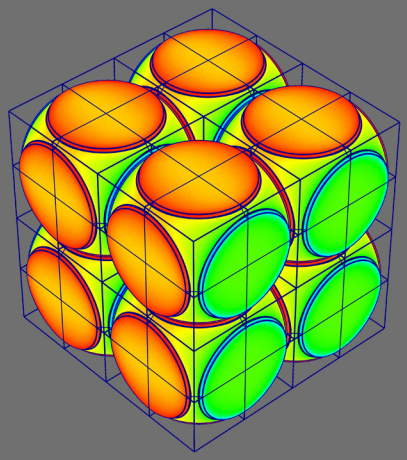
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 2, с. 30–64

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/279/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.101
09.01.2026 18:57:04

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-2-2862

Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача о построении теории расчета напряженно-деформированного состояния тонких многослойных упругих пластин, у которых на границе раздела слоев заданы линеаризованные условия проскальзывания. Решение данной задачи строится с помощью асимптотического анализа общих уравнений трехмерной теории упругости с условиями неидеального контакта слоев. Асимптотический анализ проводится по малому геометрическому параметру, представляющему отношение толщины пластины к ее характерной длине. Получены рекуррентные формулировки локальных квазиодномерных задач теории упругости с проскальзыванием. Для этих задач получены явные аналитические решения. Представлен вывод осредненных уравнений упругого равновесия многослойных пластин с учетом проскальзыванием слоев. Показано, что за счет эффекта проскальзывания слоев система осредненных уравнений теории многослойных пластин имеет повышенный — пятый порядок производных, в отличие от классического четвертого порядка, который имеет место в теории пластин Кирхгофа–Лява. Показано, что асимптотическая теория позволяет получить явное аналитическое выражение для всех шести компонент тензора напряжений в слоях пластины. Как частный случай рассмотрена задача о расчете напряженно-деформированного состояния четырехслойной пластины при изгибе равномерным давлением, с одним коэффициентом скольжения. Получено полное аналитическое решение этой задачи, в том числе — получены явные выражения для всех ненулевых компонент тензора напряжений. Проведен численный анализ решения осредненной задачи для композитной пластины, у которой слои представляют собой однонаправленно-армированные волокнистые материалы, ориентированные под разными углами. Проведен сравнительный анализ влияния углов армирования волокон и коэффициента скольжения слоев на перемещения пластины и распределение напряжений в слоях. Показано, что задача об изгибе пластины с проскальзыванием допускает существование спектра критических значений коэффициента скольжения, при переходе через которые перемещения и напряжения в слоях пластины существенным образом меняются, причем эти критические значения зависят от угла армирования слоев композита.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, малый параметр, тонкие пластины, композиты, проскальзывание слоев, угол армирования, изгиб*

Введение. Для ряда инженерных конструкций существует проблема расчета прочности деталей, работающих в условиях неидеального контакта с другими элементами конструкций. Например, некоторые типы многослойных рессор функционируют в условиях проскальзывания слоев друг относительно друга, за счет чего достигается дополнительный эффект рассеивания энергии деформирования [1]. Расчет многослойных пластин и оболочек с проскальзы-

ванием слоев является неклассической задачей, существует лишь ограниченное число работ, в которых строится модель, обобщающая классические теории типа Кирхгофа–Лява и Тимошенко на случай слоев с неидеальным контактом [2–6]. Обоснование допущений, на которых основаны эти теории, является существенно более сложной проблемой, чем для случая идеального контакта слоев [7–10]. В работе [11] впервые была предложена теория тонких двуслойных пластин с условиями проскальзывания слоев, которая основана на строгом анализе общих трехмерных уравнений теории упругости с учетом условий неидеальности контакта. Эта теория содержит лишь геометрическое допущение о тонкостенности пластин и допущении о малости нагрузки, действующей на пластину. Решение трехмерной задачи теории упругости с неидельным контактом в этой теории строится с помощью метода асимптотических разложений, который был эффективно развит для большого числа задач механики тонкостенных пластин и оболочек [12–20]. Разработанный вариант асимптотической теории пластин является достаточно универсальным, он применим для пластин с различными свойствами, в том числе и с нелинейными. Этот метод позволяет получать формулы для всех 6 напряжений с использованием только решений для осредненной теории пластин. Точность этого метода, подтвержденная сравнением с точной трехмерной теорией, очень высокая [16].

Цель настоящей работы — дальнейшее развитие асимптотической теории пластин для случая многослойных пластин с проскальзыванием всех слоев относительно друг друга, а также анализ особенностей теории на частном примере задачи об изгибе многослойной пластины равномерным давлением.

Постановка 3-х мерной задачи теории упругости для многослойной пластины с проскальзыванием слоев. Рассмотрим в рамках трехмерной теории упругости [21] задачу о деформировании тонкой многослойной упругой анизотропной пластины с наличием проскальзывания слоев друг относительно друга при воздействии поперечных и сдвиговых нагрузок на боковых поверхностях, с условиями закрепления на краях пластины:

$$\begin{cases} \nabla_j \sigma_{ij}^{\{m\}} = 0; \ \varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\{m\}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_j u_i^{\{m\}} + \nabla_i u_j^{\{m\}}\right); \\ \sigma_{ij}^{\{m\}} = C_{ijkl}^{\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\{m\}}; \ m = 1, 2, ..., N, \\ \Sigma_m : \sigma_{i3}^{\{m\}} = \sigma_{i3}^{\{m+1\}}, \ u_3^{\{m\}} = u_3^{\{m+1\}}, \\ u_I^{\{m+1\}} - u_I^{\{m\}} = \theta^{\{m\}} \sigma_{I3}^{\{m\}}; \ m = 1, 2, ..., N-1, \\ \Sigma_{3+} : \sigma_{i3}^{\{N\}} = S_{i+}, \ \Sigma_{3-} : \sigma_{i3}^{\{1\}} = S_{i-}; \\ \Sigma_T : u_i^{\{m\}} = u_{ei}, \ m = 1, 2, ..., N. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{ij}^{\{m\}}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{kl}^{\{m\}}$ — компоненты тензора малых деформаций; $u_i^{\{m\}}$ — компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \partial / \partial x_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам $\tilde{x}_j$ (ось Ox_3 направлена по нормали к поверхностям пластины); $C_{ijkl}^{\{m\}}$ — компоненты тензора модулей упругости слоев; $\{m\}$ — индекс слоев $m = 1, 2, ..., N$; $\Sigma_{3\pm} = \{x_3 = \pm h/2\}$ — внешняя и внутренняя поверхности пластины; h — суммарная толщина многослойной пластины; Σ_T — торцевая поверхность пластины; $\Sigma_m = \{\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3^{\{m\}}\}$ — поверхности контакта слоев; $\theta^{\{m\}}$ — коэффициенты скольжения слоев друг относительно друга, $\theta^{\{m\}} \geq 0$.

Система уравнений (1) включает в себя уравнения равновесия, соотношения Коши, обобщенный закон Гука, условия на поверхностях контакта слоев Σ_m (неидеальный контакт с наличием скольжения), на внешних поверхностях пластины Σ_{3+} (на них заданы векторы усилий S_{i+} и S_{i-}) и на торцевой поверхности Σ_T (заданы векторы пермещений u_{ei}). Все слои пластины полагаем моноклинными материалами, поэтому тензоры $C_{ijkl}^{\{m\}}$ содержат не более 13 ненулевых констант [22]).

Запишем систему уравнений (1) в безразмерном виде, для этого введем характерные значения: L — длину пластины и σ_0 — напряжений. Напряжения $\sigma_{ij}^{\{m\}}$ и модули упругости $C_{ijkl}^{\{m\}}$ делим на σ_0, координаты $\tilde{x}_k$ и перемещения — делим на L, а коэффициенты скольжения в (1) обезразмериваем следующим образом: $\theta^{\{m\}} \to \theta^{\{m\}} \sigma_0 / L$. В результате получим безразмерные переменные, сохраним для них те же обозначения, что и для размерных величин, за исключением координат: $x_k = \tilde{x}_k / L$, тогда система уравнений (1) в безразмерном виде формально сохраняет свой вид.

Асимптотические разложения для пластины с проскальзыванием. Введем малый параметр $\kappa = h / L << 1$, как отношение общей толщины пластины h к длине пластины L, а также введем также глобальные x_k и локальную ξ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L, \ \xi = x_3 / \kappa, \ k = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi < 0,5$, а поверхности контакта слоев имеют координаты

$\xi = a_m = \tilde{x}_3^{\{m\}} / h$, $m = 1, 2, ..., N-1$, $a_0 = -0,5$, $a_N = 0,5$. Обозначим толщины слоев в безразмерных координтах

$$h_m = a_m - a_{m-1},\ m = 1, 2, ..., N.$$

Полагаем, что на внешних поверхностях Σ_{3+} пластины заданы давления $\tilde{p}_{\pm}$ имеющие порядок малости $O(\kappa^3)$, тогда векторы усилий $S_{i\pm}$ имеют следующий вид:

$$S_{i\pm} = -\kappa^3 p_{\pm}(x_I)\delta_{i3}. \tag{3}$$

Решение задачи (1) будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальных координат

$$u_k^{\{m\}} = u_k^{(0)}\left(x_I\right) + \kappa u_k^{\{m\}(1)}\left(x_I, \xi\right) + \kappa^2 u_k^{\{m\}(2)}\left(x_I, \xi\right) + ..., \tag{4}$$

где $I = 1, 2;\ m = 1, 2, ..., N;\ k = 1, 2, 3$.

Подставляя разложения (3) в соотношения Коши в системе (1), с учетом правила дифференцирования функций локальных координат [15], получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{\{m\}} = \varepsilon_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{\{m\}(2)} + ..., \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}\right), \\
\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,J}^{(0)} + u_{I/3}^{\{m\}(1)}\right), \\
\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)} = u_{3/3}^{\{m\}(1)}, \\
\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{\{m\}(n)} + u_{J,I}^{\{m\}(n)}\right), \\
\varepsilon_{I3}^{\{m\}(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{\{m\}(n)} + u_{I/3}^{\{m\}(n+1)}\right), \\
\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)} = u_{3/3}^{\{m\}(n+1)}, \quad n = 1, 2...
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь и далее введены следующие обозначения для производных:

$$u_{I/3}^{\{m\}(1)} = \frac{\partial u_i^{\{m\}(1)}}{\partial \xi},\ u_{i,j}^{\{m\}(1)} = \frac{\partial u_i^{\{m\}(1)}}{\partial x_j},$$

а также введены операции осреднения по толщинам слоев

$$\left\langle u_i^{\{m\}(n)} \right\rangle_m = \int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} u_i^{\{m\}(n)} d\xi, \ \left\langle u_i^{(n)} \right\rangle = \int\limits_{-0,5}^{0,5} u_i^{(n)} d\xi = \sum_{m=1}^{N} \left\langle u_i^{\{m\}(n)} \right\rangle_m ,$$
$$\left\{ f^{\{m\}(n)} \right\}_\xi = \int\limits_{-0.5}^{\xi} \left(f^{\{m\}(n)}\left(\tilde{\xi}\right) - \left\langle f^{\{m\}(n)} \right\rangle \right) d\tilde{\xi}. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) в закон Гука в системе (1), с учетом моноклинности материалов слоев, получаем асимптотические выражения для напряжений:

$$\sigma_{ij}^{\{m\}} = \sigma_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{\{m\}(2)} + ..., \tag{8}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(n)} = C_{IJKL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)} + C_{IJ33}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}; \ \sigma_{I3}^{\{m\}(n)} = 2C_{I3K3}^{\{m\}} \varepsilon_{K3}^{\{m\}(n)};$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}(n)} = C_{33KL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)} + C_{3333}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}, \ n = 0,1,2,3... \tag{9}$$

Локальные контактные задачи. Подставляя разложения (4), (5) и (7) в уравнения равновесия и граничные условия системы (1), и приравнивая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях от κ к некоторым величинам $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных контактных задач теории упругости.

