УДК 519.85 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-1-129140

Метод нахождения недоминируемых решений в задачах декомпозиции моделей сложных систем

© В.В. Киселев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассматривается метод нахождения оптимальных решений, при наличии модели сложной технической системы, в задаче оптимального проектирования. Метод основан на использовании недоминируемых, $\Lambda-$оптимальных решений и является обобщением метода Краснощекова П.С., Морозова В.В., Федорова В.В. [1]. Метод позволяет во многих случаях (для $\Lambda-$монотонных целевых функций) сократить количество вычислений и снизить размерность исходной задачи. Разработан численный метод построения $\Lambda-$оптимальных решений. Приводится численный пример, в котором показано, что количество $\Lambda-$оптимальных решений состоит из одной точки, а множество Парето-оптимальных решений является некоторой кривой, на которой для нахождения оптимального решения необходимо строить ε-сеть.

Ключевые слова: *математическое программирование, большая размерность, Парето-оптимальность, декомпозиция, монотонность*

Введение. Проектирование сложной технической системы во многих случаях предполагает создание и исследование математической модели системы с целью выбора оптимального варианта. Модель реализуется в виде системы программных модулей. На вход модели подаются значения варьируемых конструктивных параметров, на выходе можно получить значение глобального критерия эффективности системы. Поиск оптимальных решений в некоторых задачах экономики и техники является сложным итерационным процессом, в котором используются достаточно большие программные модули. Даже при использовании современной вычислительной техники время вычислений, необходимое для получения оптимального варианта с заданной точностью может быть очень большим. В некоторых случаях, при наличии известных свойств целевой функции, основную задачу оптимизации можно разбить на подзадачи и сократить количество вычислений. В работе [1] для снижения размерности задачи и сокращения количества вычислений используется свойство монотонности целевой функции и понятие оптимальности по Парето.

Пусть $F(x)$ — глобальный критерий эффективности сложной технической или экономической системы, который зависит от параметров $\mathrm{x} \in \mathrm{X} \subset \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ и этот критерий желательно максимизировать, т.е. решается задача поиска вектора

$$x^0 \in \operatorname{Arg}\max F(x),\ x \in X. \qquad (1)$$

Если рассматриваемая система простая, то для поиска оптимального решения можно использовать обычные методы математического программирования, но для сложных систем такой подход не приводит к успеху в силу большой размерности задачи и значительного времени вычисления глобального критерия эффективности.

Для решения задачи (1) Краснощеков П.С., Морозов В.В. и Федоров В.В. предложили выделять частные критерии эффективности $u_i(x), i = \overline{1,M}$ и рассматривать класс монотонных функций

$$F(x) = \Phi(u(x)), \qquad (2)$$

таких, что для любых $x^1, x^2 \in X$ из условия

$$u(x^1) \geq u(x^2) \qquad (3)$$

следует

$$\Phi(u(x^1)) \geq \Phi(u(x^2)). \qquad (4)$$

Данный подход позволяет сократить количество вычислений, так как задача (1) заменяется задачей поиска оптимального вектора только на множестве Парето-оптимальных решений. Поскольку множество Парето–оптимальных решений часто значительно меньше множества X, то количество узлов δ-сетки на множестве Парето–оптимальных решений значительно меньше количества узлов δ – сетки на X.

Если учесть, что время вычислений значения функции $F(x)$ большое, то такой подход позволяет значительно сократить общее время поиска оптимального варианта и получить этот вариант в заданные сроки. Другие подходы к решению задач большой размерности и декомпозиции исходной модели приведены в работах [2–9].

Постановка задачи. В данной работе используется свойство Λ–монотонности глобального критерия, которое обобщает обычное понятие монотонности и понятие Λ–оптимальности [10,11], которое обобщает понятие оптимальности по Парето.

Для сложных систем, при решении задачи (1), часто единственно возможным методом решения является метод перебора узлов δ – сетки, построенной на множестве допустимых значений X.

Если выполнены следующие условия:

1) $F(x)$ допускает представление

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \Phi(\mathrm{u}(\mathrm{x})), \tag{5}$$

2) функция $\Phi(\mathrm{u})$ Λ — монотонна,

то для решения задачи (1) достаточно перебрать только узлы, принадлежащие множеству недоминируемых решений.

