ISSN 2309-3684

Математическое моделирование
и численные методы

УДК 517.9 + 532 + 536

Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость

© А.Д. Полянин[1,2,3], В.Г. Сорокин[2], А.В. Вязьмин[4]

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

[3] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

[4] Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Москва, 107023, Россия

Исследованы нелинейные гиперболические реакционно-диффузионные уравнения с переменным коэффициентом переноса при наличии запаздывания. Приведены некоторые точные решения с обобщенным разделением переменных. Большинство рассматриваемых уравнений содержат функциональный произвол. Получены условия глобальной нелинейной неустойчивости решений широкого класса систем гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Показано, что при выполнении условий неустойчивости задачи с начальными данными и некоторые начально-краевые задачи с запаздыванием являются некорректными по Адамару. Решена обобщенная задача Стокса с периодическим граничным условием, описываемая линейным диффузионным уравнением с запаздыванием.

Ключевые слова: *реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, точные решения, обобщенное разделение переменных, нелинейная неустойчивость, глобальная неустойчивость.*

Введение. Для описания нестационарных тепловых и реакционно-диффузионных процессов обычно используются классические модели теплопроводности и диффузии, основанные на законе Био — Фурье — Фика, которые приводят к уравнениям теплопроводности и диффузии параболического типа (см., например, [1–3]). Такие уравнения обладают физически парадоксальным свойством — бесконечной скоростью распространения теплоты или вещества, что не наблюдается в природе. Указанное обстоятельство привело к разработке моделей тепло- и массопереноса с конечной скоростью распространения возмущений. Одной из них является модель Каттанео — Вернотте [4, 5], приводящая к уравнениям переноса гиперболического типа (см., например, [6]).

Важной особенностью многих эволюционных процессов, в том числе процессов массо- и теплопереноса, осложненных химическими превращениями, является то, что скорость изменения величин в биологических, химических, биохимических, физико-химических и других системах зависит не только от их состояния в данный момент времени, но и от предыдущей эволюции процесса [7–12]. Такие системы называют наследственными. В частном случае, когда состояние системы определяется не всей ее эволюцией, а только конкретным моментом в прошлом, говорят о системе с запаздывающей обратной связью.

Системы с запаздывающей обратной связью часто моделируются реакционно-диффузионными уравнениями, в которых кинетическая функция F (скорость протекания химических и биохимических реакций) зависит как от искомой функции $u = u(x, t)$, так и от той же функции с запаздывающим аргументом $w = u(x, t-\tau)$. В некоторых случаях запаздывание может быть заданной функцией времени $\tau = \tau(t)$. Такие уравнения называют функционально-дифференциальными.

Рассмотрим некоторые типы уравнений массо- и теплопереноса с запаздыванием. Наиболее простым является обобщение параболического уравнения диффузии, включающее реакционный член с запаздыванием (параболическое реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием). В одномерном случае оно записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t-\tau),$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция; $F(u, w)$ — кинетическая функция; τ — время запаздывания. Некоторые точные решения этого уравнения получены в [11, 13, 14].

Другим уравнением с запаздыванием является дифференциально-разностное реакционно-диффузионное уравнение [13]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(G(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(u, v), \quad v = u(x, t+\tau).$$

Такие уравнения следуют из дифференциально-разностной модели для потока [15, 16]. Физический смысл модели заключается в том, что процесс переноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: система реагирует на воздействие не в тот же момент времени t, как в классическом локально-равновесном случае, а позже на время релаксации τ.

Еще одним типом уравнений являются гиперболические уравнения типа Клейна − Гордона с запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t-\tau).$$

Некоторые точные решения этого уравнения приведены в [17, 18].

При решении нестационарных проблем массопереноса часто возникает необходимость учета релаксационных явлений, связанных как с конечностью скорости переноса теплоты и массы, так и с конечностью времени химических превращений или взаимодействия между различными фазами, составляющими единую макросреду переноса. В данной работе будут получены некоторые точные решения нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(u,w),\quad w=u(x,t-\tau). \tag{1}$$

Далее считается, что $a > 0$, $\varepsilon \ge 0$, $\sigma \ge 0$ ($\varepsilon + \sigma \ne 0$). Для линейного уравнения с запаздыванием при $F(u, w) = -kw$ будет решена обобщенная задача Стокса с периодическим граничным условием. Заметим, что решение задачи Стокса с таким граничным условием для одномерного дифференциально-разностного уравнения рассмотрено в [13, 15, 19].

В данной статье также представлены точные решения более сложных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным коэффициентом переноса $G(u)$:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(G(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(u,w),\quad w=u(x,t-\tau). \tag{2}$$

Более простые уравнения этого вида при $\varepsilon = 0$ рассмотрены в [20, 21].

В данной работе получены условия неустойчивости решений широкого класса нелинейных систем реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и показано, что при выполнении условий неустойчивости задачи с начальными данными и некоторые начально-краевые задачи являются некорректными по Адамару. Следует заметить, что вопросам устойчивости решений различных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и систем таких уравнений посвящены работы [22–25].

Точные решения, методы и подходы. Термин «точные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений в частных производных» (в том числе и уравнений в частных производных с запаздыванием) применяют в случаях, когда результат может быть выражен:

через элементарные функции или представлен в замкнутой форме (через неопределенные или определенные интегралы);

через решения обыкновенных дифференциальных или обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (их систем);

через решения линейных уравнений в частных производных.