Задача для нулевого приближения имеет вид:

$$\sigma_{i3/3}^{\{m\}(0)} = 0,$$
$$\sigma_{I3}^{\{m\}(0)} = 2C_{I3k3}^{\{m\}} \varepsilon_{k3}^{\{m\}(0)};$$
$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)} = C_{IJKL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJ33}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(0)};$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}(0)} = C_{33KL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(0)};$$
$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)} \right);$$
$$\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{\{m\}(1)} \right), \tag{10}$$
$$\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)} = u_{3/3}^{\{m\}(1)}; m = 1,2,...,N;$$
$$\Sigma_{3+} : \sigma_{i3}^{\{N\}(0)} = 0; \ \Sigma_{3-} : \sigma_{i3}^{\{1\}(0)} = 0;$$
$$\Sigma_m : \sigma_{i3}^{\{m\}(0)} = \sigma_{i3}^{\{m+1\}(0)}, u_3^{\{m\}(1)} = u_3^{\{m+1\}(1)},$$
$$u_I^{\{m+1\}(1)} - u_I^{\{m\}(1)} = \theta^{\{m\}} \sigma_{I3}^{\{m\}(1)}, \ m = 1,2,...,N-1;$$
$$\Sigma_m : \sigma_{I3}^{\{m\}(0)} = 0, \ m = 1,2,...,N-1.$$

Задачи для более высоких приближений имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{i3/3}^{\{m\}(n)} + \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n-1)} = h_i^{(n-1)};\ \sigma_{I3}^{\{m\}(n)} = 2C_{I3k3}^{\{m\}}\varepsilon_{k3}^{\{m\}(n)}; \\ \sigma_{IJ}^{\{m\}(n)} = C_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)} + C_{IJ33}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}; \\ \sigma_{33}^{\{m\}(n)} = C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)} + C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}; \\ \varepsilon_{IJ}^{\{m\}(n)} = \dfrac{1}{2}\left(u_{I,J}^{\{m\}(n)} + u_{J,I}^{\{m\}(n)}\right);\ \varepsilon_{I3}^{\{m\}(n)} = \dfrac{1}{2}\left(u_{3,I}^{\{m\}(n)} + u_{I/3}^{\{m\}(n+1)}\right); \\ \varepsilon_{33}^{\{m\}(n)} = u_{3/3}^{\{m\}(n+1)};\ m = 1,2,\ldots,N; \\ \Sigma_{3+} : \sigma_{i3}^{\{N\}(n)} = S_{i+}^{(n)};\ \Sigma_{3-} : \sigma_{i3}^{\{1\}(n)} = S_{i-}^{(n)}; \\ \Sigma_m : \sigma_{i3}^{\{m\}(n)} = \sigma_{i3}^{\{m+1\}(n)},\ u_3^{\{m\}(n+1)} = u_3^{\{m+1\}(n+1)}, \\ u_I^{\{m+1\}(n+1)} - u_I^{\{m\}(n+1)} = \theta^{\{m\}}\sigma_{I3}^{\{m\}(n+1)}, \\ m = 1,2,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $S_{i\pm}^{(n)} = S_{i\pm}\delta_{n3},\ n = 1,2,3\ldots.$

Уравнения равновесия в системе (1) после введения функций $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$ принимают вид:

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \ldots = 0. \tag{12}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (10) являются функции $u_j^{\{m\}(1)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(0)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(0)}$, зависящие от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{\{m\}(0)}\left(x_J\right)$. Решением задачи (11) являются функции $u_j^{\{m\}(n+1)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(n)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(n)}$, а функции $u_j^{\{m\}(n)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(n-1)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(n-1)}$ в этой задаче — входные данные.

Решение задачи нулевого приближения. Решение уравнений равновесий с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения (10) имеет вид:

$$\sigma_{i3}^{\{m\}(0)} = 0,\ -0,5 < \xi < 0,5. \tag{13}$$

Подставляя (13) в определяющие соотношения системы (3) для $\sigma_{i3}^{\{m\}(0)}$, получим:

$$C_{I3k3}^{\{m\}}\varepsilon_{k3}^{\{m\}(0)} = 0,\ C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)} = 0,$$
$$\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)} = -Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{15}$$
$$Z_{3KL}^{\{m\}} = C_{3333}^{\{m\}-1}C_{33KL}^{\{m\}}.$$

Подставляя (15) в определяющие соотношения для $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$, находим

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)} = C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{16}$$
$$C_{IJKL}^{\{m\}(0)} = C_{IJKL}^{\{m\}} - C_{IJ33}^{\{m\}}Z_{3KL}^{\{m\}}. \tag{17}$$

Подставляя (15) в соотношения Коши для $\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)}$, $\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}$ в системе (10), находим уравнения для перемещений $u_I^{\{m\}(1)}$ и $u_3^{\{m\}(1)}$

$$u_{I/3}^{\{m\}(1)} = -u_{3,I}^{(0)},$$
$$u_{3/3}^{\{m\}(1)} = -Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}. \tag{18}$$

Проинтегрируем эти уравнения по ξ

$$u_I^{\{m\}(1)} = -\xi u_{3.I}^{(0)} + U_I^{\{m\}},$$
$$u_3^{\{m\}(1)} = -\xi Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{\{m\}}, \tag{19}$$

где $U_I^{\{m\}}$, $U_3^{\{m\}}$ — константы интегрирования. Для их определения подставим (19) в граничные условия системы (10) на поверхностях раздела $\xi = a_m$, а также в условие нормировки [11, 15] $<u_i^{(1)}>=0$, тогда для $U_I^{\{m\}}$, $U_3^{\{m\}}$ получим систему следующего вида:

$$U_I^{\{m+1\}} = U_I^{\{m\}} + \theta^{\{m\}}\sigma_{I3}^{\{m\}(1)}(a_m),$$
$$\sum_{m=1}^{N} U_I^{\{m\}}h_m = 0,$$
$$U_3^{\{m+1\}} = U_3^{\{m\}} + a_m(Z_{3KL}^{\{m+1\}} - Z_{3KL}^{\{m\}})\varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{20}$$
$$\sum_{m=1}^{N} U_3^{\{m\}}h_m = <\xi Z_{3KL}^{\{m\}}>\varepsilon_{KL}^{(0)}.$$

Решая систему этих уравнений, находим $U_I^{\{m\}}$ и $U_3^{\{m\}}$

$$U_I^{\{m\}} = -\sum_{k=1}^{N-1} H_{km}\theta^{\{k\}}\sigma_{I3}^{\{k\}(1)}(a_k),\ U_3^{\{m\}} = -B_{KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{21}$$

где введены обозначения

$$H_{km} = \begin{cases} H_k - 1, & 1 \le k < m; \\ H_k, & k \ge m, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \;\; m = 1, 2, \ldots, N;$$

$$H_k = \sum_{m=k+1}^{N} h_m, \tag{22}$$

$$B_{KL}^{\{m\}} = \sum_{k=1}^{N-1} H_{km} a_m (Z_{3KL}^{\{m+1\}} - Z_{3KL}^{\{m\}}) + < \xi Z_{3KL}^{\{m\}} > .$$

Подставляя константы (21) в (19), находим выражения для перемещений в слоях

$$u_I^{\{m\}(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} - \sum_{k=1}^{N-1} H_{km} \theta^{\{k\}} \sigma_{I3}^{\{k\}(1)}(a_k),$$

$$u_3^{\{m\}(1)} = -\varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL}^{\{m\}}, \tag{23}$$

$$U_{3KL}^{\{m\}} = \xi Z_{3KL}^{\{m\}} + B_{KL}^{\{m\}}.$$

Решение локальных задач для высших приближений. Рассмотрим локальные задачи (11) для более высоких приближений. Решение уравнений равновесия в (11) вместе с граничными условиями $\sigma_{i3}^{\{1\}(n)} = -p_- \delta_{i3} \delta_{n2}$ имеет вид:

$$\sigma_{i3}^{\{m\}(n+1)} = -p_- \delta_{i3} \delta_{n2} - \int_{-0,5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)} d\xi + h_i^{(n)} (\xi + 0,5), \tag{24}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \;\; m = 1, 2, \ldots, N.$$

Подставляя (24) в граничное условие $\sigma_{i3}^{\{N\}(n)} = -p_+ \delta_{i3} \delta_{n2}$ на поверхности $\xi = 0,5$ получаем соотношения для нахождения функций $h_i^{(n)}$

$$-p_- \delta_{i3} \delta_{n2} - \int_{-0,5}^{0,5} \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)} d\xi + h_i^{(n)} = -p_+ \delta_{i3} \delta_{n2}. \tag{25}$$

Отсюда находим

$$h_i^{(n)} = -\Delta p \delta_{i3} \delta_{n2} + < \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)} >, \tag{26}$$

где обозначен перепад давления

$$\Delta p = p_+ - p_-. \tag{27}$$

С учетом (26) выражения (24) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{\{m\}(n+1)} = -\left\{\sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)}\right\}_{\xi} - \left(p_{-} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right)\delta_{i3}\delta_{n2},$$
$$n = 0,1,2,..., \ m = 1,2,...,N. \tag{28}$$

Формулы (27) являются рекуррентными, подставляя последовательно эти формулы друг в друга при различных n, вычислим напряжения $\sigma_{i3}^{\{m\}(n+1)}$ до третьего приближения

$$\sigma_{I3}^{\{m\}(1)} = -\left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi}, \ \sigma_{I3}^{\{m\}(2)} = -\left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}(1)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi} = 0, \ \sigma_{33}^{\{m\}(2)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{\xi} = \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}(3)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(2)}\right\}_{\xi} - \left(p_{-} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right) = \tag{29}$$
$$= \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(1)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi} - \left(p_{-} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right),$$
$$m = 1,2,...,N.$$

В эти выражения входят напряжения $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}$. Подставляя формулу (16) для $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$ в выражения (28) (29) для сдвиговых напряжений, находим

$$\sigma_{I3}^{\{m\}(1)} = -A_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL,J}^{(0)}, \ m = 1,2,...,N;$$
$$A_{IJKL}^{\{m\}} = \left\{C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi}. \tag{30}$$

Для вычисления $\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}$ используем определяющие соотношения в задаче (11) при $n = 1$

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = C_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)} + C_{IJ33}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}, \ m = 1,2,...,N. \tag{31}$$

Чтобы найти деформации $\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}$, то получаем аналог формулы (15) для первого приближения

$$\sigma_{33}^{\{m\}(1)} = C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)} + C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}. \tag{32}$$

Так как согласно (29) $\sigma_{33}^{\{m\}(1)} = 0$, то получаем аналог формулы (15) для первого приближения

$$\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)} = -Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в соотношение (31), находим аналог формулы (16) для первого приближения

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)}. \tag{34}$$

Деформации $\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)}$, входящие в эту формулу, находим из кинематических соотношений в системе (11)

$$\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{\{m\}(1)} + u_{J,I}^{\{m\}(1)}). \tag{35}$$

Подставляя формулу (23) в (34), получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{\{m\}(1)} + u_{J,I}^{\{m\}(1)}) = \\ = -\xi u_{3,IJ}^{(0)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} H_{km}\theta^{\{k\}}(\sigma_{I3,J}^{\{k\}(1)}(a_k) + \sigma_{J3,I}^{\{k\}(1)}(a_k)).\end{gathered} \tag{36}$$

С помощью формул (30) найдем сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{\{k\}(1)}(a_k)$ на поверхностях раздела слоев, входящие в уравнение (36)

$$\sigma_{I3}^{\{k\}(1)}(a_k) = -A_{IJKL}^{\{k\}}(a_k)\varepsilon_{KL,J}^{(0)}, \ k = 1, 2, ..., N. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36), получаем

$$\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)} = -\xi u_{3,IJ}^{(0)} - \Phi_{IJMKLN}^{\{m\}}\varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \ m = 1, 2, ..., N, \tag{38}$$

где обозначены

$$\Phi_{IJMKLN}^{\{m\}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} H_{km}\theta^{\{k\}}(A_{IMKL}^{\{k\}}(a_k)\delta_{JN} + A_{JMKL}^{\{k\}}(a_k)\delta_{IN}). \tag{39}$$