Формальные условия проверки Λ–монотонности $\Phi(\mathrm{u}(\mathrm{x}))$ приведены в работе [12,13], иногда Λ–монотонность можно установить из общих свойств постановки экономической или технической задачи. Например, если Φ — стоимость всей системы, а u_i — стоимость i–ой подсистемы, то $\Phi(u)$ является монотонной функцией.

Далее будем полагать, что множество допустимых значений X есть некоторое связное и ограниченное подмножество в R^N.

Определение 1. Непрерывная функция $\Phi(u)$, определенная на множестве U, называется возрастающей по направлению $S \neq 0$, если для любой точки $\mathrm{u}^0 \in \mathrm{U}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\mathrm{u}) > \Phi(\mathrm{u}^0) \tag{6}$$

если

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}^0 + \mathrm{tS},\ \mathrm{u} \in \mathrm{U},\ \mathrm{t} > 0. \tag{7}$$

Определение 2. Непрерывная функция $\Phi(u)$, определенная на множестве U, называется неубывающей по направлению $S \neq 0$, если для любой точки $\mathrm{u}^0 \in \mathrm{U}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\mathrm{u}) \geq \Phi(\mathrm{u}^0), \tag{8}$$

если

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}^0 + \mathrm{tS},\ \mathrm{u} \in \mathrm{U},\ \mathrm{t} > 0. \tag{9}$$

Определение 3. Если функция $\Phi(u)$ является возрастающей на множестве U по любому направлению S, принадлежащему конусу Λ, то $\Phi(u)$ называется Λ–возрастающей функцией на U.

Пример 1. Функция

$$\Phi(u) = 2u_1 + u_2, \tag{10}$$

Λ–монотонна для следующих конусов:

а) $\Lambda = \left\{u \middle| (S,u) > 0, S = (2,2)^T\right\}$;

б) $\Lambda = \left\{ u \middle| u_i \geq 0, i = \overline{1, M} \right\}$;

в) $\Lambda = \left\{ u \middle| (H_1, u) \geq 0, (H_2, u) \geq 0, H_1 = (8, 2)^T, H_2 = (1, 5)^T \right\}$.

Пример 2. Функция

$$\Phi(u) = -4u_1 - 3u_2. \tag{11}$$

Λ–монотонна для следующих конусов:

а) $\Lambda = \left\{ u \middle| u_i \leq 0, i = \overline{1, M} \right\}$;

б) $\Lambda = \left\{ u \middle| (H_1, u) \geq 0, (H_2, u) \geq 0, H_1 = (-5, -3)^T, H_2 = (-2, -8)^T \right\}$.

Пусть на множестве X задана вектор-функция $\mathrm{u}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{u} \in \mathrm{R}^{\mathrm{M}}$.

Определение 4. Точка $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ называется Λ–оптимальной, если для всякого $\mathrm{y} \in \mathrm{X}$ такого, что $\mathrm{u}(\mathrm{y}) - \mathrm{u}(\mathrm{x}) \in \Lambda$ следует $\mathrm{u}(\mathrm{y}) = \mathrm{u}(\mathrm{x})$.

Множество всех Λ–оптимальных точек на X будем обозначать X_Λ.

Множество Λ–оптимальных точек на $\mathrm{U} = \mathrm{u}(\mathrm{X})$ будем обозначать $\mathrm{U}_\Lambda, \mathrm{U}_\Lambda = \mathrm{u}(\mathrm{X}_\Lambda)$.

Определение 5. Конус Λ^* называется многогранным, если его можно представить в виде

$$\Lambda^* = \left\{ z \middle| z = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i H_i, \alpha_i \geq 0, H_i \in R^M, i = \overline{1, L} \right\}. \tag{12}$$

Векторы $H_i, i = \overline{1, L}$ называются генераторами конуса.