Допустимы также комбинации приведенных решений.

Методы решения и приложения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений описаны, например, в [10, 26–28]. Осцилляционные свойства некоторых нелинейных гиперболических уравнений с запаздыванием изучены, например в [29–31]. Проблемы численного решения различных нелинейных систем с запаздыванием описаны в [32, 33].

Одним из наиболее эффективных методов исследования реакционно-диффузионных уравнений является метод обобщенного разделения переменных, когда точные решения уравнений находят в виде

$$u = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\psi_n(t). \tag{3}$$

Функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(t)$ определяют после подстановки (3) в исходное уравнение. Чаще всего в сумме (3) используют функции

$$\varphi_n(x) = x^k \ (k = 0, 1, 2); \quad \varphi_n(x) = \exp(\lambda_n x);$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\beta_n x); \quad \varphi_n(x) = \sin(\beta_n x),$$

где параметры λ_n и β_n определяют из (3) и исходных уравнений. Функции $\psi_n(t)$ часто имеют аналогичный вид. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных без запаздывания, допускающие решения вида (3) и модификации метода поиска таких решений, рассмотрены в [34, 35].

Существуют также более сложные решения с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z); \quad z = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\psi_n(t). \tag{4}$$

В частности, при $U(z) = z$ решение (4) совпадает с решением (3). Решения вида (4) для нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания рассмотрены, например, в [34–36].

Для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, содержащих произвольные функции, прямое применение метода обобщенного разделения переменных не всегда эффективно. Для их решения предложен метод функциональных связей [20, 37]. Рассмотрим нелинейные реакционно-диффузионные гиперболические уравнения с запаздыванием и кинетической функцией, зависящей от одного сложного аргумента:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(z), \quad z = z(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \tag{5}$$

где $z = z(u, w)$ — также искомая функция. Точные решения ищем в виде (3) с простейшими мультипликативным и аддитивным разделением переменных.

Для определения вида аргумента $z = z(u, w)$ произвольной функции $F(z)$ используем метод функциональных связей, который основан на поиске точных решений, удовлетворяющих одной из связей [37]:

$$z(u, w) = p(x); \quad w = u(x, t - \tau); \tag{6}$$

$$z(u,w)=q(t); \quad w=u(x,t-\tau). \tag{7}$$

Эти связи не что иное, как разностные уравнения относительно t со свободным параметром x. Частное решение уравнения (6) или (7) с учетом (3) определяет допустимый вид точного решения, которое находят подстановкой (3) в рассматриваемое уравнение с запаздыванием (5). Попутно определяют также вид функции $F(z)$.

С помощью метода функциональных связей построим точные решения гиперболического реакционно-диффузионного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bu+F(u-w), \quad w=u(x,t-\tau), \tag{8}$$

которое является частным случаем уравнения (5) при $z = u - w$.

Функциональная связь второго рода (7) имеет вид

$$u-w=q(t); \quad w=u(x,t-\tau). \tag{9}$$

Разностному уравнению (9) можно удовлетворить, если положить

$$u=\varphi(x)+\psi(t), \tag{10}$$

что дает $q(t)=\psi(t)-\psi(t-\tau)$. Подставляя (10) в (8) и разделяя переменные, получаем уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$:

$$a\varphi''(x)+b\varphi(x)=C;$$

$$\psi''(t)+\sigma\psi'(t)-b\psi(t)-F(\psi(t)-\psi(t-\tau))=C,$$

где C — постоянная. Штрихи обозначают производные.

Функциональная связь первого рода (6) имеет вид

$$u-w=p(x); \quad w=u(x,t-\tau). \tag{11}$$

Разностному уравнению (11) можно удовлетворить, взяв, например, решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u=t\varphi(x)+\psi(x), \tag{12}$$

которое дает $p(x)=\tau\varphi(x)$. Подставляем (12) в (8) и получаем уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$a\varphi''(x)+b\varphi(x)=0;$$

$$a\psi''(x)+b\psi(x)+F(\tau\varphi(x))-\sigma\varphi(x)=0.$$

Точные решения линейного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием. Рассмотрим теперь линейное реакционно-диффузионное уравнение гиперболического типа с запаздыванием

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-kw, \quad w=u(x,t-\tau). \tag{13}$$

Ниже приведены некоторые точные решения этого уравнения.

1. Решение с разделяющимися переменными:

$$u = \left[A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right] f(t),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $f(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon f''(t) + \sigma f'(t) + a\mu^2 f(t) + kf(t-\tau) = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) допускает экспоненциальные и тригонометрические частные решения. Методы его решения изложены, например в [26].

Другие решения с разделяющимися переменными имеют вид

$$u = \left[A\exp(-\mu x) + B\exp(\mu x)\right] f(t),$$

где функция $f(t)$ описывается уравнением с запаздыванием (14), в котором μ^2 надо заменить на $-\mu^2$.