Подставляя теперь формулу (38) в (34), находим напряжения

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = -\xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)} u_{3,KL}^{(0)} - W_{IJMKLN}^{\{m\}}\varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \ m = 1, 2, ..., N, \tag{40}$$

где

$$W_{IJMKLN}^{\{m\}} = C_{IJSP}^{\{m\}(0)}\Phi_{SPMKLN}^{\{m\}}. \tag{41}$$

Если подставить формулу (40) в выражения (29) для $\sigma_{I3}^{\{m\}(2)}$, то получим

$$\sigma_{I3}^{\{m\}(2)} = \left\{\xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi} u_{3,KLJ}^{(0)} + \left\{W_{IJMKLN}^{\{m\}}\right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,MNJ}^{(0)}, \ m = 1, 2, ..., N. \tag{42}$$

Вводя обозначения

$$V_{IJKL}^{\{m\}} = \left\{\xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\right\}_{\xi}, \ \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}} = \left\{W_{IJMKLN}^{\{m\}}\right\}_{\xi} \tag{43}$$

формулы (42) для сдвиговых напряжений второго приближения можно записать следующим образом:

$$\sigma_{I3}^{\{m\}(2)} = V_{IJKL}^{\{m\}} u_{3,KLJ}^{(0)} + \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}}\varepsilon_{KL,MNJ}^{(0)}, \ m = 1, ..., N. \tag{44}$$

Подставляя формулу (16) в выражения (29) для $\sigma_{33}^{\{m\}(2)}$, получим выражение для поперечных напряжений второго приближения

$$\sigma_{33}^{\{m\}(2)} = E_{IJKL}^{\{m\}(2)} \varepsilon_{KL,IJ}^{(0)}, \ m = 1, ..., N, \tag{45}$$

где обозначено

$$E_{IJKL}^{\{m\}(2)} = \left\{ \left\{ C_{IJKL}^{\{m\}(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi}, \ m = 1, ..., N. \tag{46}$$

Подставляя формулу (40) в выражения (29) для $\sigma_{33}^{\{m\}(3)}$, получим выражение для поперечных напряжений третьего приближения

$$\begin{gathered} \sigma_{33}^{\{m\}(3)} = -U_{IJKL}^{\{m\}(3)} u_{3,IJKL}^{(0)} - \theta \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}(3)} \varepsilon_{KL,MNIJ}^{(0)} - \\ -\left(p^{\{1\}} + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) \right), \ m = 1, ..., N, \end{gathered} \tag{47}$$

где обозначены

$$U_{IJKL}^{\{m\}(3)} = \left\{ \left\{ \xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi}, \ \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}(3)} = \left\{ \left\{ W_{IJMKLN}^{\{m\}} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi}. \tag{48}$$

Напряжения в слоях пластины. Сохраним в выражениях (8) для напряжений только главные члены: для $\sigma_{IJ}^{\{m\}}$ это будут члены до первой степени малого параметра κ, для сдвиговых напряжений $\sigma_{I3}^{\{m\}*}$ — это члены до второгого порядка малости, а для $\sigma_{33}^{\{m\}*}$ — третьего порядка

$$\begin{gathered} \sigma_{IJ}^{\{m\}} = \sigma_{IJ}^{\{m\}(0)} + \kappa \sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}, \\ \sigma_{I3}^{\{m\}} = \sigma_{I3}^{\{m\}(0)} + \kappa \sigma_{I3}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \sigma_{I3}^{\{m\}(2)}, \\ \sigma_{33}^{\{m\}} = \sigma_{33}^{\{m\}(0)} + \kappa \sigma_{33}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \sigma_{33}^{\{m\}(2)} + \kappa^3 \sigma_{33}^{\{m\}(3)}. \end{gathered} \tag{49}$$

Подставляя в первую формулу выражения (16) и (40), получаем выражение для продольных напряжений в слоях

$$\begin{gathered} \sigma_{IJ}^{\{m\}} = C_{IJKL}^{\{m\}(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \xi \kappa C_{IJKL}^{\{m\}(0)} u_{3,KL}^{(0)} - \kappa W_{IJMKLN}^{\{m\}} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \\ m = 1, ..., N. \end{gathered} \tag{50}$$

Подставляя во вторую формулу в (49) выражения (13), (29) и (44), получаем выражение для сдвиговых напряжений в слоях

$$\begin{gathered} \sigma_{I3}^{\{m\}} = -\kappa A_{IJKL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 V_{IJKL}^{\{m\}} u_{3,KLJ}^{(0)} + \kappa^2 \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}} \varepsilon_{KL,MNJ}^{(0)}, \\ m = 1, ..., N. \end{gathered} \tag{51}$$

Подставляя в третью формулу в (48) выражения (13), (27), (28), (45) и (47), получаем выражение для поперечных напряжений в слоях

$$\sigma_{33}^{\{m\}} = \kappa^2 E_{IJKL}^{\{m\}(2)} \varepsilon_{KL,IJ}^{(0)} - \kappa^3 U_{IJKL}^{\{m\}(3)} u_{3,IJKL}^{(0)} - \\ -\kappa^3 \tilde{W}_{IJMKLN}^{\{m\}(3)} \varepsilon_{KL,MNIJ}^{(0)} - \kappa^3 \left(p^{\{1\}} + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) \right), \ m = 1,...,N. \tag{52}$$

Осредненные уравнения равновесия для многослойной пластины с неидеальным контактом слоев. Подставляя выражения (26) в асимптотическое разложение (12) уравнений равновесия пластины, получим

$$< \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(0)} > + \kappa < \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(1)} > + \kappa^2 (< \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(2)} > - \Delta p \delta_{i3}) + ... = 0. \tag{53}$$

Домножая асимптотическое разложение уравнений равновесия пластины (1) на $\xi\kappa$ и интегрируя их по толщине, получаем следующее вспомогательное уравнение

$$\kappa (< \xi \sigma_{IJ,J}^{\{m\}(0)} > - < \sigma_{I3}^{\{m\}(1)} >) + \kappa^2 (< \xi \sigma_{IJ,J}^{\{m\}(1)} > - < \sigma_{I3}^{\{m\}(2)} >) + ... = 0. \tag{54}$$

Здесь учтено, что $< \xi \sigma_{I3/3}^{\{m\}(1)} > = - < \sigma_{I3}^{\{m\}(1)} >$, $< \xi \sigma_{I3/3}^{\{m\}(2)} > = - < \sigma_{I3}^{\{m\}(2)} >$ в силу граничных условий на $\Sigma_{3-} : \sigma_{I3}^{\{1\}(n)} = 0$ и $\Sigma_{3+} : \sigma_{I3}^{\{N\}(n)} = 0.$

Введем стандартным образом [13–19] усилия T_{IJ} моменты M_{IJ} и перерезывающие силы Q_1 в пластине

$$T_{IJ} = < \sigma_{IJ}^{\{m\}(0)} > + \kappa < \sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} > + \kappa^2 ..., \\ Q_I = \kappa < \sigma_{I3}^{\{m\}(1)} > + \kappa^2 < \sigma_{I3}^{\{m\}(2)} > + ..., \\ M_{IJ} = \kappa < \xi \sigma_{IJ}^{\{m\}(0)} > + \kappa^2 < \xi \sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} > + \kappa^3 .... \tag{55}$$

Тогда из (53) и (54) получаем уравнения равновесия и моментов для двухслойной пластины, которые совпадают с соответствующими уравнениями для пластин без трения

$$T_{IJ,J} = 0, \ Q_{J,J} = \Delta \bar{p}, \ M_{IJ,J} - Q_I = 0, \tag{56}$$

здесь обозначено $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Подставим в формулы (55) для T_{IJ} и M_{IJ} выражения для напряжений $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}$, вычисляемых по формулам (16) и (40), тогда получим определяющие соотношения для пластины со проскальзыванием слоев

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} - H_{IJKLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \\ M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} - F_{IJKLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}. \tag{57}$$

Здесь обозначены $\bar{C}_{IJKL}$ — мембранные, B_{IJKL} — смешанные, D_{IJKL} — изгибные жесткости пластины, которые совпадают с класси-

ческими жесткостями пластин без трения, а также жесткости пластины H_{IJKLMN} и F_{IJKLMN}, обусловленные проскальзыванием слоев

$$\bar{C}_{IJKL} = < C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >, \; B_{IJKL} = \kappa < \xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >,$$
$$D_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >, \tag{58}$$
$$H_{IJKLMN} = \kappa < W_{IJMKLN}^{\{m\}} >, \; F_{IJKLMN} = \kappa^2 < \xi W_{IJMKLN}^{\{m\}} > .$$

В (57) введены также обозначения для компонент тензора искривлений пластины η_{KL}, η_{KL}, которые вместе с соотношениями для деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ замыкают осредненную систему уравнений (5) и (56)

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)},$$
$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}). \tag{59}$$

После подстановки (59) в (57), и (57) в (56), получим систему трех уравнений относительно 3 неизвестных функций — прогиба $u_3^{(0)}$ и продольных перемещений $u_I^{(0)}$, как и в классической теории пластин Кирхгофа–Лява (ТПКЛ) с идеальным контактом слоев. Однако в отличие от ТПКЛ, система уравнений асимптотической теории пластин с проскальзыванием слоев (АТПП) имеет более высокий (пятый вместо третьего) порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$ функций.

Решение задачи изгиба четырехслойной пластины с учетом проскальзывания слоев. Рассмотрим частный случай, когда $N = 4$, т.е. когда имеется четырехслойная пластина прямоугольной формы.. Будем полагать, что слои 1 и 2 пластины, а также 3 и 4 соединены идеальным контактом, а между слоями 2 и 3 имеется проскальзывание, т.е.

$$\theta^{\{1\}} = \theta^{\{3\}} = 0, \; \theta^{\{2\}} \equiv \theta > 0. \tag{60}$$

Матрица H_{km} в (22) для случая четырех слоев имеет следующие компоненты

$$H_{21} = H_{22} = H_2 = 1 - h_1 - h_2,$$
$$H_{23} = H_{24} = H_2 - 1 = -(h_1 + h_2). \tag{61}$$

С учетом (60) и (61) компонента $\Phi_{111111}^{\{m\}}$ тензора $\Phi_{IJKLMN}^{\{m\}}$ принимает вид

$$\Phi_{111111}^{\{m\}} = \theta^{\{2\}} \Phi^{\{m\}} A_{1111}^{\{2\}}(a_2), \; \Phi^{\{m\}} = H_{2m}, \; m = 1, ..., 4. \tag{62}$$

Будем полагать, что все слои пластины являются ортотропными материалами [22], с главными осями ортотропии $O\tilde{x}_i^{\{m\}}$, $m=1,...,4$, причем все оси $O\tilde{x}_3^{\{m\}}=O\tilde{x}_3$ — совпадают с осью $O\tilde{x}_3$, ортогональной к плоскости слоев пластины. Оси $O\tilde{x}_1^{\{m\}}$ образуют угол $\phi^{\{m\}}$ с осью $O\tilde{x}_1$ единой декартовой системы координат $O\tilde{x}_i$. Будем полагать, что углы поворота главных осей ортотропии слоев 1 и 2, а также 3 и 4 отличаются только знаком: $\phi^{\{2\}}=-\phi^{\{1\}}$, $\phi^{\{3\}}=-\phi^{\{4\}}$. Тогда компоненты тензора модулей упругости слоев $C_{ijkl}^{\{m\}}$ вычисляются по формуле [22]

$$C_{ijkl}^{\{m\}}=C_{snpq}^{0}Q^{\{m\}}{}_{is}Q^{\{m\}}{}_{jn}Q^{\{m\}}{}_{kp}Q^{\{m\}}{}_{\ell q}, \tag{63}$$

здесь $Q^{\{m\}}{}_{\ell q}$ — элементы матрицы поворота слоя с номером m на угол $\phi^{\{m\}}$, а C_{snpq}^{0} — компоненты тензора модулей упругости слоев в главных осях анизотропии $O\tilde{x}_i^{\{m\}}$, полагаем эти тензоры совпадающими для всех слоев.