Определение 6. Конус Λ называется сопряженным конусу Λ^*, если

$$\Lambda = \left\{ u \middle| (u, z) \geq 0, z \in \Lambda^* \right\}. \tag{13}$$

Далее предполагается, что на основании анализа модели системы выделены агрегированные параметры $u(x)$, $u \in R^M$, $x \in X \subset R^N$, $M < N$, и глобальный критерий допускает представление $F(x) = \Phi(u(x))$, где $\Phi(u)$ является Λ–монотонной функцией для конуса Λ. Выберем произвольный многогранный конус $\Lambda^1 \subset \Lambda$,

$$\Lambda^1 = \left\{ u \middle| (u, H_i) \geq 0, H_i \in R^M, \ i = \overline{1, L} \right\} \tag{14}$$

и точку E внутри конуса $E \in \operatorname{int} \Lambda$ (E можно получить, например, как решение задачи чебышевского приближения

$$\begin{gathered}\eta \to \min, \\ -\left(u, H_i\right) \le \eta, \quad \left|u_i\right| \le 1, \quad i = \overline{1, L}).\end{gathered} \tag{15}$$

Метод нахождения недоминируемых решений. Поиск Λ–оптимальных решений можно формулировать в минимаксной форме и использовать алгоритмы [14]. Более удобный способ приведен ниже.

Произвольную Λ-оптимальную точку можно получить, решая задачи математического программирования для различных $P \in R^M$:

$$\begin{cases} t \to \max; \\ \left(u\left(x\right) - \left(Et + P\right), H_i\right) \ge 0, i = \overline{1, L}; \\ x \in X \subset R^N. \end{cases} \tag{16}$$

Ниже приводится алгоритм решения задачи (16).

Будем рассматривать следующую задачу математического программирования: область допустимых значений X определена неравенствами

$$g_i\left(x\right) \ge 0, \; i = \overline{1, m}, \tag{17}$$

где функциис $g_i\left(x\right)$ — выпуклые гладкие функции, причем множество X регулярно по Слейтеру и ограничено. На множестве X требуется максимизировать функцию $f\left(x\right)$, то есть найти точку x^*, для которой выполняется

$$f\left(x^*\right) = \max f\left(x\right), \; x \in X, \tag{18}$$

поскольку множество X содержит внутренние точки, то начальное приближение можно найти, решая задачу

$$\begin{gathered}\sigma \to \max \\ g_i\left(x\right) \ge \sigma, \; i = \overline{1, m}.\end{gathered} \tag{19}$$

Причем нет необходимости искать максимальное значение σ, достаточно найти некоторое начальное приближение x^1 при котором $\sigma > 0$.

Для того, чтобы избежать слишком маленьких шагов, движения по зигзагам, на каждом k-ом шаге алгоритма задаются некоторые значения $\varepsilon_k > 0$ и далее точку x^k будем полагать принадлежащей поверхности $g_i(x) = 0$, если

$$\varepsilon_k \ge g_i\left(x^k\right) \ge 0, \tag{20}$$

множество активных ограничений, в этом случае будем обозначать $I\left(x^k, \varepsilon_k\right)$.

Далее будем полагать, что x^1 находится на границе области допустимых значений X, так как в противном случае можно продвинуться до границы допустимой области по направлению $\nabla f\left(x^1\right)$.

Теперь полагаем $k = 1$ и алгоритм метода в общем виде можно сформулировать так:

1. определение в полученной точке приближенного решения x^k подходящего направления S^k, указывающего наискорейшее возрастание функции $f\left(x\right)$;

2. вычисление нового значения ε_k;

3. вычисление длины шага перемещения и перехода в точку x^{k+1}.

Изложим алгоритм детально:

Этап 1. Определение подходящего направления.

Подходящее направление S^k в точке x^k определим таким образом, чтобы в этом направлении возрастала функция $f\left(x\right)$, то есть должно быть выполнено условие

$$\left(\nabla f, S^k\right) > 0. \tag{21}$$

Кроме того, направление должно вести внутрь области X, то есть выполняются неравенства

$$\left(\nabla g_i, S^k\right) \ge 0,\ \ i \in I\left(x^k, \varepsilon_k\right). \tag{22}$$

Для осуществления наискорейшего движения по направлению наискорейшего возрастания целевой функции с проникновением внутрь области X, необходимо чтобы меньшая из величин

$$\begin{gathered}\left(\nabla f, S^k\right),\ \left(\nabla g_i, S^k\right),\\ i \in I\left(x^k, \varepsilon_k\right)\end{gathered} \tag{23}$$

принимала наибольшее значение.

Данное направление может быть чебышевской точкой, записанной выше системы неравенств. Это эквивалентно следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{gathered}\sigma \to \max \\ \left(\nabla f\left(x^k\right), S^k\right) \geq \sigma, \\ \left(\nabla g_i\left(x^k\right), S^k\right) \geq \sigma, \;\; i \in I\left(x^k, \varepsilon_k\right) \\ -1 \leq S_j^k \leq 1, \;\; j = \overline{1, N}.\end{gathered} \tag{24}$$

Задача (24) является задачей линейного программирования. На данном шаге вычисляются значения S^k и σ_k. Вместо последнего ограничения задачи (24) иногда используется условие $\left(S^k, S^k\right) \leq 1$.