2. Уравнение (13) допускает решения с обобщенным разделением переменных полиномиального вида по t:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{n} t^m \psi_m(x), \qquad (15)$$

где функции $\psi_m(x)$ описываются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Полагая $n = 2$ в (15), имеем решение

$$u(x,t) = t^2\psi_2(x) + t\psi_1(x) + \psi_0(x),$$

где функции $\psi_m(x)$ описываются уравнениями

$$a\psi_2'' - k\psi_2 = 0,$$

$$a\psi_1'' - k\psi_1 = 2(\sigma - k\tau)\psi_2,$$

$$a\psi_0'' - k\psi_0 = \left(k\tau^2 + 2\varepsilon\right)\psi_2 + (\sigma - k\tau)\psi_1,$$

которые легко интегрируются.

3. Уравнение (13) допускает решения с обобщенным разделением переменных полиномиального вида по x:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{n} x^m \varphi_m(t),$$

где функции $\varphi_m(t)$ описываются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\varepsilon\varphi_n''(t) + \sigma\varphi_n'(t) + k\varphi_n(t-\tau) = 0;$$

$$\varepsilon\varphi_{n-1}''(t) + \sigma\varphi_{n-1}'(t) + k\varphi_{n-1}(t-\tau) = 0;$$

$$\varepsilon\varphi_m''(t) + \sigma\varphi_m'(t) + k\varphi_m(t-\tau) = a(m+1)(m+2)\varphi_{m+2}(t),\ m = 0,\ 1, \ldots,\ n-2,$$

которая может быть последовательно решена.

4. Имеются также решения уравнения (13) вида

$$u(x,t)=\varphi(x)\cos(\omega t)+\psi(x)\sin(\omega t).$$

Обобщенная задача Стокса с периодическим граничным условием. Рассмотрим задачу Стокса для линейного уравнения (13) без начальных условий и с периодическими граничными условиями специального вида:

$$u=A\cos(\omega t+\gamma) \text{ при } x=0; \qquad u\to 0 \text{ при } x\to\infty. \tag{16}$$

Решение задачи (13), (16) имеет вид

$$u=Ae^{-\lambda x}\cos(\omega t-\beta x+\gamma), \tag{17}$$

где постоянные λ и β определяют из системы алгебраических уравнений:

$$\sigma\omega-k\sin\omega\tau=2a\beta\lambda; \qquad \varepsilon\omega^2-k\cos\omega\tau=a\left(\beta^2-\lambda^2\right). \tag{18}$$

Для удобства введем обозначения:

$$C=\left(\sigma\omega-k\sin\omega\tau\right)/a;\ D=\left(\varepsilon\omega^2-k\cos\omega\tau\right)/a \tag{19}$$

и запишем решение системы (18):

$$\lambda=\left[\frac{(C^2+D^2)^{1/2}-D}{2}\right]^{1/2};\quad \beta=\left[\frac{(C^2+D^2)^{1/2}+D}{2}\right]^{1/2}. \tag{20}$$

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что декремент затухания λ зависит от частоты ω и при определенных наборах значений параметров ε, σ, a, k, τ обращается в нуль на частотах ω_λ (рис. 1), которые можно найти из первого соотношения (19). Обращение λ в нуль приводит к тому, что решение (17) перестает затухать и удовлетворять граничному условию (16) при $x\to\infty$. Функция $\lambda(\omega)$ является непрерывной, поэтому на частотах, близких к ω_λ, будут наблюдаться похожие явления, например очень медленное затухание, хотя решение все еще будет удовлетворять граничному условию на бесконечности.

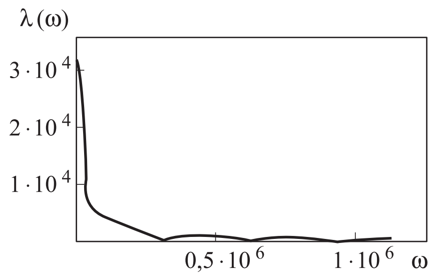

Рис. 1. Зависимость декремента затухания λ от частоты ω в диапазоне $0<\omega<10^6$ при $\varepsilon=1$; $\sigma=1$; $a=1$; $k=10^9$; $\tau=10^{-5}$

Декремент затухания λ обращается в нуль при $C=0$, т. е. при ω_λ, удовлетворяющих уравнению $\sigma\omega_\lambda=k\sin\omega_\lambda\tau$, которое можно представить в виде

$$\Omega_\lambda = \xi \sin \Omega_\lambda; \quad \Omega_\lambda = \omega_\lambda \tau; \quad \xi = k\tau / \sigma. \tag{21}$$

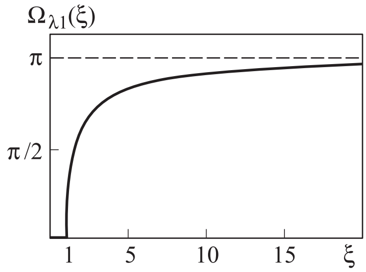

Рис. 2. Зависимость значений первого корня $\Omega_{\lambda 1}$ уравнения (21) от ξ

Уравнение (21) можно решить численно для каждого набора параметров k, τ, σ. На рис. 2 показана зависимость значения первого корня $\Omega_{\lambda 1}$ уравнения (21) от ξ.