Если толщины слоев h_1, h_2, а также h_3, h_4 — попарно совпадают, то пластина в целом является ортотропным материалом, а осредненные тензоры с компонентами $\overline{C}_{IJKL}$, B_{IJKL}, D_{IJKL} — являются ортотропными [22].

Рассмотрим задачу изгиба четырехслойной пластины равномерно распределенным давлением $\Delta\overline{p}$. Граничные условия выберем соответствующими условиям шарнирного закрепления краев пластины:

$$x=0:\ u_3^{(0)}=0,\ M_{11}=0,\ u_1^{(0)}=0,\ u_{1,111}^{(0)}=0, \tag{64}$$

$$x=1:\ u_3^{(0)}=0,\ M_{11}=0,\ T_{11}=0,\ u_{1,111}^{(0)}=0, \tag{65}$$

$$x_2=0\ \text{ и }\ x_2=b:\ u_2^{(0)}=0,\ u_{2,222}^{(0)}=0,\ M_{22}=0,\ u_{3,2}^{(0)}=0, \tag{66}$$

здесь $x_1=x$ — безразмерная продольная координата пластины, b — безразмерная ширина пластины.

Решение системы уравнений (56)-(59) с граничными условиями (64)–(66) будем искать в виде:

$$u_1^{(0)}=u_1^{(0)}(x),\ u_3^{(0)}=u_3^{(0)}(x),\ u_2^{(0)}=0. \tag{67}$$

С учетом ортотропии пластины тождественно ненулевыми будут следующие функции: η_{11}, $\varepsilon_{11}^{(0)}$, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22} — все они зависят только от координаты x. Тогда система уравнений (56)–(59) сводится к системе двух уравнений

$$\bar{C}_{1111}u^{(0)}_{1,11} - B_{1111}u^{(0)}_{3,111} - \theta\tilde{H}u^{(0)}_{1,1111} = 0, \tag{68}$$

$$B_{1111}u^{(0)}_{1,111} - D_{1111}u^{(0)}_{3,1111} - \theta\tilde{F}\,u^{(0)}_{1,11111} - \Delta\bar{p} = 0. \tag{69}$$

Здесь использованы формулы (41) и (58), которые с учетом (62) представлены в виде

$$\begin{gathered} H_{111111} = \theta\tilde{H},\ F_{111111} = \theta\tilde{F}, \\ \tilde{H} = \kappa < C^{\{m\}(0)}_{1111}\Phi^{\{m\}} > A^{\{2\}}_{1111}(a_2),\ \tilde{F} = \kappa^2 < \xi C^{\{m\}(0)}_{1111}\Phi^{\{m\}} > A^{\{2\}}_{1111}(a_2). \end{gathered} \tag{70}$$

Граничные условия (66) с учетом (67) удовлетворяются тождественно, поэтому к системе (68),(69) присоединяем только условия (64), (65).

Система уравнений (68), (69) имеет 5-й порядок производных относительно функции $u^{(0)}_1$, поэтому граничные условия (64),(65) дополним еще одним — условием нулевой деформации $\varepsilon^{(0)}_{11} = u^{(0)}_{1,1}$ на защемленном торце:

$$x_1 = 0:\ u^{(0)}_{1,1} = 0. \tag{71}$$

Выражая из уравнения (69) производную $u^{(0)}_{3,1111}$ и подставляя ее в первое уравнение этой системы, продифференцированное предварительно по x, получим следующее уравнение для продольного перемещения $u^{(0)}_1$:

$$\bar{C}u^{(0)}_{1,111} - \theta\bar{F}u^{(0)}_{1,11111} + S\Delta\bar{p} = 0, \tag{72}$$

где обозначены коэффициенты

$$\begin{gathered} \bar{C} = \bar{C}_{1111} - \frac{(B_{1111})^2}{D_{1111}}, \\ \bar{F} = \tilde{H} - \frac{B_{1111}}{D_{1111}}\tilde{F},\ S = \frac{B_{1111}}{D_{1111}}. \end{gathered} \tag{73}$$

Обозначая $v = u^{(0)}_{1,111}$, уравнение (72) перепишем в виде

$$\theta\bar{F}v_{,11} - \bar{C}v = S\Delta\bar{p}. \tag{74}$$

Рассмотрим случай, когда $\bar{F} \equiv -F_0 < 0$. Случай $\bar{F} > 0$ был рассмотрен ранее. Общее решение уравнения (69) при $\bar{F} < 0$, когда $\Delta\bar{p} = const$, имеет следующий вид

$$v = V_0 \sin\alpha x + V_1 \cos\alpha x - S_2\Delta\bar{p}, \tag{75}$$

где

$$S_2 = \frac{S}{F_0}, \ \alpha = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\theta F_0}}, \tag{76}$$

а V_0, V_1 — константы интегрирования.

Тогда, решая уравнение $u_{1,111}^{(0)} = v$ с учетом (75), находим общий вид функции $u_1^{(0)}$

$$\begin{gathered} u_1^{(0)} = \frac{V_0}{\alpha^3}\cos\alpha x - \frac{V_1}{\alpha^3}\sin\alpha x - \\ -\frac{S_2}{6}\Delta\bar{p}x^3 + \frac{V_2}{2}x^2 + V_3 x + V_4, \end{gathered} \tag{77}$$

где V_2, V_3, V_4 — константы интегрирования.

Подставляя функцию (77) в уравнение (69), получим уравнение относительно $u_3^{(0)}$

$$u_{3,1111}^{(0)} = V_0 Z\sin\alpha x + V_1 Z\cos\alpha x - Z_1\Delta\bar{p}, \tag{78}$$

где обозначены константы

$$\begin{gathered} Z = \frac{1}{D_{1111}}(B_{1111} + \alpha^2 F_{111111}), \\ Z_1 = \frac{1}{D_{1111}}(1 + B_{1111}S_2). \end{gathered} \tag{79}$$

Интегрируя уравнение (78), находим общее его решение

$$\begin{gathered} u_3^{(0)} = \frac{V_0 Z}{\alpha^4}\sin\alpha x + \frac{V_1 Z}{\alpha^4}\cos\alpha x - \\ -\frac{Z_1}{24}\Delta\bar{p}x^4 + \frac{C_3}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_1 x + C_0, \end{gathered} \tag{80}$$

где $C_0 ... C_3$ — константы интегрирования.

Найдем теперь общее выражение для усилия T_{11} и момента M_{11}. Для этого подставим формулы (67) в определяющие соотношения (57)

$$\begin{gathered} T_{11} = \bar{C}_{1111}u_{1,1}^{(0)} - B_{1111}u_{3,11}^{(0)} - H_{111111}u_{1,111}^{(0)}, \\ M_{11} = B_{1111}u_{1,1}^{(0)} - D_{1111}u_{3,11}^{(0)} - F_{111111}u_{1,111}^{(0)}. \end{gathered} \tag{81}$$

Подставляя формулы (75) и (80) в (81), находим

$$T_{11} = R_0(V_0 \sin\alpha x + V_1 \cos\alpha x) - (R_1 x^2 - H_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ + (\bar{C}_{1111} V_2 - B_{1111} C_3)x + (\bar{C}_{1111} V_3 - B_{1111} C_2), \tag{82}$$

$$M_{11} = N_0(V_0 \sin\alpha x + V_1 \cos\alpha x) - (N_1 x^2 - F_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ + (B_{1111} V_2 - D_{1111} C_3)x + (B_{1111} V_3 - D_{1111} C_2). \tag{83}$$

Здесь введены следующие коэффициенты:

$$R_0 = (-\bar{C}_{1111} + B_{1111} Z)/\alpha^2 - H_{111111},\ R_1 = (\bar{C}_{1111} S_2 - B_{1111} Z_1)/2, \\ N_0 = (-B_{1111} + D_{1111} Z)/\alpha^2 - F_{111111},\ N_1 = (B_{1111} S_2 - D_{1111} Z_1)/2. \tag{84}$$

Подставляя выражения (77) и (80) в граничные условия (64) и (71) при $x = 0$, находим часть системы уравнений для констант интегрирования

$$V_0 + \alpha^3 V_4 = 0,\ V_1 + \frac{\alpha^4}{Z} C_0 = 0, \\ -V_1 + \alpha^2 V_3 = 0,\ V_1 - S_2 \Delta\bar{p} = 0, \\ N_0 V_1 + F_{111111} S_2 \Delta\bar{p} + (B_{1111} V_3 - D_{1111} C_2) = 0. \tag{85}$$

Из этой системы находим константы C_0, C_2, V_1 и V_3, а константу V_4 выражаем через V_0

$$C_0 = -\frac{Z}{\alpha^4} S_2 \Delta\bar{p},\ V_3 = \frac{S_2}{\alpha^2}\Delta\bar{p},\ V_1 = S_2 \Delta\bar{p},\ V_4 = -\frac{V_0}{\alpha^3}, \\ C_2 = \frac{1}{D_{1111}}(F_{111111} + N_0 + B_{1111}/\alpha^2) S_2 \Delta\bar{p}. \tag{86}$$

Подставляя выражения (77) и (80) в граничные условия (65) при $x = 1$, находим оставшуюся часть системы уравнений для констант интегрирования

$$V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha - S_2 \Delta\bar{p} = 0, \\ \frac{V_0 Z}{\alpha^4}\sin\alpha + \frac{V_1 Z}{\alpha^4}\cos\alpha - \frac{Z_1}{24}\Delta\bar{p} + \frac{C_3}{6} + \frac{C_2}{2} + C_1 + C_0 = 0, \\ R_0(V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha) - (R_1 x^2 - H_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ + (\bar{C}_{1111} V_2 - B_{1111} C_3) + (\bar{C}_{1111} V_3 - B_{1111} C_2) = 0, \\ N_0(V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha) - (N_1 x^2 - F_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ + (B_{1111} V_2 - D_{1111} C_3)x + (B_{1111} V_3 - D_{1111} C_2) = 0. \tag{87}$$

Подставляя (86) в (87), из первого уравнения этой системы находим константу V_0, а затем и V_4

$$V_0 = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} S_2 \Delta\bar{p},$$
$$V_4 = -\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^3 \sin\alpha} S_2 \Delta\bar{p}. \tag{88}$$

После подстановки (86) и (87) в третье и четвертое уравнения системы (87), получаем два уравнения для вычисления констант V_2 и C_3, решая которые, находим

$$V_2 = \frac{1}{\Delta}(B_{1111}W - D_{1111}U),$$
$$V_4 = -\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^3 \sin\alpha} S_2 \Delta\bar{p}, \tag{89}$$

где обозначены

$$U = -R_0(V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha) +$$
$$+(R_1 - H_{111111}S_2)\Delta\bar{p} - (\bar{C}_{1111}V_3 - B_{1111}C_2),$$
$$W = -N_0(V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha) +$$
$$+(N_1 - F_{111111}S_2)\Delta\bar{p} - (B_{1111}V_3 - D_{1111}C_2), \tag{90}$$
$$\Delta = B_{1111}^2 - D_{1111}C_{1111}.$$

Поскольку константы V_0, V_1, V_3 и C_2 уже вычислены (см. формулы (86) и (88)), то U и W в (84) можно считать вычисленными.

Из второго уравнения системы (87) находим последнюю константу C_1

$$C_1 = -C_0 - \frac{C_2}{2} - \frac{C_3}{6} + \frac{Z_1}{24}\Delta\bar{p} - \frac{Z}{\alpha^4}(V_0 \sin\alpha + V_1 \cos\alpha). \tag{91}$$

После этого решение задачи (64), (65), (68), (69) и (71) полностью найдено.