Этап 2. Вычисление значения ε_k.

Если $\sigma_k \geq \varepsilon_k$, то значение ε_k не меняется, полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

Если $\sigma_k \leq \varepsilon_k$, то значение ε_k меняется.

В случае, когда $\varepsilon_k \geq \sigma_k > 0$, то полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k c$, где $1 > c > 0$ и продолжаем процесс движения из точки x^k в направлении S^k

Если $\sigma_k = 0$, то решается задача

$$\begin{gathered}\sigma \to \max \\ \left(\nabla f\left(x^k\right), S^k\right) \geq \sigma, \\ \left(\nabla g_i\left(x^k\right), S^k\right) \geq \sigma, \;\; i \in I\left(\left(x^k\right)\right) \\ -1 \leq S_j^k \leq 1, \;\; j = \overline{1, N}.\end{gathered} \tag{25}$$

Если $\max \sigma = 0$,то x^k — решение, процедура останавливается.

Если $\max \sigma > 0$, то полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k c$ и продолжаем движение в направлении S^k.

Этап 3. Вычисление шага. Если определены значени S^k и σ_k, то осуществляется движение по направлению S^k по формуле

$$x^{k+1} = x^k + S^k \theta_k,$$

где θ_k является наименьшим из многочисленных значений корней уравнений

$$g_i\left(x^k + S^k \theta\right) = 0, \;\; i \in I \, . \tag{26}$$

Теперь определены значения S^{k+1} и σ_{k+1}, полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 1.

Численный пример. Пример 3. Множество допустимых значений X задано линейными неравенствами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \le 11, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3. \end{cases} \qquad (27)$$

Это можно записать так

$$\begin{cases} g_1(x) = 8 - x_1 - x_2 - x_3 \ge 0, \\ g_2(x) = 11 - 4x_1 - x_2 - x_3 \ge 0, \\ g_3(x) = x_1 \ge 0, \\ g_4(x) = x_2 \ge 0, \\ g_5(x) = x_3 \ge 0, \end{cases} \qquad (28)$$

$$X = \{x \mid g_i(x) \ge 0, i = \overline{1,5}\}.$$

Агрегированные переменные являются функциями от x

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 5x_1^4 + 2x_2 + 3x_3^2, \\ u_2(x) &= 9x_1^2 + 10x_2 + 0,5x_3^{3/2}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Глобальный критерий эффективности имеет вид

$$\begin{aligned} &F(x) = \Phi_1\left(u\left(x^1\right)\right) + \Phi_2\left(x^2\right), \\ &x^1 \in X^1 \subset R^3, \;\; x^2 \in X^2 \subset R^{N-3} \end{aligned} \qquad (30)$$

и его требуется максимизировать. Здесь выделена подзадача размерности 3.

Для нахождения максимума F(x) требуется найти максимум функции Φ_1, которая является Λ–монотонной функцией для конусам Λ, сопряженного конусу Λ^* с генератором $H_1 = (5,4)^T, H_2 = (4,5)^T$ (рис. 1).

Для нахождения максимального значения $F(x)$ необходимо найти максимальное значение $\Phi_1\left(u\left(x^1\right)\right)$ на множестве недоминируемых решений. Здесь можно заметить, что размерность данной подзадачи меньше размерности исходной задачи. Конус Λ в данном случае включает R^+, поскольку $R^+ \subset \Lambda$, то множество Λ–оптимальных точек может быть уже, чем множество Парето-оптимальных точек. Множеством Парето-оптимальных точек в данной задаче будет кривая, проходящая через точки (рис. 2).