Совместный качественный анализ графиков функций, стоящих в левой и правой частях уравнения (21), а также рис. 2 дают следующие результаты:

1) уравнение (21) имеет положительные решения Ω_λ только при $\xi > 1$;

2) количество решений Ω_λ возрастает с увеличением значения ξ;

3) все положительные решения Ω_λ удовлетворяют неравенству $\Omega_\lambda \le \xi$ и лежат в интервалах $2j\pi < \Omega_\lambda < (2j+1)\pi$, $j = 0, 1, ..., \lfloor N/2 \rfloor$, N — количество решений (здесь $\lfloor A \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное A). Первый интервал содержит одно решение, последний — одно или два в зависимости от значения ξ, остальные интервалы содержат по два решения.

При $\tau = 0$ получаем задачу для линейного реакционно-диффузионного уравнения гиперболического типа без запаздывания. Ее решение имеет вид

$$u = Ae^{-\lambda_0 x} \cos(\omega t - \beta_0 x + \gamma), \tag{22}$$

аналогичный решению (17) задачи с запаздыванием. Значения декремента затухания λ_0 и коэффициента сдвига β_0 определяют по формулам:

$$\lambda_0 = \left[\frac{(C_0^2 + D_0^2)^{1/2} - D_0}{2} \right]^{1/2}; \quad \beta_0 = \left[\frac{(C_0^2 + D_0^2)^{1/2} + D_0}{2} \right]^{1/2}, \tag{23}$$

где использованы обозначения

$$C_0 = \sigma\omega / a; \quad D_0 = \left(\varepsilon\omega^2 - k \right) / a. \tag{24}$$

Анализ формул (23), (24) показывает, что не существует ненулевых частот ω_λ, на которых $\lambda_0(\omega_\lambda) = 0$, а значит, решение (22) всегда удовлетворяет граничным условиям (16). Функция $\lambda_0(\omega)$ не убывает при $\sigma^2 > 4\varepsilon k$, не возрастает при $\sigma^2 < 4\varepsilon k$ и постоянна (не зависит от ω) при $\sigma^2 = 4\varepsilon k$. Зависимость $\beta_0(\omega)$ строго возрастает при любых наборах значений параметров ε, σ, a, k.

Уравнения с переменным коэффициентом переноса. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение гиперболического типа с запаздыванием и переменным коэффициентом переноса

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[G(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+F(u,w),\quad w=u(x,t-\tau). \tag{25}$$

Уравнение (25) допускает очевидные решения типа бегущей волны

$$u=U(z),\quad z=kx+\lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$\varepsilon\lambda^2U''(z)+\sigma\lambda U'(z)=k^2\left[G\big(U(z)\big)U'(z)\right]'+F\big(U(z),U(z-\delta)\big),\quad \delta=\lambda\tau.$$

Уравнение 1. Рассмотрим уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left[u^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]+bu^{n+1}+uF(w/u),\quad w=u(x,t-\tau), \tag{26}$$

где F — произвольная функция.

• Уравнение (26) при $b(n+1)>0$ имеет решение с разделяющимися переменными

$$u=\left[C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)\right]^{1/(n+1)}\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{b(n+1)/a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t)+\sigma\psi'(t)=\psi(t)F\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big). \tag{27}$$

Уравнение (27) имеет частное решение $\psi(t)=Ae^{\beta t}$, где A — произвольная постоянная, а β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\varepsilon\beta^2+\sigma\beta-F\left(e^{-\beta\tau}\right)=0.$$

• Уравнение (26) при $b(n+1)<0$ допускает решение вида

$$u=\left[C_1\exp(-\lambda x)+C_2\exp(\lambda x)\right]^{1/(n+1)}\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{-b(n+1)/a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (27).

• Уравнение (26) при $n=-1$ допускает решение

$$u=C_1\exp\left(-\frac{b}{2a}x^2+C_2x\right)\psi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (27).

Уравнение 2. Уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left[u^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]+uF(w/u)$$

допускает решение с разделяющимися переменными $u=\varphi(x)\psi(t)$, где функции $\varphi(x)$, $\psi(t)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению и обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$a\left(\varphi^n\varphi'_x\right)'_x=b\varphi; \tag{28}$$

$$\varepsilon\psi''(t)+\sigma\psi'(t)=b\psi^{n+1}(t)+\psi(t)F\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big), \tag{29}$$

b — произвольная постоянная.

При $b=0$ уравнение (29) переходит в (27), а (28) имеет решение

$$\varphi(x)=\begin{cases}(C_1x+C_2)^{1/(n+1)} & \text{при } n\neq-1,\\ C_1\exp(C_2x) & \text{при } n=-1;\end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $n\neq-2$, $n\neq0$ уравнение (28) имеет частное решение вида

$$\varphi(x)=Ax^{2/n},\quad A=\left[\frac{bn^2}{2a(n+2)}\right]^{1/n}.$$

Уравнение 3. Уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left[u^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]+uF(w/u)+u^{n+1}H(w/u),$$

где $F(z)$, $H(z)$ — произвольные функции, допускает решение

$$u=e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ является решением алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\varepsilon\lambda^2+\sigma\lambda=F\left(e^{-\lambda\tau}\right),$$

а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\left(\varphi^n\varphi'_x\right)'_x+\varphi^{n+1}H\left(e^{-\lambda\tau}\right)=0.$$

При $n \neq -1$ замена $\theta = \varphi^{n+1}$ приводит к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. При $n = -1$ применяем замену $\theta = \ln \varphi$.

