Распределение давления получим согласно [12]:

$$\frac{P}{P_0'} = \left(\frac{1 - k\chi^2}{1 + k\chi^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (6)$$

где $k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3}\frac{1}{\left(\sigma_* - 90^\circ\right)^2}$, $\chi = \sigma - 90^\circ$, σ — угол между вектором скорости и осью тела, σ_* — положение звуковой точки, P_0' — давление торможения.

Положение звуковой точки определим согласно [6, 13]:

$$\sigma_* = 90 - \left(34 + 40\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M^2}\right)\right). \quad (7)$$

Используя формулу (6) можно получить другие параметры пограничного слоя:

$$\frac{u_1^2}{H} = 2\left(1 - \overline{h_1}\right), \quad (8)$$

где $\overline{h_1} = \frac{h_1}{H} = \left(\frac{P}{P_0'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, H — полная энтальпия.

Профиль энтальпии в пограничном слое. Зададим профиль h следующим полиномом:

$$\bar{h} = \left(\hat{H} - \overline{h_0} - \frac{\mu_0}{\mu_1}\overline{h_1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\right)\Big/\Lambda\right)\left(\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\eta\right) -$$
$$-\frac{\overline{h_0}}{\omega}\left(1 + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\right)\Big/\Lambda\right)\left(1 - \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\eta\right) + \overline{h_0} - \alpha\left(1 - \overline{h_1}\right)\bar{u}^2,$$

где $\hat{H} = \alpha + (1-\alpha)\bar{h}_1$, α — кинетический параметр, принятый $1,2\,\mathrm{Pr}$.

Заданный профиль удовлетворяет граничным условиям на стенке и на границе пограничного слоя ($h = h_0$, $h = h_1$ соответственно). Первые производные профиля энтальпии соответствуют выражениям, определенным в [5, 12]:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{h_0}{\omega}\frac{\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0} = \frac{h_0}{\omega}\frac{12-3\Lambda}{\Lambda},$$
$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = -\frac{\mu_0}{\mu_1\Lambda}h_1\left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \eta^3}\right)_1 = \tag{9}$$
$$= -\frac{\mu_0}{\mu_1}h_1\frac{12-\Lambda}{\Lambda}.$$

Формпараметр Λ определим из соотношения, полученного из последнего уравнения системы (2) при $u = 0$, $v = 0$ (рис. 1):

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \eta^2}\right)_0 = -2\,\mathrm{Pr}\left(1-\bar{h}_1\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)_0^2. \tag{10}$$

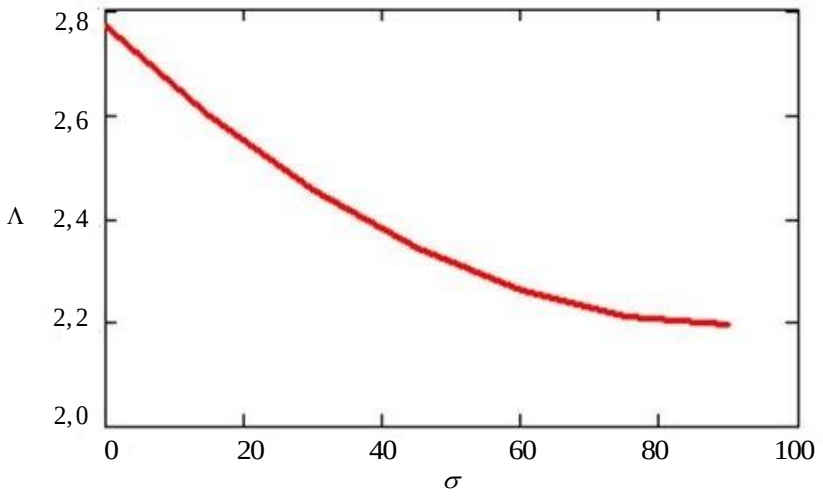


Рис. 1 Пример поведения формпараметра Λ при $M = 4{,}11$ в зависимости от угла σ в случае сферы

Расчет тепловых потоков. Согласно [4, 5] для определения теплового потока будем использовать соотношение:

$$\frac{Q}{Q_0}=\frac{12-3\Lambda}{\Lambda^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\tau^{1/(\gamma-1)}}{R(\sigma)}\frac{1}{\sqrt{1-\bar{h}_1}}\left[\lambda\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda-1}\left(-\frac{4k\chi}{\left(1+k\chi^2\right)^2}\right)+\right.}$$

$$\left.+\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)\right]:$$

$$:\frac{12-3\Lambda(\pi/2)}{\Lambda(\pi/2)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{R(\pi/2)}\sqrt{2k}}.$$