$$A=(16{,}00,\ 80{,}00)^T,\ \ B=(19{,}00,\ 79{,}00)^T,\ C=(285{,}96,\ 68{,}06)^T.$$

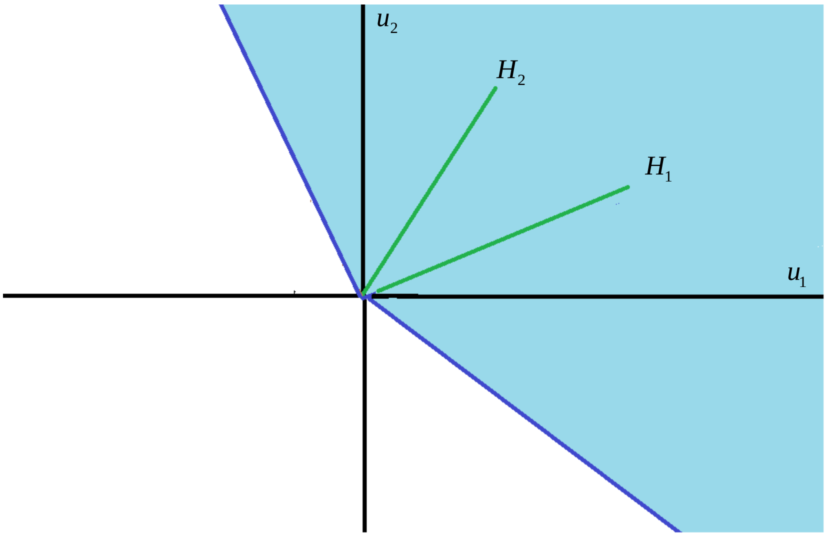

Рис. 1. Фиксированный конус Λ. На рисунке вектора H_1 и H_2 являются генератором конуса Λ^*, голубым выделен конус Λ

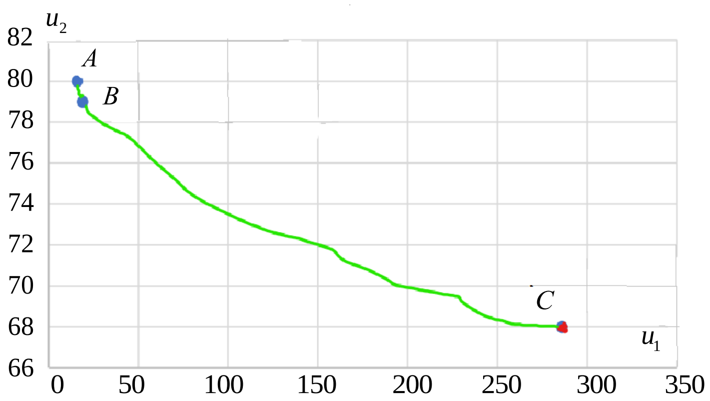

Рис. 2. Парето-оптимальные и Λ-оптимальные решения

Если использовать изложенный выше метод решения соответствующей задачи (A), то в результате вычислений будет получена только одна Λ–оптимальная точка $C=(285{,}96,\ 68{,}06)^T$, эти значения достигаются при $x=(2{,}75,\ 0{,}00,\ 0{,}00)^T$.

Заключение. Метод, рассмотренный в статье, применим для случая, когда глобальный критерий эффективности является Λ–монотонной функцией от выделенных агрегированных параметров. Поскольку обычная монотонность является частным случаем Λ–монотонности, то метод применим для более широкого класса целевых функций, чем в работе [1], кроме того, метод позволяет выделять подзадачи меньшей размерности. Численный пример показывает, что количество Λ-оптимальных решений может быть значительно меньше, чем количество Парето–оптимальных решений. Можно заметить, что предложенный численный метод основан на методе возможных направлений [15,16] и его применение более ”удобно” для задач с линейными ограничениями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Краснощёков П.С., Морозов В.В., Фёдоров В.В. Декомпозиция в задачах проектирования. *Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика*, 1979, № 2, с. 7–9.

[2] Краснощеков П.С. Морозов В.В., Попов Н.М. *Оптимизация в автоматизированном проектировании*. Москва, МАКС Пресс, 2018, 323 с.

[3] Месарович М., Такахара Я. *Общая теория систем: математические основы*. Москва, Мир, 1978, 316 с.

[4] Морозов В.В, Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* Москва, URSS, 2009, 288 с.

[5] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва, Физматлит, 2007, 256 с.

[6] Цурков В.И. *Декомпозиция в задачах большой размерности*. Москва, Наука, 1981, 352 с.

[7] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций*. Москва, Издательский центр «Академия», 2008, 464 с.

[8] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем*. Москва, Едиториал УРСС, 2004, 400 с.