Уравнение 4. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left[u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right] + cu^{n-2k+1} + u^{1-k}F(u^k - w^k),$$

соответствующее вырожденному случаю уравнения (25) при $\varepsilon = 0$ ($\sigma = 1$, $k \neq 0$), допускает решения с обобщенным разделением переменных

$$u = [\lambda x + \psi(t)]^{1/k}, \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{-ck^2}{a(n+1-k)}},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi'(t) = kF\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

Уравнение 5. Уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left[u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right] + F(u^{n+1} - w^{n+1}) + u^{-2n-1}H(u^{n+1} - w^{n+1})$$

при $\varepsilon \neq 0$, $\sigma = 0$, $n \neq -1$ допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \left(At + Bx^2 + C_1x + C_2\right)^{1/(n+1)}, \quad B = -\frac{n+1}{2a}F\left(A\tau\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\varepsilon nA^2 + \left(n+1\right)^2 H\left(A\tau\right) = 0.$$

Уравнение 6. Рассмотрим уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\beta u} \frac{\partial u}{\partial x}\right] + be^{\beta u} + F(u - w). \tag{30}$$

- При $b = 0$ уравнение (30) допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta}\ln(C_1x^2 + C_2x + C_3) + \psi(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t)+\sigma\psi'(t)=\frac{2aC_1}{\beta}e^{\beta\psi(t)}+F(\psi(t)-\psi(t-\tau)).$$

• При $b\beta>0$ уравнение (30) допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u=\frac{1}{\beta}\ln[C_1+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sin(\lambda x)]+\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{b\beta/a},$$

где $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t)+\sigma\psi'(t)=bC_1\beta e^{\beta\psi(t)}+F(\psi(t)-\psi(t-\tau)). \qquad (31)$$

• При $b\beta<0$ уравнение (30) также допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u=\frac{1}{\beta}\ln[C_1+C_2\exp(-\lambda x)+C_3\exp(\lambda x)]+\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{-b\beta/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается уравнением с запаздыванием (31).

Уравнение 7. Уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\beta u}\frac{\partial u}{\partial x}\right]+F(e^{\beta u}-e^{\beta w})+e^{-2\beta u}H(e^{\beta u}-e^{\beta w})$$

при $\varepsilon\neq 0$, $\sigma=0$ допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u=\frac{1}{\beta}\ln(At+Bx^2+C_1x+C_2),\quad B=-\frac{\beta}{2a}F(A\tau),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\varepsilon A^2+\beta H\left(A\tau\right)=0.$$

Уравнение 8. Уравнение (25) вида

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left[g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+b+\left[-\varepsilon A^2\frac{g''(u)}{(g'(u))^3}+\sigma A\frac{1}{g'(u)}\right]F(g(u)-g(w)),$$

где $g(z)$, $f(z)$ — произвольные функции, штрих обозначает производную по соответствующему аргументу, допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u)=At-\frac{b}{2a}x^2+C_1x+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $F\left(A\tau\right)=1$.

Нелинейная неустойчивость решений систем реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Пусть $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — вектор-функция, является некоторым решением нелинейной системы параболических уравнений в частных производных с запаздыванием. Пусть удалось найти другое решение этой системы в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \delta),$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \delta)$ — достаточно гладкая функция, ограниченная при конечных t и зависящая от параметра δ, который не входит в систему уравнений.

Решение $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ является неустойчивым, если функция $\mathbf{v}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\left|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \delta)\right| \to 0 \ \text{ при } \ 0 \le t \le \tau, \ \delta \to 0, \\ &\left|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \delta)\right| \to \infty \text{ при } \ t \to \infty, \ \delta \ne 0 - \text{любое}. \end{aligned} \tag{32}$$

Из условия (32) следует, что при $0 \le t \le \tau$ в силу непрерывности $\mathbf{v}$ по δ для любого достаточно малого Δ можно выбрать такое значение δ, при котором выполняется неравенство $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| \le \Delta$, а при $t \to \infty$ величина $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|$ становится неограниченной.

Для гиперболической системы уравнений в частных производных с запаздыванием к условиям (32) надо добавить условие для производных по времени: $\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \delta)}{\partial t}\right| \to 0$ при $\delta \to 0$ (для $0 \le t \le \tau$).

Глобальные условия неустойчивости реакционно-диффузионных систем с запаздыванием. Проанализируем неустойчивость системы реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b u_1 + F(u_1 - k w_1, u_2, w_2); \\ &\varepsilon_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + G(u_1 - k w_1, u_2, w_2), \quad k > 0, \end{aligned} \tag{33}$$

где $u_{1;2} = u_{1;2}(x, t)$; $w_{1;2} = u_{1;2}(x, t - \tau)$; $a_{1;2} > 0$; $\varepsilon_{1;2} \ge 0$; $\sigma_{1;2} \ge 0$ $(\varepsilon_{1;2} + \sigma_{1;2} \ne 0)$; F, G — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания.

В общем случае система (33) (при $\tau \ne 0$) допускает простейшие решения: стационарное, однородное (не зависящее от x) и типа бегущей волны $u_1 = u_1(z)$, $u_2 = u_2(z)$, где $z = \alpha x + \beta t$. Устойчивость этих и некоторых других решений различных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и систем таких уравнений рассмотрена, например в [22–25].