Напряжения в пластине при изгибе. Запишем формулы (50)–(52) для случая изгиба пластины, тогда, применяя формулы (67), получаем выражения для напряжений в слоях пластины

$$\sigma_{11}^{\{m\}} = C_{1111}^{\{m\}(0)} u_{1,1}^{(0)} - \xi\kappa C_{1111}^{\{m\}(0)} u_{3,11}^{(0)} + \kappa\theta W^{\{m\}} u_{1,111}^{(0)},$$
$$\sigma_{13}^{\{m\}} = -\kappa A_{1111}^{\{m\}} u_{1,11}^{(0)} + \kappa^2 V_{1111}^{\{m\}} u_{3,111}^{(0)} + \kappa^2 \theta \tilde{W}^{\{m\}} u_{1,1111}^{(0)},$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}} = \kappa^2 E_{1111}^{\{m\}(2)} u_{1,111}^{(0)} - \kappa^3 U_{1111}^{\{m\}(3)} u_{3,1111}^{(0)} -$$
$$-\kappa^3 \theta W^{\{m\}(3)} u_{1,11111}^{(0)} - \kappa^3 \left(p^{\{1\}} + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) \right), \ m = 1, \ldots, 4. \tag{92}$$

Здесь использованы формулы (41), (43) и (48), которые с учетом (62) представлены в виде

$$W_{111111}^{\{m\}} = \theta W^{\{m\}},\ \tilde{W}_{111111}^{\{m\}} = \theta \tilde{W}^{\{m\}},\ W_{111111}^{\{m\}(3)} = \theta W^{\{m\}(3)},$$
$$W^{\{m\}} = C_{1111}^{\{m\}(0)} \Phi^{\{m\}} A_{1111}^{\{2\}}(a_2),\ \tilde{W}^{\{m\}} = \left\{ W^{\{m\}} \right\}_{\xi},\ \tilde{W}^{\{m\}(3)} = \left\{ \left\{ W^{\{m\}} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi}. \quad (93)$$

Поскольку перемещения $u_{1,1}^{(0)}$ и $u_{3,11}^{(0)}$ определены явным образом по формулам (77), (80), в которых 9 констант $V_0,\ldots,V_4$, $C_0 \ldots C_4$ — вычисляются по формулам (86), (88)- (91), то напряжения в слоях пластины также вычисляются явным образом по формулам (92).

Оценка значений параметра скольжения слоев. В данной работе рассматривается модель с заданным значением коэффициентами скольжения слоев друг относительно друга, $\theta^{\{m\}} \geq 0$. Для оценки диапазона возможных значений $\theta^{\{m\}}$ рассмотрим дополнительное условие контактного трения слоев

$$\sigma_T^{\{m\}} = \mu^{\{m\}} \left| \sigma_{33}^{\{m\}} \right|, \quad (94)$$

здесь $\sigma_T^{\{m\}} = \sqrt{\sigma_{13}^{\{m\}2} + \sigma_{23}^{\{m\}2}}$ — модуль сдвиговых напряжений, $\sigma_{33}^{\{m\}}$ — нормальное напряжение, $\mu^{\{m\}}$ — коэффициент трения слоев. При условии

$$\sigma_T^{\{m\}} < \mu^{\{m\}} \left| \sigma_{33}^{\{m\}} \right|, \quad (95)$$

проскальзывания слоев не происходит, и реализуются условия идеального контакта слоев m и $m+1$, т.е. в этом случае $\theta^{\{m\}} = 0$.

Если выполняется условие (94) в какой–либо точке поверхности контакта слоев, то в этой точке возникает проскальзывание слоев и $\theta^{\{m\}} \geq 0$.

Условие (94) образует уравнение для нахождения коэффициента скольжения. рассмотрим это уравнение для задачи об изгибе четырехслойной пластины. Подставим в (94) выражения (92) для напряжений $\sigma_{13}^{\{m\}}$ и $\sigma_{33}^{\{m\}}$, тогда получим

$$\left| -A_{1111}^{\{m\}} u_{1,11}^{(0)} + \kappa V_{1111}^{\{m\}} u_{3,111}^{(0)} + \kappa\theta \tilde{W}^{\{m\}} u_{1,1111}^{(0)} \right| =$$
$$= \kappa\mu^{\{m\}} \left| E_{1111}^{\{m\}(2)} u_{1,111}^{(0)} - \kappa U_{1111}^{\{m\}(3)} u_{3,1111}^{(0)} - \kappa\theta W^{\{m\}(3)} u_{1,11111}^{(0)} - \right. \quad (96)$$
$$\left. -\kappa \left(p^{\{1\}} + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) \right) \right|$$

Поскольку перемещения $u_{3,111}^{(0)}$ и $u_{1,11}^{(0)}$ через параметр α (76) зависят от θ, то (96) представляет собой сложное нелинейное алгеб-

раическое уравнение для определения значений коэффициента скольжения θ.

Для приближенной оценки возможных значений θ использует другой алгоритм. Подставляя в (94) условие проскальзывания из системы (1), получаем уравнение

$$\theta^{\{m\}} = \frac{\sqrt{[u_1^{\{m\}}]^2 + [u_2^{\{m\}}]^2}}{\mu^{\{m\}} \left|\sigma_{33}^{\{m\}}\right|}. \tag{97}$$

Здесь $[u_I^{\{m\}}] = u_I^{\{m+1\}} - u_I^{\{m\}}$ — скачок перемещений слоев при скольжении. Для рассматриваемой задачи об изгибе пластины уравнение (97) примет вид

$$\theta^{\{m\}} = \frac{\left|[u_1^{\{m\}}]\right|}{\mu^{\{m\}} \left|\sigma_{33}^{\{m\}}\right|}. \tag{98}$$

Рассмотрим монотонный процесс скольжения слоев при некотором постоянном значении давления: $[u_1^{\{m\}}] = vt$, v — скорость проскальзывания слоев друг относительно друга, t — время. Известно, что коэффициент трения зависит от скорости скольжения, причем при относительно малых значениях скорости эту зависимость можно считать линейной: $\mu^{\{m\}} = \dfrac{\mu_0}{v_0} v$, v_0 — характерное значение скорости, на котором достигается характерное значение коэффициента трения μ_0. Подставляя выражения для $[u_1^{\{m\}}]$ и $\mu^{\{m\}}$ в формулу (97), получаем

$$\theta^{\{m\}} = \frac{v_0 t}{\mu_0 \left|\sigma_{33}^{\{m\}}\right|}. \tag{99}$$

Так как $\theta^{\{m\}}$ — безразмерная величина, то v_0 и t также полагаем безразмерными, отнесенными к $v_0 = \tilde{v}_0 t_0 / L$, $t = \tilde{t} / t_0$, где t_0 — характерное время, а $\tilde{v}_0$ и $\tilde{t}$ — соответствующие размерные величины скорости и времени.

Полагая, например, $\sigma_{33}^{\{m\}} = 10^{-4}$, $\sigma_0 = 1$ ГПа, $\mu_0 = 0{,}5$, $L = 1$ м, $v_0 = 10^{-3}$, получаем, что

$$\theta^{\{m\}} = 20t, \ 0 \le t \le 1.$$

Таким образом, при очень малых значениях скорости скольжения слоев, например, $\tilde{v}_0 = 10^{-3}$ м/с за время $t_0 = 1$ коэффициент скольже-

ния $\theta^{\{m\}}$ достигает значения 20. Согласно приближенной формуле (99) коэффициент скольжения возрастает со временем, от 0 до максимальных значений. Используем эти оценки при численных расчетах.

Результаты численного моделирования. Численные расчеты были проведены для четырехслойной композитной пластины, каждый слой которой представлял собой однонаправленный материал (1D материал), армированный системой нитей, ориентированной под углом $\phi^{\{m\}}$ — так, как указано выше. Компоненты тензора C^0_{snpq} 1D материала вычислялись обращением тензора упругих податливостей: $C^0_{snpq} = (\Pi^0_{snpq})^{-1}$. Компоненты тензора Π^0_{snpq} вычислялись через технические константы упругости 1D материала: E_l — продольный модуль упругости нити в направлении ее укладки, E_t — поперечный модуль упругости, ν_l — продольный коэффициент Пуассона, ν_t — поперечный коэффициент Пуассона, G_l — продольный модуль сдвига, $G_t = \dfrac{E_t}{1(1+\nu_t)}$ — поперечный модуль сдвига, по известным формулам [21]. Технические константы упругости 1D материала, в свою очередь были вычислены через характеристики матрицы и волокон: E_f, ν_f — модуль упругости и коэффициент Пуассона волокон, E_m, ν_m — модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, φ_f — относительное объемное содержание волокон в 1D материале по формулам Фойгта-Рейсса [23].

При проведении численных расчетов были приняты следующие значения, примерно соответствующие стеклянным волокнам и полиамидной матрице:

$$E_f = 200 \text{ ГПа},\ \nu_f = 0,25,\ E_m = 1 \text{ ГПа},\ \nu_m = 0,35,$$
$$\varphi_f = 0,6,\ \phi^{\{1\}} = 45°,\ \phi^{\{2\}} = -45°.$$

Численные расчеты проводились при значении параметра $\kappa = 0,02$. Значения давлений были выбраны следующими: $p^{\{2\}} = 10^{-4}$ ГПа, $p^{\{1\}} = 0$. Относительные толщины слоев были выбраны равными: первого слоя — $h_m = 0,25$, $m = 1,...,4$. Углы армирования $\phi^{\{1\}}$ и $\phi^{\{2\}}$ 1 и 2 слоя были фиксированными и равными $45°$ и $-45°$, а углы армирования 3 и 4 слоя $\phi^{\{3\}} = -\phi^{\{4\}}$ варьировалась в диапазоне от $15°$ до $60°$.

Значение безразмерного параметра θ скольжения слоев также варьировалось в диапазоне от 0 до 10^3, в соответствии с проведенными выше оценками. Рассматривался также вариант расчета при идеальном контакте слоев, когда $\theta = 0$.

Результаты расчетов перемещений пластины представлены на рис. 1–3. На рис. 1 показана зависимость прогиба пластины $u_3^{(0)}$ от продольной координаты x_1 для различных значений коэффициента скольжения θ при разных схемах армирования пластины. Было установлено, что при увеличении значений θ от 0 до примерно 0,1 прогиб пластины немного уменьшается, затем, по мере приближения к некоторому критическому значению $\theta_{кр1}$, прогиб резко изменяет свои значения: сначала заметно уменьшается, а потом, наоборот, существенно возрастает.

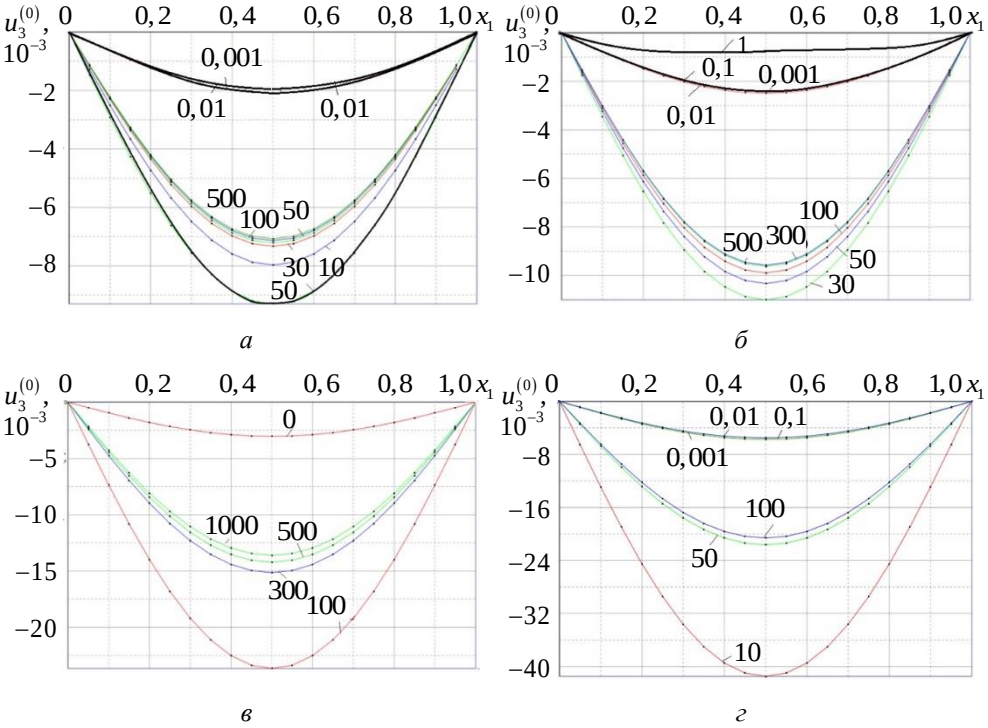


Рис. 1. Зависимость прогиба двухслойной композитной пластины с проскальзыванием, от продольной координаты x_1, цифры у кривых — значения коэффициента скольжения θ, для различных схем армирования: *а* — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$; *в* — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

Существование критических значений параметра скольжения $\theta_{кр}$ в задаче (64), (65), (68), (69) и (71) об изгибе пластины

с проскальзыванием было установлено в работе [11]. При приближении к критическим значениям решение задачи, в частности максимальный прогиб $u_3^{(0)}$ резко возрастает по абсолютной величине. На рис. 2 показана зависимость максимального прогиба пластины от значений параметра скольжения для разных схем армирования слоев пластины. Из этого графика видно, что критические значения $\theta_{кр}$ параметра скольжения смещаются в сторону более высоких значений с увеличением угла армирования $\phi^{\{3\}}$ от 15° до 60° по модулю, т.е. с уменьшением общей изгибной жесткости двухслойной пластины в целом.