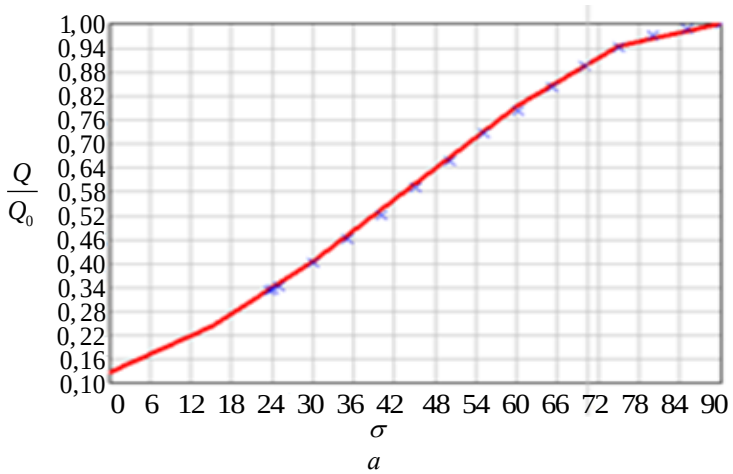
Для случая сферы примем $R(\sigma)=1$, радиус кривизны эллипсоида

$$R(\sigma)=bn\left(\frac{1+tg^2(\sigma)}{n^2+tg^2(\sigma)}\right)^{\frac{3}{2}},$$

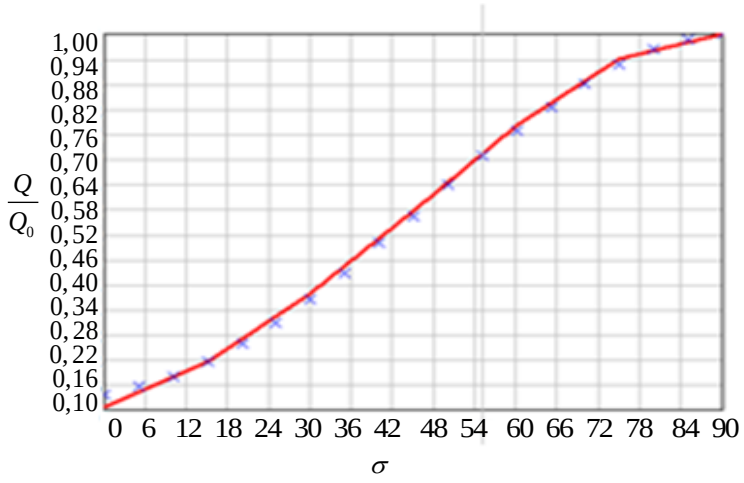
где $n=\frac{b}{a}$, $a=1$.

Результаты. Получены результаты расчета тепловых потоков для сферы и эллипсоида при различных условиях. Сравнение предлагаемого подхода с численным решением задачи в рамках уравнений Навье-Стокса [14] показывает достаточно высокую точность расчета. Результаты тепловых потоков на сфере представлены в зависимости от угла σ, на эллипсоиде — в зависимости он длины дуги.

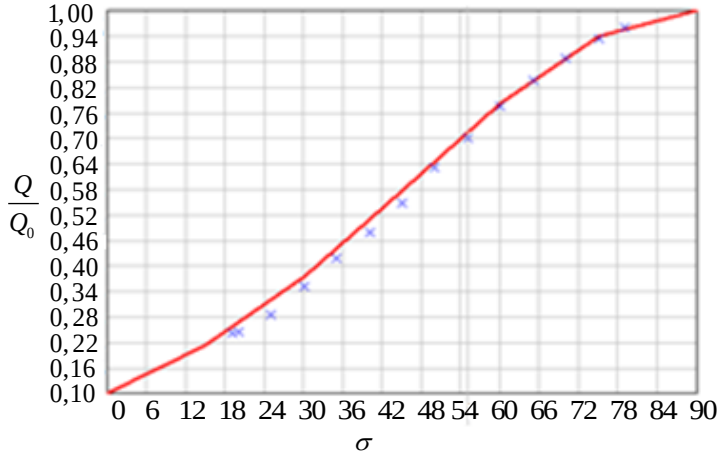
На рис. 2, 3 сплошной линией изображен тепловой поток, рассчитанный с помощью заданного профиля энтальпии, крестиками — значения при решении задачи в рамках уравнений Навье-Стокса.