Лемма. Пусть

$$u_{10} = u_{10}(x,t), \quad u_{20} = u_{20}(x,t) \tag{34}$$

есть некоторое решение системы (33). Тогда эта система имеет также решение

$$u_1 = u_{10}(x,t) + e^{ct}V(x,t); \quad u_2 = u_{20}(x,t); \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad k > 0, \tag{35}$$

где $V = V(x, t)$ — любое τ-периодическое решение линейного уравнения

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (\sigma_1 + 2\varepsilon_1 c)\frac{\partial V}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c)V, \\ V(x,t) = V(x, t-\tau). \end{gathered} \tag{36}$$

Воспользуемся леммой для получения условий неустойчивости нелинейной реакционно-диффузионной системы (33). Для этого возьмем стационарное пространственно-периодическое решение уравнения (36):

$$V = \delta\sin(\gamma x + \mu); \quad \gamma = \sqrt{(b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c / a_1}; \quad b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c \ge 0, \tag{37}$$

где δ, μ — произвольные постоянные.

Анализ (35) и (37) показывает, что для системы (33) условие (32) будет выполняться при

$$k > 1; \quad \tau > 0; \quad b\tau^2 - \varepsilon_1(\ln k)^2 - \sigma_1 \tau \ln k \ge 0, \tag{38}$$

тогда любое ее решение $u_{10}(x, t)$, $u_{20}(x, t)$ будет неустойчивым.

Условия (38) можно представить в более наглядном виде:

$$k > 1; \quad b > 0; \quad \tau \ge \tau_0; \quad \tau_0 = \frac{\ln k}{2b}\left(\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + 4\varepsilon_1 b}\right). \tag{39}$$

Соотношения (39) следуют из неравенства (38) для τ, причем ветвь

$$\tau \le \tau_0'; \quad \tau_0' = \frac{\ln k}{2b}\left(\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 + 4\varepsilon_1 b}\right)$$

не рассматривается, так как противоречит условию $\tau > 0$.

Физический смысл условий (39) состоит в том, что в области параметров $k > 1$, $b > 0$ неустойчивость возникает за счет запаздывания, которое должно быть достаточно большим: $\tau \ge \tau_0$.

Поскольку вид кинетических функций F и G не влияет на условия неустойчивости (39) реакционно-диффузионной системы (33), назовем их *глобальными условиями неустойчивости*. Речь идет о нелинейной неустойчивости, все результаты являются точными (а не линеаризованными, как в теории линейной устойчивости, поскольку не использованы никакие допущения, разложения и аппроксимации, характерные для нелинейных теорий).

Неустойчивость решений задач с начальными данными. Пусть (34) — решение задачи типа Коши с начальными условиями общего вида

$$u_1 = u_{11}(x,t),\ u_2 = u_{21}(x,t),\ \partial_t u_1 = u_{12}(x,t),$$
$$\partial_t u_2 = u_{22}(x,t) \text{ при } 0 \le t \le \tau \tag{40}$$

для системы уравнений с запаздыванием (33) на всей области изменения пространственной переменной $-\infty < x < \infty$. Здесь и далее ∂_t обозначает частную производную по t.

Из леммы следует, что при $k > 0$ система (33) имеет решение, которое определяется формулами (35) и (37). Обозначив это решение $\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2$, получим

$$\tilde{u}_1 = u_{10} + \delta e^{ct}\sin(\gamma x + \mu);\quad \tilde{u}_2 = u_{20}, \tag{41}$$

где δ, μ — произвольные постоянные; $c = \frac{1}{\tau}\ln k$, а коэффициент γ определен в (37). Сравнивая решения (34) и (41), их производные по t при $0 \le t \le \tau$, имеем

$$\left|\tilde{u}_1 - u_{10}\right| \le \delta e^{c\tau};\ \left|\partial_t\tilde{u}_1 - \partial_t u_{10}\right| \le \delta c e^{c\tau};\ \left|\tilde{u}_2 - u_{20}\right| = 0;\ \left|\partial_t\tilde{u}_2 - \partial_t u_{20}\right| = 0. \tag{42}$$

При фиксированных τ и k (при $k > 1$, что соответствует $c > 0$) разности между решениями (34) и (41) и их производными по t можно сделать сколь угодно малыми за счет выбора δ, т. е. начальные данные для этих решений будут мало различаться при $0 \le t \le \tau$. С другой стороны, при выполнении условий (39) и $x = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)$ имеем

$$\left|\tilde{u}_1 - u_{10}\right| = \delta e^{c\tau} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

т. е. при выполнении глобальных условий неустойчивости первоначально близкие решения двух задач типа Коши будут неограниченно расходиться с течением времени.

Указанная неустойчивость решений системы уравнений с запаздыванием (33) относительно начальных данных делает задачу Коши для нее некорректно поставленной по Адамару (в случае выполнения (39)). Отметим, что неустойчивость носит общий характер и не зависит от вида функций F и G.

Неустойчивость решений некоторых начально-краевых задач. Покажем, что при выполнении условий (39) может иметь место глобальная неустойчивость решений некоторых начально-краевых задач с граничными условиями первого, второго рода в ограниченной области $0 \le x \le h$.

Пусть (34) — решение начально-краевой задачи для системы уравнений с запаздыванием (33) с начальными условиями (40) и общими граничными условиями первого рода:

$$u_1(0,t)=\varphi_1(t);\, u_2(0,t)=\varphi_2(t);\, u_1(h,t)=\psi_1(t);\, u_2(h,t)=\psi_2(t), \quad (43)$$

где $h=\pi/\gamma$, а коэффициент γ определен в (37).

Формула (41) при $\mu = 0$ дает решение системы (33), которое точно удовлетворяет граничным условиям (43). Это решение за счет выбора δ можно сделать сколь угодно близким к решению (34) в области начальных данных $0 \le t \le \tau$. Однако при выполнении глобальных условий неустойчивости (39) первоначально близкие решения (34) и (41) рассматриваемых начально-краевых задач будут экспоненциально расходиться при $t \to \infty$ в середине $x = h/2$ рассматриваемой области. Такая неустойчивость решений системы (33) относительно начальных данных делает начально-краевую задачу для нее некорректно поставленной по Адамару (в случае выполнения условий (39)).

В случае краевых условий второго рода, когда на границах области задаются производные по координате x, решение (34) следует сравнивать с решением, полученным с помощью леммы и формулы (37) при $\mu = \pi/2$.

Выводы. Получены новые точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием, которые содержат одну или две произвольные функции одного аргумента. Найдены решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, в том числе периодические решения по пространственной переменной.

Получены условия глобальной нелинейной неустойчивости решений некоторых систем реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Показано, что при выполнении условий неустойчивости соответствующие задачи с начальными данными и начально-краевые задачи являются некорректными по Адамару.

Описаны некоторые точные решения линейного реакционно-диффузионного уравнения с постоянным запаздыванием. Решена обобщенная задача Стокса с периодическим граничным условием, проведен качественный анализ решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лыков А.В. *Теория теплопроводности.* Москва, Высшая школа, 1967, 600 с.

[2] Кутателадзе С.С. *Основы теории теплообмена.* Москва, Атомиздат, 1979, 416 с.

[3] Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. *Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering.* London, Taylor & Francis, 2002, 387 p.

[4] Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comptes Rendus,* 1958, vol. 247, pp. 431−433.

[5] Vernotte P. Some possible complications in the phenomena of thermal conduction. *Comptes Rendus*, 1961, vol. 252, pp. 2190−2191.

[6] Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.* Москва, Факториал, 1998, 368 с.

[7] Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* New York, Springer, 1996, 119 p.

[8] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dynamics & Dif. Equations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651−687.

[9] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay. *J. Dif. Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357−376.

[10] Smith H.L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York, Springer, 2010, 182 p.

[11] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409−416.

[12] Kyrychko Y.N. Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications. *J. of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7, 8, pp. 943−960.

[13] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 54, pp. 115−126.

[14] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16−22.

[15] Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Дифференциально-разностные модели и уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации. *Теор. основы хим. технологии*, 2013, т. 47, № 3, с. 271−278.

[16] Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации. Постановки задач и некоторые решения. *Известия вузов. Химия и химическая технология*, 2013, т. 56, № 9, с. 102−108.

[17] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein – Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676−2689.

[18] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием. *Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*, 2014, т. 3, № 2, с. 141−148.

[19] Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Декомпозиция трехмерных линеаризованных уравнений вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройда и их обобщений. *Теоретические основы химической технологии*, 2013, т. 47, № 4, с. 386−394.

[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.

[21] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Applied Mathematics Letters,* 2014, vol. 37, pp. 43−48.

[22] Smith H. L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal*, 2000, vol. 31, pp. 514−534.

[23] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson’s blowflies equation with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, vol. 134, pp. 579−594.

[24] Полянин А.Д. Точные решения и нелинейная неустойчивость реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 4(16), с. 1−14. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/662.html

[25] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 62, pp. 33−40.

[26] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*. Москва, Мир, 1967, 548 с.

[27] Driver R.D. *Ordinary and delay differential equations.* New York, Springer, 1977, 505 p.

[28] Kuang Y. *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Boston, Academic Press, 1993, 398 p.

[29] Cui B.T., Yu Y.H., Lin S.Z. Oscillations of solutions of delay hyperbolic differential equations. *Acta Math. Appl. Sinica,* 1996, vol. 19, pp. 80−88.

[30] Wang J., Meng F., Liu S. Interval oscillation criteria for second order partial differential equations with delays. *J. Comp. & Appl. Math.*, 2008, vol. 212, no. 2, pp. 397−405.

[31] Cui S., Xu Z. Interval oscillation theorems for second order nonlinear partial delay differential equations. *Dif. Equations & Appl.*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 379−391.

[32] Jackiewicza Z., Zubik-Kowal B. Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, no. 3, 4, pp. 433−443.

[33] Zhang Q., Zhang C. A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 306−312.

[34] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*, 2nd edition. Boca Raton, Chapman & Hall / CRC Press, 2012, 1912 p.

[35] Galaktionov V.A. , Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.

[36] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 139, pp. 28−47.

[37] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417−430.

Статья поступила в редакцию 01.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 53–73.