В работе [11] было отмечено, что существование критических значений $\theta_{кр}$ является специфической особенностью деформирования пластины с проскальзывающими слоями. Проведенные выше оценки значений параметра скольжения показали, что при отсутствии идеального контакта слоев коэффициент скольжения θ при постоянном давлении p меняется с течением времени непрерывно. При переходе через критические точки $\theta_{кр}$ двухслойная пластина перестает деформироваться квазистатически, происходит быстрое, динамическое изменение прогиба и всех других параметров задачи. Динамическое решение не описывается системой (64), (65), (68),(69) и (71), поэтому пики прогиба W, уходящие в бесконечность при $\theta = \theta_{кр}$, являются не физическими, однако информация о их существовании важна с точки зрения оценки допустимых значений коэффициента скольжения θ, при которых реализуется квазистатическое деформирование (рис. 2).

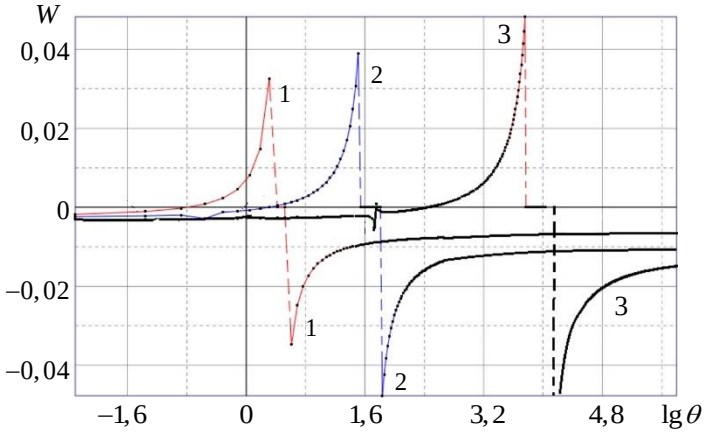


Рис. 2. Зависимость максимального прогиба $W = u_3^{(0)}(0,5)$ от коэффициента скольжения θ для двухслойной композитной пластины с различными схемами армирования:
1 — [±45° / ±15°] ; 2 — [±45° / ±30°] ; 3 — [±45° / ±40°]

На рис. 3 показано распределение продольного перемещения $u_1^{(0)}$ в зависимости от координаты x_1 для различных значений параметра скольжения θ при различных схемах армирования слоев. С увеличением θ от 0 до значений 0,1 максимум абсолютного значения перемещения $u_1^{(0)}$ возрастает для всех схем армирования. Для значений угла армирования $\phi^{\{3\}} = 15°, 30°, 40°$ перемещения $u_1^{(0)}$ в этом диапазоне θ — положительные, а для угла $\phi^{\{3\}} = 60°$ — перемещения $u_1^{(0)}$ — отрицательные. При дальнейшем увеличении параметра скольжения θ до значений $\theta = 1...10$, близких к критическим $\theta_{кр}$, перемещения $u_1^{(0)}$ резко возрастают по абсолютной величие, и меняют знак при переходе θ через критическое значение $\theta_{кр}$. При $\theta \to \infty$ значения перемещений $u_1^{(0)}$ стабилизируются и они становятся меньше соответствующих значений при $\theta = 0$.

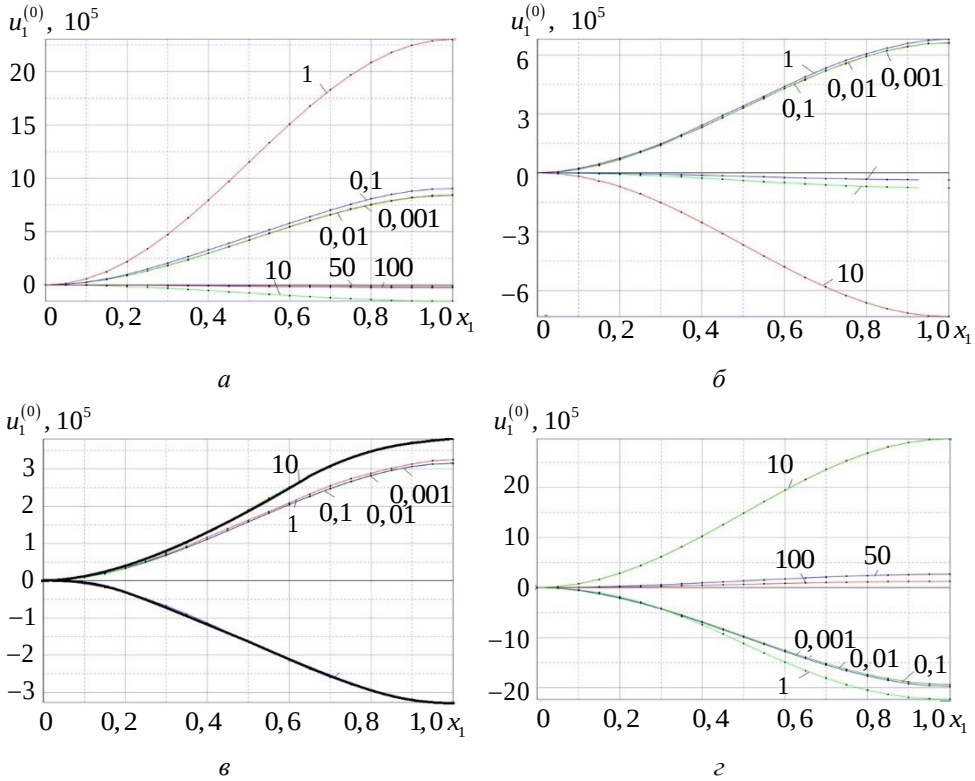


Рис. 3. Зависимость продольного перемещения двухслойной композитной пластины от продольной координаты x_1, цифры у кривых — значения коэффициента скольжения θ, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

На рис. 4–10 показаны распределения напряжений σ_{11}, σ_{13} и σ_{33} по толщине пластины для разных значений координаты x_1 при разных схемах армирования слоев.

При малых значениях коэффициента скольжения $\theta = 0,001$ распределение изгибных напряжений σ_{11} имеет «классический» характер: они достигают максимальных абсолютных значений на внешних поверхностях пластины при $\xi = \pm 0,5$ в средней ее части при $x_1 = 0,5$ для всех схем армирования (рис. 4).

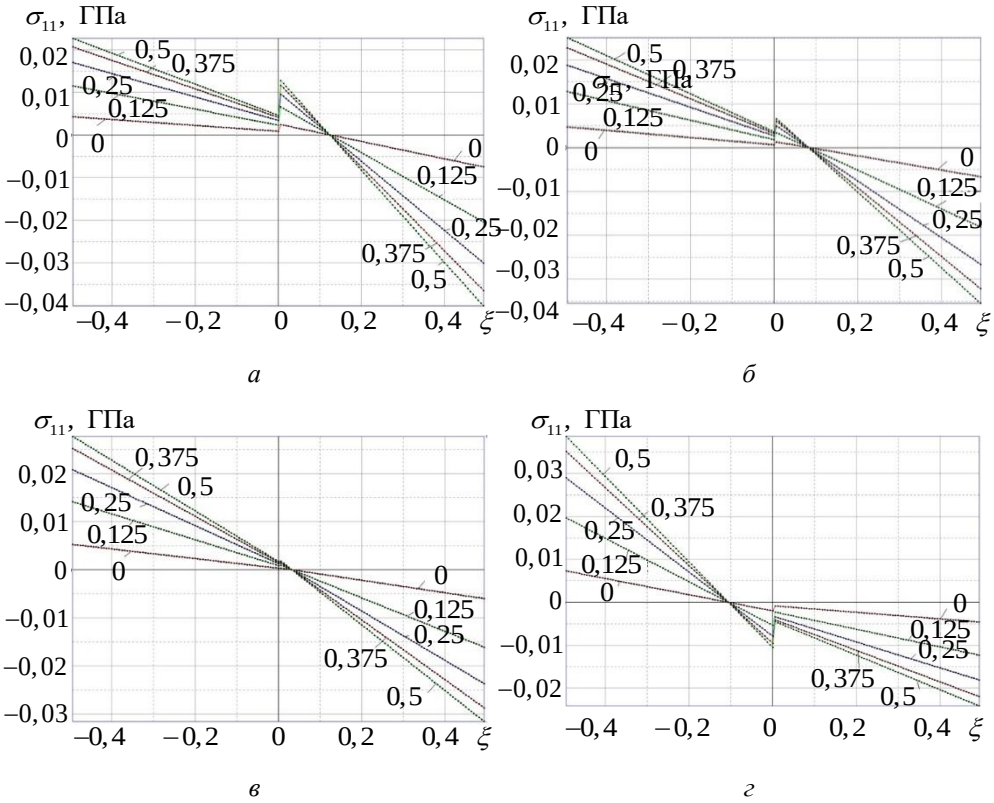


Рис. 4. Распределение по толщине изгибных напряжений в двухслойной композитной пластине для разных значений координаты x_1 $(0;\ 0,12;\ 0,25)$, при значении коэффициента проскальзывания слоев $\theta = 0,001$, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

При повышении значений коэффициента скольжения θ характер распределения напряжений σ_{11} по толщине пластины существенно меняется (рис. 5): слои пластины деформируются под давлением

практически как два раздельных слоя, в результате максимальные по абсолютной величине значения изгибных напряжений σ_{11} в каждом слое возрастают.