[9] Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. *Проблема декомпозиции в математическом моделировании*. Москва, Фазис, 1998, 266 с.

[10] Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 319–377.

[11] Tzeng G.H., Wang H.F., Wen U.P., Yu P.L. *Multiple Criteria Decision Making*. New York, Springer, 2011, 398 p.

[12] Kiselev V.V. Application of the Λ-monotonicity to the search for optimal solutions in higher-dimensional problems, *Journal of Mashematical Science*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673.

[13] Киселев В.В. Использование Парето и Λ–оптимальности при решении некоторых классов задач оптимального управления. *Вестник финансового университета*, 2016, № 4, с. 72–77.

[14] Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Гончаров Д.А. Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 84–102.

[15] Зойтендейк Г. *Методы возможных направлений*. Москва, Издательство иностранной литературы, 1963, 176 с.

[16] Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва, Физматлит, 2004, 264 с.

Статья поступила в редакцию 09.11.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Киселев В.В. Метод нахождения недоминируемых решений в задачах декомпозиции моделей сложных систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 129–140.

Киселев Виктор Вадимович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: gedanbare@gmail.com

Method of finding non-dominant solutions in decomposition problems

© V.V. Kiselev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article discusses the method of finding optimal solutions in the presence of a model of a complex technical system in the optimal design problem. The method is based on the use of nondominable, $\Lambda -$optimal solutions and is a generalization of the method of Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V.V. [1]. The method allows in many cases (for $\Lambda -$monotone objective functions) to reduce the number of calculations and reduce the dimension of the original problem. A numerical method for constructing $\Lambda -$optimal solutions has been developed. A numerical example is given in which it is shown that the number of $\Lambda -$optimal solutions consists of a single point, and the set of Pareto–optimal solutions is a curve on which it is necessary to build an ε–network to find the optimal solution.

Keywords: *mathematical programming, large dimension, Pareto–optimality, decomposition, monotonicity*

REFERENCES

[1] Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V.V. Dekompoziciya v zadachah proektirovaniya [Decomposition in design problems]. Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics], 1979, No. 2, pp. 7-9.
[2] Krasnoshchekov P.S. Morozov V.V., Popov N.M. *Optimizaziya v avtomatizirovannom proektirovanii* [Optimization in computer-aided design]. Moscow, MAKS Press, 2018, 323 p.
[3] Mesarovich M., Takahara Ya. *Obschay teoriya system: matematicheskie osnovi* [General theory of systems: mathematical foundations]. Moscow, Mir Publ., 1978, 316 p.
[4] Morozov V.V., Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Issledovanie operatiy v zadachax i uprazhneniyax* [Investigation of operations in tasks and exercises]. Moscow, URSS Publ., 2009, 288 p.
[5] Podinovsky V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimalnie rescheniya mnogokriterialnix zadachax* [Pareto-optimal solutions of multicriteria problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 256 p.
[6] Tsurkov V.I. *Decompozitiya v zadachaxbolschoy razmernosti* [Decomposition in problems of large dimension]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 352 p.
[7] Vasin A.A., Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V. *Issledovanie operatziy* [Operations research]. Moscow, Publishing Center "Academy", 2008, 464 p.

[8] Kalman R., Falb P., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoy teorii system* [Essays on the mathematical theory of systems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004, 400 p.
[9] Pavlovsky Yu.N., Smirnova T.G. *Problema dekompozizii v matematicheskom modelirovanii* [The problem of decomposition in mathematical modeling]. Moscow, Phasis Publ., 1998 266 p.
[10] Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 319–377.
[11] Tzeng G.H., Wang H.F., Wen U.P., Yu P.L. *Multiple Criteria Decision Making*. New York, Springer, 2011, 398 p.
[12] Kiselev V.V. Application of the Λ-monotonicity to the search for optimal solutions in higher-dimensional problems, *Journal of Mashematical Science*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673.
[13] Kiselev V.V. Pareto-optimality and L–optimal for solving some classes of optimal control problem. *Bulletin of the Financial University*, 2016, no. 4, pp. 72–77.
[14] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Goncharov D.A. Use of hybrid algorithms in extremum eigenproblems of Lagrangian dynamical systems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 84–102.
[15] Zoitendijk G. *Metodi vozmozhnix napravleniy* [Methods of possible directions]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1963, 176 p.
[16] Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 264 p.

Kiselev V.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: gedanbare@gmail.com