Полянин Андрей Дмитриевич родился в 1951 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 монографий и справочников, опубликованных в России, США, Англии, Германии и Болгарии, 170 статей в рецензируемых журналах и трех изобретений. e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Сорокин Всеволод Григорьевич родился в 1991 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2014 г. Аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор статьи в рецензируемом журнале, посвященной точным решениям нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.
e-mail: vsesor@gmail.com

Вязьмин Андрей Валентинович родился в 1958 г., окончил Московский физико-технический институт в 1982 г. Д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Химия металлов» Московского государственного машиностроительного университета. Автор 7 монографий и справочников, опубликованных в России и США, более 40 статей в российских и зарубежных рецензируемых журналах.
e-mail: av1958@list.ru

Nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type: Exact solutions and global instability

© A.D. Polyanin[1,2,3], V.G. Sorokin[2], A.V. Vyazmin[4]

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3] National Research Nuclear University, Moscow, 115409, Russia
[4] Moscow State University of Mechanical Engineering, Moscow, 107023, Russia

In the article we explored nonlinear hyperbolic delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. A number of generalized separable solutions were obtained. Most of the equations considered contain arbitrary functions. Global nonlinear instability conditions of solutions of hyperbolic delay reaction-diffusion systems were determined. The generalized Stokes problem for a linear delay diffusion equation with periodic boundary conditions was solved.

Keywords: *reaction-diffusion equations, nonlinear delay differential equations, exact solutions, generalized separation of variables, nonlinear instability, global instability.*

REFERENCES

[1] Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat Conduction Theory]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1967, 600 p.
[2] Kutateladze S.S. *Osnovy teorii teploobmena* [Fundamentals of Heat Transfer Theory]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979, 416 p.
[3] Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. *Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering.* London, Taylor & Francis, 2002, 387 p.
[4] Cattaneo C. *Comptes Rendus,* 1958, vol. 247, pp. 431–433.
[5] Vernotte P. *Comptes Rendus*, 1961, vol. 252, pp. 2190–2191.
[6] Polyanin A.D., Vyazmin A.V., Zhurov A.I., Kazenin D.A. *Spravochnik po tochnym resheniyam uravneniy teplo- i massoperenosa* [Handbook of Exact Solutions to the Equations of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Faktorial Publ., 1998, 368 p.
[7] Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* New York, Springer, 1996, 119 p.

[8] Wu J., Zou X. *J. Dynamics & Dif. Equations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.
[9] Faria T., Trofimchuk S. *J. Dif. Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
[10] Smith H.L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York, Springer, 2010, 182 p.
[11] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
[12] Kyrychko Y.N. Hogan S.J. *Journal of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7–8, pp. 943–960.
[13] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
[14] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
[15] Polyanin A.D., Vyazmin A.V. *Theoretical Foundation of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 3, pp. 217–224.
[16] Polyanin A.D., Vyazmin A.V. *Izvestiya Vuzov. Khimiya i Khimicheskaya Tekhnologiya – Chemistry and Chemical Technology Research-Engineering Journal*, 2013, vol. 56 (9), pp. 102–108.
[17] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
[18] Polyanin A.D., Sorokin V.G. *Vestnik National'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta (MIFI) – Bulletin of National Research Nuclear University (MIFI)*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 141–148.
[19] Polyanin A.D., Vyazmin A.V. *Theoretical Foundation of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 4, pp. 321–329.
[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, in print.
[21] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Applied Mathematics Letters,* 2014, vol. 37, pp. 43–48.
[22] Smith H. L., Zhao X.-Q. *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, vol. 31, pp. 514–534.
[23] Mei M., So J., Li M., Shen S. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.
[24] Polyanin A.D. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 4(16). Available at: http://engjournal.ru/articles/662/662.pdf
[25] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
[26] Bellman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations.* New York, Academic, 1963, 480 p.
[27] Driver R.D. *Ordinary and delay differential equations.* New York, Springer, 1977, 505 p.
[28] Kuang Y. *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Boston, Academic Press, 1993, 398 p.
[29] Cui B.T., Yu Y.H., Lin S.Z. *Acta Math. Appl. Sinica,* 1996, vol. 19, pp. 80–88.
[30] Wang J., Meng F., Liu S. *J. Comp. & Appl. Math.*, 2008, vol. 212, no. 2, pp. 397–405.
[31] Cui S., Xu Z. *Dif. Equations & Appl.*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 379–391.
[32] Jackiewicza Z., Zubik-Kowal B. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, no. 3–4, pp. 433–443.
[33] Zhang Q., Zhang C. *Applied Mathematics Letters*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 306–312.
[34] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. 2nd edition, Boca Raton, Chapman & Hall / CRC Press, 2012, 1912 p.

[35] Galaktionov V.A. , Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.
[36] Pucci E., Saccomandi G. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
[37] Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.

Polyanin A.D. (b. 1951) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1974. Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor, principal researcher at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, professor of the Department of Applied Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 books published in Russia, USA, England, Germany and Bulgaria as well as over 170 research articles and three patents. Areas of expertise: differential and integral equations, mathematical physics, hydrodynamics, theory of heat and mass transfer, chemical engineering sciences. e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Sorokin V.G. (b. 1991) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2014. Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of one research article in the field of exact solutions of nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type.
e-mail: vsesor@gmail.com.

Vyazmin A.V. (b. 1958) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1982. Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor of the Department of Chemistry of Metals at Moscow State Mechanical University. Author of 7 books published in Russia, USA as well as of more than 40 research articles. Areas of expertise: mathematical physics, physical-chemical hydrodynamics, theory of heat and mass transfer, chemical engineering sciences. e-mail: av1958@list.ru.