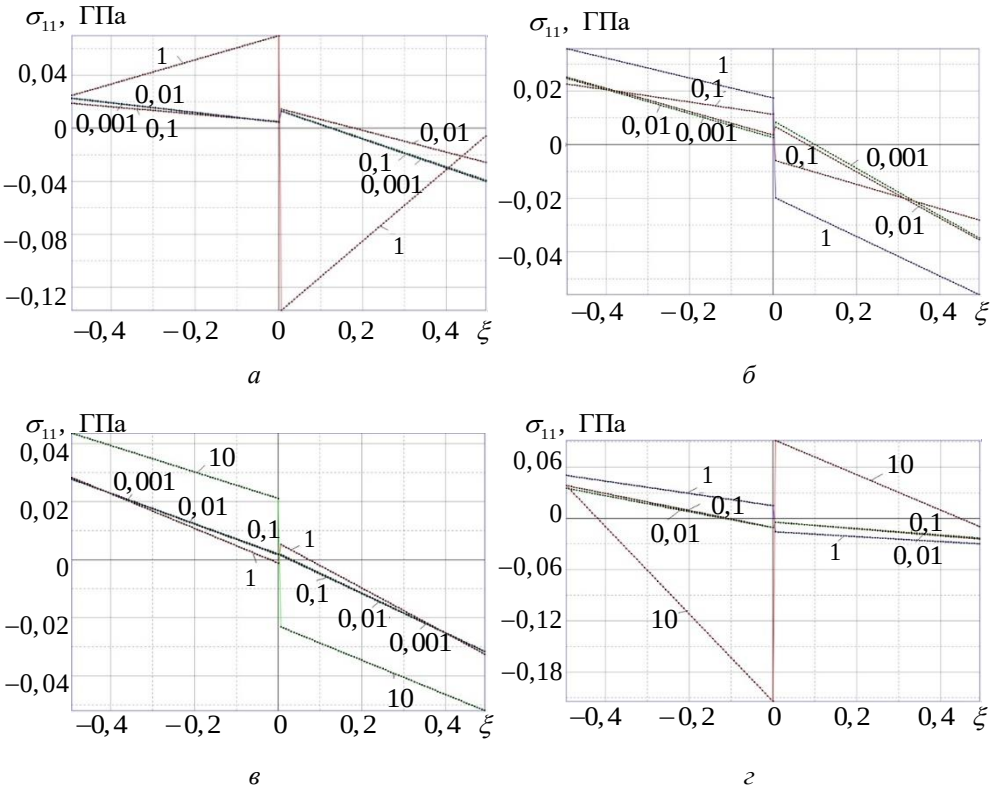


Рис. 5. Распределение по толщине изгибных напряжений в двухслойной композитной пластине для $x_1 = 0$, цифры у кривых — значения коэффициента скольжения θ, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

При малых значениях коэффициента скольжения $\theta = 0,001$ распределение сдвиговых напряжений σ_{13} тоже близко к «классическому»: максимальные значения напряжений реализуются в средней части пластины, однако не на границе раздела слоев, а при некотором значении координаты ξ в слое с наибольшим углом армирования (рис. 6).

При повышении значений коэффициента скольжения до $\theta = 0,01$ характер распределения напряжений σ_{13} по толщине пластины существенно меняется (рис. 7), особенно для схемы армирования

$[\pm 45° / \pm 30°]$, для которой значение $\theta = 0,01$ близко к критическому $\theta_{кр1}$. В этом случае напряжения σ_{13} достигают максимальных значений на границе раздела слоев (рис. 7*б*).

На рис. 8 показаны распределения напряжений σ_{13} по толщине при различных коэффициентах скольжения. При приближении значений коэффициента скольжения θ к критическим значениям $\theta_{кр1}$ напряжения σ_{13} достигают максимальных значений на границе раздела слоев. При более высоких значениях коэффициента скольжения слои пластины деформируются практически как независимые, поэтому в каждом из слоев возникает свой локальный максимум распределения по толщине, для всех схем армирования.

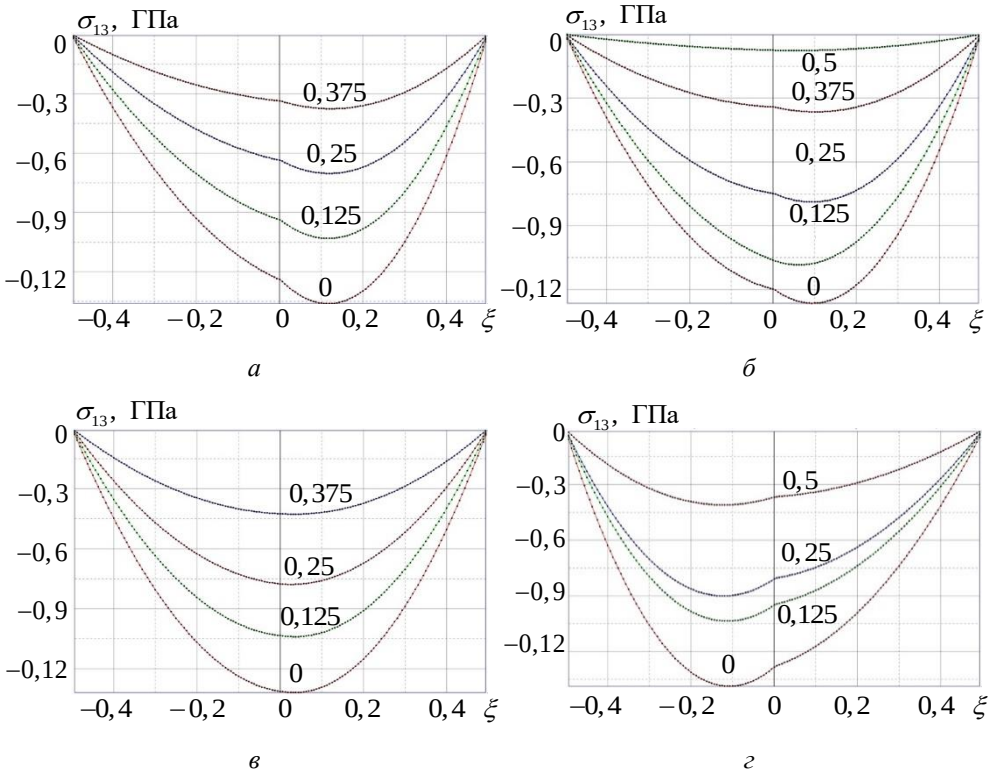


Рис. 6. Распределение по толщине напряжений межслойного сдвига в двухслойной композитной пластине для разных значений координаты x_1 $(0;\ 0,12;\ 0,25)$ при значении коэффициента проскальзывания слоев $\theta = 0,001$, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

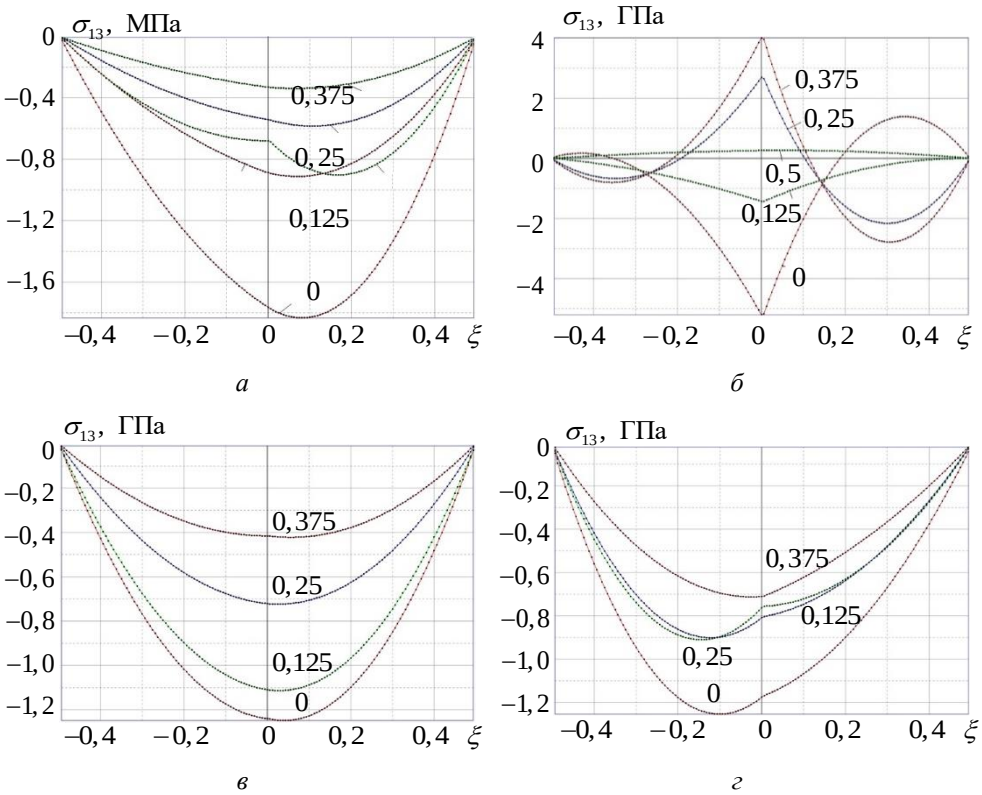


Рис. 7. Распределение по толщине напряжений межслойного сдвига в двухслойной композитной пластине для разных значений координаты x_1 $(0;\ 0{,}12;\ 0{,}25)$ при значении коэффициента проскальзывания слоев $\theta = 0{,}01$, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

На рис. 9 показаны распределения поперечных напряжений σ_{33} по толщине при различных значениях продольной координаты x_1 для разных схем армирования при значении коэффициента проскальзывания слоев $\theta = 0{,}001$. Наиболее существенное различие кривых σ_{33} при разных x_1 реализуется для схемы армирования $[\pm 45° / \pm 30°]$ (рис. 9*б*), так как для нее коэффициент $\theta = 0{,}001$ наиболее близок к $\theta_{кр1}$.

На рис. 10 представлены графики зависимости напряжения $\sigma_{33}(\xi)$ для $x_1 = 0$ при различных значениях коэффициента скольжения θ и различных схемах армирования. При малых значениях коэффициента скольжения θ напряжения $\sigma_{33}(\xi)$ меняются мало для всех схем армирования. При приближении значений коэффициента скольжения θ к критическим значениям $\theta_{кр1}$ напряжения $\sigma_{33}(\xi)$

достигают максимальных значений внутри одного из слоев, а не на внешней поверхности $\xi = 0,5$, где действует давление. При высоких значениях коэффициента скольжения распределения $\sigma_{33}(\xi)$ стабилизируются, и практически не зависят от θ.

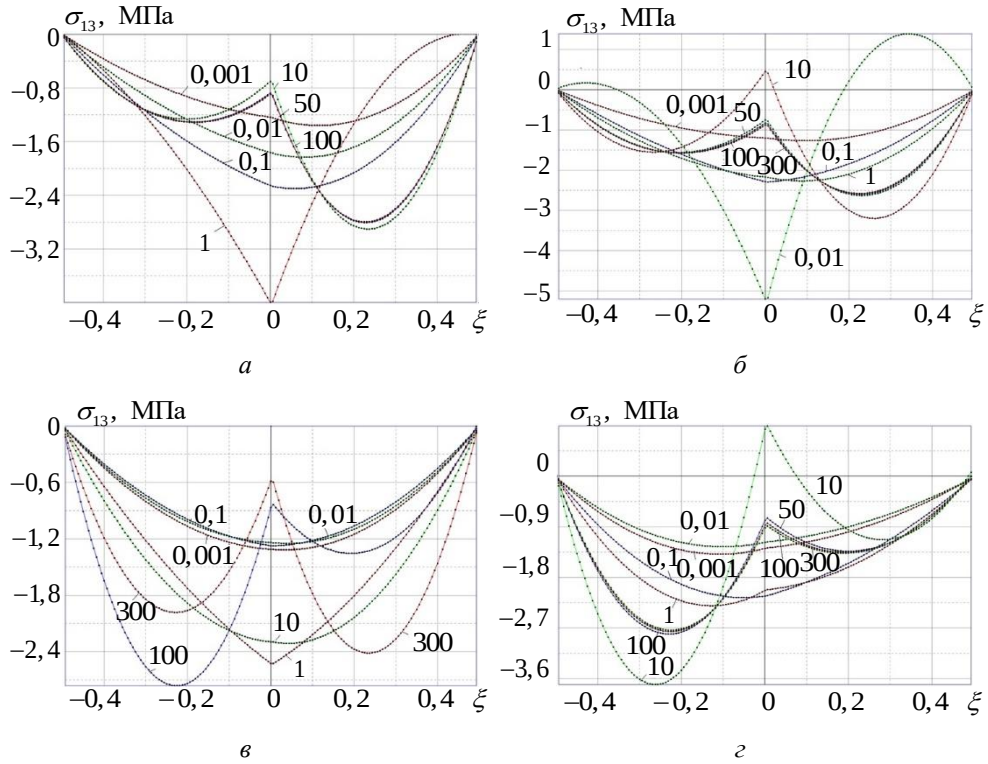
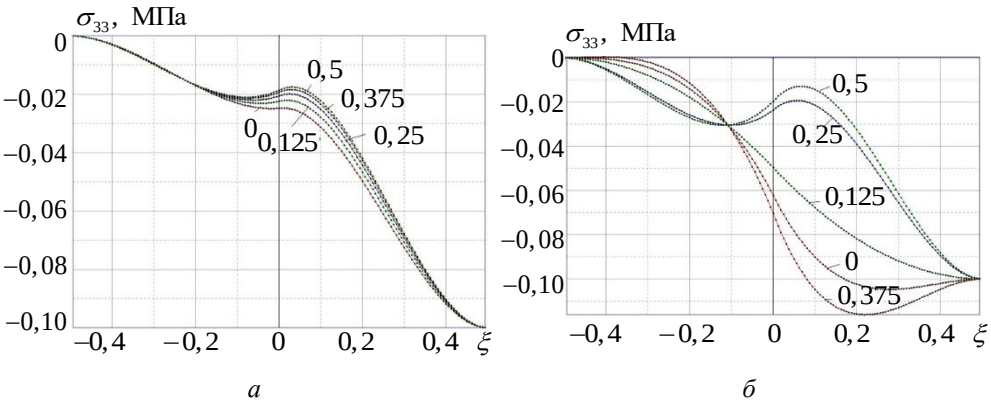
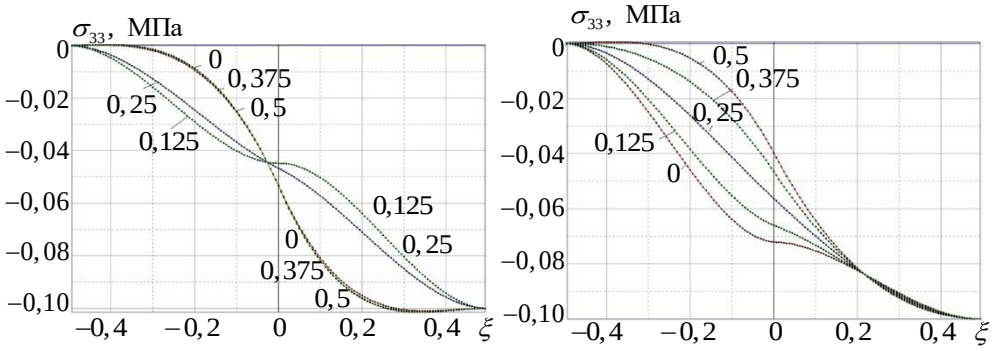