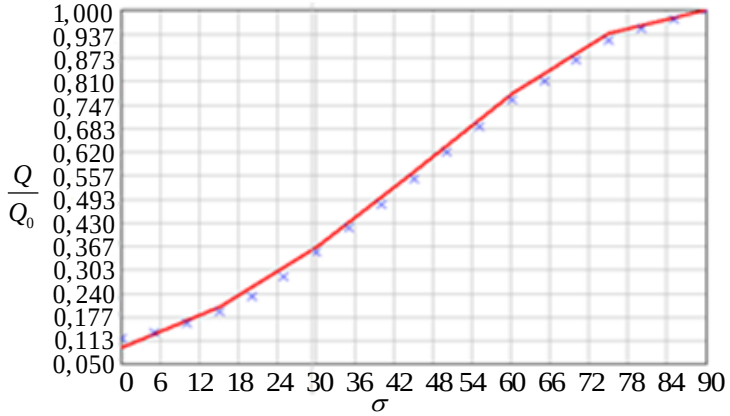
а



б



в



г

Рис. 2 Результаты расчета тепловых потоков на сфере:
а — $M_\infty = 4{,}11;\ \overline{h_0} = 0{,}25;\ \mathrm{Pr} = 0{,}7$, *б* — $M_\infty = 10,\ \overline{h_0} = 0{,}25,\ \mathrm{Pr} = 0{,}7$,
в — $M_\infty = 6;\ \overline{h_0} = 0{,}35;\ \mathrm{Pr} = 0{,}7$, *г* — $M_\infty = 10;\ \overline{h_0} = 0{,}35;\ \mathrm{Pr} = 0{,}7$

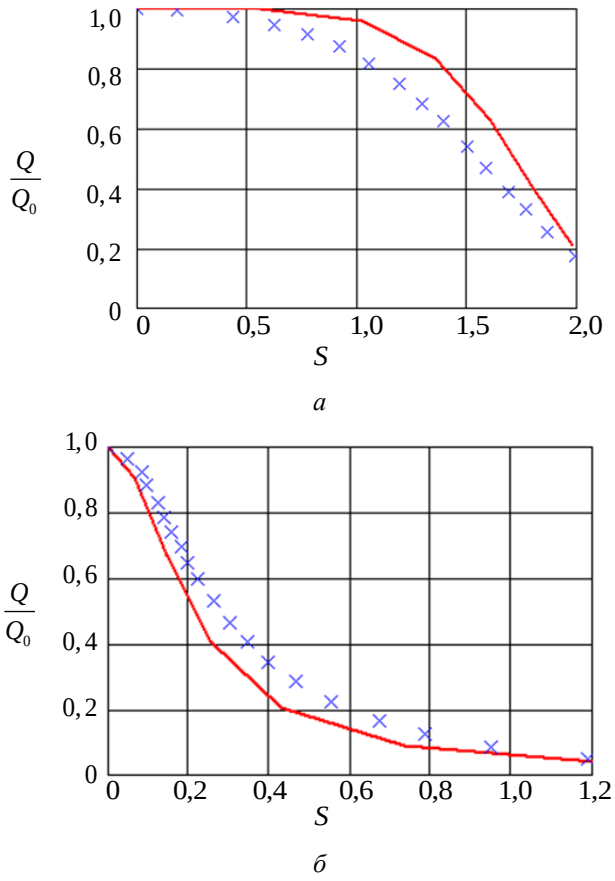


Рис. 3 Результаты расчета тепловых потоков на эллипсоиде

а — $M_\infty = 10;\ \overline{h_0} = 0{,}16;\ \mathrm{Pr} = 0{,}75;\ b/a = 3/2$,

б — $M_\infty = 10;\ \overline{h_0} = 0{,}16;\ \mathrm{Pr} = 0{,}75;\ b/a = 1/2$

Выводы. В работе представлен способ определения тепловых потоков на поверхности затупленных тел, основанный на применении нового профиля энтальпии. Сравнение полученных результатов с решением данной задачи в рамках уравнений Навье-Стокса [14] показало приемлемое для оценок тепловых потоков согласование, что свидетельствует об их корректности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Абрамович Г.Н. *Прикладная газовая динамика. Часть 1.* Москва, Наука, 1991, 597 с.

[2] Бай Ши-и. *Введение в теорию течения сжимаемой жидкости*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961, 410 с.

[3] Orlik E., Fedion I., Davidenko D. Boundary-layer transition on a hypersonic forebody: experiments and calculation. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, vol. 48, no. 4, pp. 545–555.

[4] Котенев В.П., Булгаков В.Н., Ожгибисова Ю.С. Модификация метода Польгаузена для расчета тепловых потоков на затупленных телах. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3, с. 33–52.
[5] Булгаков В.Н., Котенев В.П., Ожгибисова Ю.С. Аналитическое исследование ламинарного пограничного слоя около затупленных тел. *Математическое моделирование*, 2019, т. 31, № 6, с. 82–94.
[6] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 327 с.
[7] Романенко П.Н. *Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое*. Москва, Энергия, 1974, 464 с.
[8] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, Физматлит, 2011, 280 с.
[9] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов. *Известия ВУЗов. Машиностроение*, 2014, № 3, с. 23–34.
[10] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 3, с. 42–61.
[11] Tumin A., Wang X., Zhong H. Numerical simulation and theoretical analysis of perturbation in hypersonic boundary layer. *AIAA JOURNAL*, 2011, vol. 49, no. 3, pp. 463-471.
[12] Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока. *Математическое моделирование*, 2014, т. 26, № 9, с. 141–148.
[13] Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 68–81.
[14] Брыкина И.Г., Сахаров В.И. Сравнение приближенных аналитических и численных решений для тепловых потоков при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 1996, № 1, с. 125–132.

Статья поступила в редакцию 12.04.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Котенев В.П., Тонких Е.Г. Новая зависимость профиля энтальпии в модели пограничного слоя. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 2, с. 80–89.

Котенев Владимир Пантелеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела АО «ВПК «НПО машиностроения».

Тонких Евгений Геннадьевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер АО «ВПК «НПО машиностроения».

A new dependence for the enthalpy profile in the boundary layer model

© V.P. Kotenev [1,2], E.G. Tonikh[1,2]

[1]Joint stock company "Military and industrial corporation", Reutov, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A new analytical dependence is proposed for the enthalpy profile in the boundary layer, the use of which makes it possible to quickly and efficiently obtain the distribution of heat flux over the surface of blunted bodies

***Keywords**: blunted body, heat flow, boundary layer*

REFERENCES

[1] Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika. Chast' 1* [Applied gas dynamics. Part 1]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 597 p.
[2] Pai Shih-I. *Introduction to the theory of compressible flow*. D. Van Nostrand, 1959, 385 p.
[3] Orlik E., Fedion I., Davidenko D. Boundary-layer transition on a hypersonic forebody: experiments and calculation. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, vol. 48, no. 4, pp. 545–555.
[4] Kotenev V.P., Bulgakov V.N., Ozhgibisova Y.S. Modification of Pohlhausen method for calculating heat transfer on blunt bodies. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3, pp. 33–52.
[5] Bulgakov V.N., Kotenev V.P., Ozhgibisova Yu.S. Analytical study of laminar boundary layers near blunted bodies. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 60–69.
[6] Lunev V.V. *Techenie real'nyh gazov s bol'shimi skorostyami* [Flow of real gases with high velocities]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 327 p.
[7] Romanenko P.N. *Gidrodinamika i teplomassoobmen v pogranichnom sloe* [Hydrodynamics and heat and mass transfer in the boundary layer]. Moscow, Energiya Publ., 1974, 464 p.
[8] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnyh adaptivnyh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoj dinamike* [The method of ribbon adaptive grids for numerical modeling in gas dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 280 p.
[9] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. Modeling of coupled aerogasdynamics and heat transfer processes on the thermal protection surface of a future hypersonic aircraft. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2014, no. 3, pp. 23–34.
[10] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Yurin Yu.V., Zakharov A.A., Sobshchikov S.V., Bogdanov I.O. Coupled modeling of high-speed aerothermodynamics and internal heat and mass transfer in composite aerospace structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 3, pp. 42–61.
[11] Tumin A., Wang X., Zhong H. Numerical simulation and theoretical analysis of perturbation in hypersonic boundary layer. *AIAA JOURNAL*, 2011, vol. 49, no. 3, pp. 463-471.
[12] Kotenev V.P. Exact relation for determining the pressure distribution on a sphere at an arbitrary mach number in a supersonic incoming flow. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 128–133.

[13] Kotenev V.P., Sysenko V.A. Analytical formula with improved accuracy for calculating pressure distribution on the surface of convex, blunt rotation bodies of arbitrary shape. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 68–81.
[14] Brykina I.G., Sakharov V.I. Comparison of approximate analytical and numerical solutions for heat fluxes in viscous supersonic flow past a body. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 1, pp. 107–113.

Kotenev V.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Head of department, Joint stock company “Military and industrial corporation”.

Tonkikh E.G., Postgraduate student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Engineer, Joint stock company “Military and industrial corporation”.