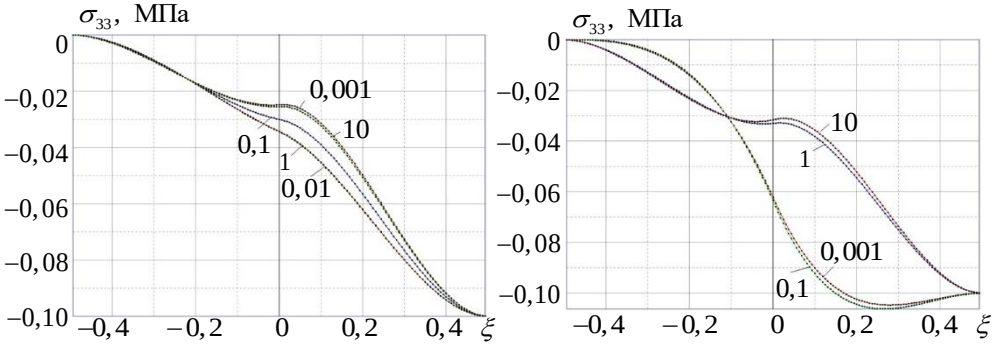
Рис. 8. Распределение по толщине напряжений межслойного сдвига в двухслойной композитной пластине для $x_1 = 0$, цифры у кривых — значения коэффициента скольжения θ, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$



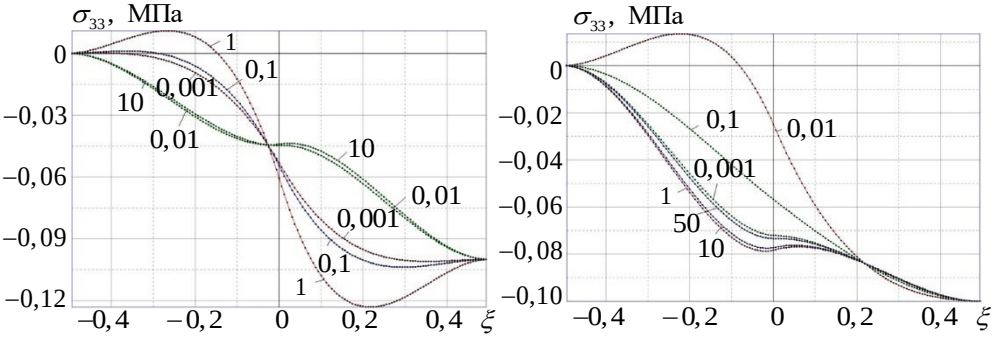


в *г*

Рис. 9. Распределение по толщине изгибных напряжений в двухслойной композитной пластине для разных значений координаты x_1 $(0;\ 0{,}12;\ 0{,}25)$ при значении коэффициента проскальзывания слоев $\theta = 0{,}001$, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$



а *б*



в *г*

Рис. 10. Распределение по толщине поперечных напряжений в двухслойной композитной пластине для $x_1 = 0$, цифры у кривых — значения коэффициента скольжения θ, для различных схем армирования:
а — $[\pm 45° / \pm 15°]$; *б* — $[\pm 45° / \pm 30°]$;
в — $[\pm 45° / \pm 40°]$; *г* — $[\pm 45° / \pm 60°]$

Выводы. Предложена асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с эффектом проскальзывания слоев, которая обобщает ранее разработанную теорию двухслойных пластин с проскальзыванием.

Получена рекуррентная последовательность локальных задач теории упругости для многослойной пластины с проскальзыванием всех слоев. Найдено аналитическое рекуррентное решение этих задач, которое позволяет определить все компоненты тензора напряжений в пластине.

Выведена осредненная система уравнений теории тонких многослойных пластин с проскальзыванием слоев, которая имеет повышенный (пятый) порядок частных производных по сравнению с теорией пластин с идеальным контактом. Осредненные уравнения содержат $N-1$ коэффициент скольжения, где N — число слоев с проскальзыванием.

Рассмотрена задача об изгибе четырехслойной пластины с проскальзыванием двух слоев из них, под равномерным давлением. Найдено аналитическое решение этой задачи для перемещений и всех компонент напряжений.

Проведена оценка значений коэффициента скольжения слоев, а также проведен численный анализ решения задачи для случая слоисто-волокнистой композитной пластины. Показано существование критических значений коэффициента скольжения, при переходе через которые решение задачи — перемещения пластины — значительно возрастают, а распределения напряжений в пластине существенным образом меняют свой вид.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sai kumar M., Bhaskara Reddy C. Modelling and structural analysis of leaf spring using finite element method. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 2017, vol. 4, iss. 1, pp. 1155–1161.

[2] Scott W.H. A model for a two-layered plate with interfacial slip. *International Series of Numerical Mathematics*, 1994, vol. 118, pp.143–170.

[3] Sedighi M., Shirazib K.H., Naderan-Tahanb K. Stick-slip analysis in vibrating two-layer beams with frictional interface. *Latin American Journal of Solid and Structures*, 2013, no. 10, pp. 1025–1042.

[4] Damisa O., Olunloyo V.O.S., Osheku C.A., Oyediran A.A. Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 309, pp. 349–374.

[5] Awrejcewicz J., Krysko A.V. An iterative algorithm for solution of contact problems of beams, plates and shells. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, vol. 2006, art. no. 71548. DOI 10.1155/MPE/2006/71548.

[6] Awrejcewicz J., Krysko A.V., Ovsiannikova O. Novel procedure to compute a contact zone magnitude of vibrations of two-layered uncoupled plates. *Mathematical Problems in Engineering*, 2005, vol. 2005, iss. 4, pp. 425–435. DOI: 10.1155/MPE.2005.425

[7] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.

[8] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 635 с.
[9] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
[10] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.
[11] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 3–26.
[12] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.
[13] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
[14] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С.. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
[15] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–99.
[16] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
[17] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.
[18] Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.
[19] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.
[20] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.
[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[22] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.
[23] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига, Зинатне, 1980, 572 с.

Статья поступила в редакцию 19.02.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 2, с. 30–64.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Asymptotic theory of multilayer thin elastic plates with layer slip

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of development a theory for calculating the stress-strain state of thin multilayer elastic plates, for which linearized slip conditions are specified at the interface between the layers, is considered. The solution of this problem is constructed using an asymptotic analysis of the general equations of the 3-dimensional theory of elasticity with the conditions of non-ideal contact of the layers. The asymptotic analysis is carried out with respect to a small geometric parameter representing the ratio of the plate thickness to its characteristic length. Recurrent formulations of local quasi-one-dimensional problems of the theory of elasticity with slip are obtained. Explicit analytical solutions are obtained for these problems. The derivation of the averaged equations of elastic equilibrium of multilayer plates is presented, taking into account the slippage of the layers. It is shown that due to the effect of slippage of layers, the system of averaged equations of the theory of multilayer plates has an increased - 5th order of derivatives, in contrast to the classical 4th order, which takes place in the theory of Kirchhoff-Love plates. It is shown that the asymptotic theory makes it possible to obtain an explicit analytical expression for all 6 components of the stress tensor in the layers of the plate. As a special case, the problem of calculating the stress-strain state of a 4-layer plate under uniform pressure bending with one slip coefficient is considered. A complete analytical solution of this problem is obtained, including explicit expressions for all non-zero components of the stress tensor. A numerical analysis of the solution of the averaged problem for a composite plate is carried out, in which the layers are unidirectional reinforced fibrous materials oriented at different angles. A comparative analysis of the influence of the fiber reinforcement angles and the slip coefficient of the layers on the displacement of the plate and the distribution of stresses in the layers was carried out. It is shown that the problem of bending a plate with slip admits the existence of a spectrum of critical values of the slip coefficient, when passing through which the displacements and stresses in the layers of the plate change significantly, and these critical values depend on the angle of reinforcement of the composite layers.

Keywords*: asymptotic theory, small parameter, multilayer thin plates, composites, layer slippage, reinforcement angle, bending*

REFERENCES

[1] Sai kumar M., Bhaskara Reddy C. Modelling and structural analysis of leaf spring using finite element method. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 2017, vol. 4, iss. 1, pp. 1155–1161.

[2] Scott W.H. A model for a two-layered plate with interfacial slip. *International Series of Numerical Mathematics*, 1994, vol. 118, pp.143–170.
[3] Sedighi M., Shirazib K.H., Naderan-Tahanb K. Stick-slip analysis in vibrating two-layer beams with frictional interface. *Latin American Journal of Solid and Structures*, 2013, no. 10, pp. 1025–1042.
[4] Damisa O., Olunloyo V.O.S., Osheku C.A., Oyediran A.A. Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 309, pp. 349–374.
[5] Awrejcewicz J., Krysko A.V. An iterative algorithm for solution of contact problems of beams, plates and shells. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, vol. 2006, art. no. 71548. DOI 10.1155/MPE/2006/71548.
[6] Awrejcewicz J., Krysko A.V., Ovsiannikova O. Novel procedure to compute a contact zone magnitude of vibrations of two-layered uncoupled plates. *Mathematical Problems in Engineering*, 2005, vol. 2005, iss. 4, pp. 425–435. DOI: 10.1155/MPE.2005.425
[7] Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.
[8] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. USA, McGraw-Hill College, 1976, 580 p.
[9] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.
[10] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Generalized model of the mechanics of thin-walled structures made of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 24, iss. 4, pp. 537–543.
[11] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A. Asymptotic theory of thin two-layer elastic plates with layer slippage. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 1, pp. 3–26.
[12] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.
[13] Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections. *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 57–63.
[14] Nazarov S.A., Sweers G.H., Slutskij A.S. Homogenization of a thin plate reinforced with periodic families of rigid rods. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, iss. 8, pp. 1127–1168.
[15] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–99.
[16] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
[17] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.
[19] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[20] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[22] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Higher School Publ., 2001, 576 p.
[23] Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov* [Resistance of polymer and composite materials]. Riga, Zinatne Publ., 1980, 572 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru