



Математическое моделирование и численные методы

Киселев В.В. Метод нахождения недоминируемых решений в задачах декомпозиции моделей сложных систем. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 1, с. 129–140.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/274/>

Метод нахождения недоминируемых решений в задачах декомпозиции моделей сложных систем

© В.В. Киселев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассматривается метод нахождения оптимальных решений, при наличии модели сложной технической системы, в задаче оптимального проектирования. Метод основан на использовании недоминируемых, Λ – оптимальных решений и является обобщением метода Краснощекова П.С., Морозова В.В., Федорова В.В. [1]. Метод позволяет во многих случаях (для Λ – монотонных целевых функций) сократить количество вычислений и снизить размерность исходной задачи. Разработан численный метод построения Λ – оптимальных решений. Приводится численный пример, в котором показано, что количество Λ – оптимальных решений состоит из одной точки, а множество Парето-оптимальных решений является некоторой кривой, на которой для нахождения оптимального решения необходимо строить ε -сеть.

Ключевые слова: математическое программирование, большая размерность, Парето-оптимальность, декомпозиция, монотонность

Введение. Проектирование сложной технической системы во многих случаях предполагает создание и исследование математической модели системы с целью выбора оптимального варианта. Модель реализуется в виде системы программных модулей. На вход модели подаются значения варьируемых конструктивных параметров, на выходе можно получить значение глобального критерия эффективности системы. Поиск оптимальных решений в некоторых задачах экономики и техники является сложным итерационным процессом, в котором используются достаточно большие программные модули. Даже при использовании современной вычислительной техники время вычислений, необходимое для получения оптимального варианта с заданной точностью может быть очень большим. В некоторых случаях, при наличии известных свойств целевой функции, основную задачу оптимизации можно разбить на подзадачи и сократить количество вычислений. В работе [1] для снижения размерности задачи и сокращения количества вычислений используется свойство монотонности целевой функции и понятие оптимальности по Парето.

Пусть $F(x)$ — глобальный критерий эффективности сложной технической или экономической системы, который зависит от параметров $x \in X \subset \mathbb{R}^N$ и этот критерий желательно максимизировать, т.е. решается задача поиска вектора

$$x^0 \in \text{Arg max } F(x), x \in X. \quad (1)$$

Если рассматриваемая система простая, то для поиска оптимального решения можно использовать обычные методы математического программирования, но для сложных систем такой подход не приводит к успеху в силу большой размерности задачи и значительного времени вычисления глобального критерия эффективности.

Для решения задачи (1) Краснощеков П.С., Морозов В.В. и Федоров В.В. предложили выделять частные критерии эффективности $u_i(x), i = \overline{1, M}$ и рассматривать класс монотонных функций

$$F(x) = \Phi(u(x)), \quad (2)$$

таких, что для любых $x^1, x^2 \in X$ из условия

$$u(x^1) \geq u(x^2) \quad (3)$$

следует

$$\Phi(u(x^1)) \geq \Phi(u(x^2)). \quad (4)$$

Данный подход позволяет сократить количество вычислений, так как задача (1) заменяется задачей поиска оптимального вектора только на множестве Парето-оптимальных решений. Поскольку множество Парето-оптимальных решений часто значительно меньше множества X , то количество узлов δ -сетки на множестве Парето-оптимальных решений значительно меньше количества узлов δ -сетки на X .

Если учесть, что время вычислений значения функции $F(x)$ большое, то такой подход позволяет значительно сократить общее время поиска оптимального варианта и получить этот вариант в заданные сроки. Другие подходы к решению задач большой размерности и декомпозиции исходной модели приведены в работах [2–9].

Постановка задачи. В данной работе используется свойство Λ -монотонности глобального критерия, которое обобщает обычное понятие монотонности и понятие Λ -оптимальности [10,11], которое обобщает понятие оптимальности по Парето.

Для сложных систем, при решении задачи (1), часто единственным возможным методом решения является метод перебора узлов δ -сетки, построенной на множестве допустимых значений X .

Если выполнены следующие условия:

1) $F(x)$ допускает представление

$$F(x) = \Phi(u(x)), \quad (5)$$

2) функция $\Phi(u)$ Λ — монотонна,

то для решения задачи (1) достаточно перебрать только узлы, принадлежащие множеству недоминируемых решений.

Формальные условия проверки Λ –монотонности $\Phi(u(x))$ приведены в работе [12,13], иногда Λ –монотонность можно установить из общих свойств постановки экономической или технической задачи. Например, если Φ — стоимость всей системы, а u_i — стоимость i –ой подсистемы, то $\Phi(u)$ является монотонной функцией.

Далее будем полагать, что множество допустимых значений X есть некоторое связное и ограниченное подмножество в R^N .

Определение 1. Непрерывная функция $\Phi(u)$, определенная на множестве U , называется возрастающей по направлению $S \neq 0$, если для любой точки $u^0 \in U$ выполняется неравенство

$$\Phi(u) > \Phi(u^0) \quad (6)$$

если

$$u = u^0 + tS, \quad u \in U, \quad t > 0. \quad (7)$$

Определение 2. Непрерывная функция $\Phi(u)$, определенная на множестве U , называется неубывающей по направлению $S \neq 0$, если для любой точки $u^0 \in U$ выполняется неравенство

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^0), \quad (8)$$

если

$$u = u^0 + tS, \quad u \in U, \quad t > 0. \quad (9)$$

Определение 3. Если функция $\Phi(u)$ является возрастающей на множестве U по любому направлению S , принадлежащему конусу Λ , то $\Phi(u)$ называется Λ –возрастающей функцией на U .

Пример 1. Функция

$$\Phi(u) = 2u_1 + u_2, \quad (10)$$

Λ –монотонна для следующих конусов:

$$a) \quad \Lambda = \{u | (S, u) > 0, S = (2, 2)^T\};$$

$$\text{б) } \Lambda = \{u | u_i \geq 0, i = \overline{1, M}\};$$

$$\text{в) } \Lambda = \{u | (H_1, u) \geq 0, (H_2, u) \geq 0, H_1 = (8, 2)^T, H_2 = (1, 5)^T\}.$$

Пример 2. Функция

$$\Phi(u) = -4u_1 - 3u_2. \quad (11)$$

Λ –монотонна для следующих конусов:

$$\text{а) } \Lambda = \{u | u_i \leq 0, i = \overline{1, M}\};$$

$$\text{б) } \Lambda = \{u | (H_1, u) \geq 0, (H_2, u) \geq 0, H_1 = (-5, -3)^T, H_2 = (-2, -8)^T\}.$$

Пусть на множестве X задана вектор-функция $u(x), x \in X, u \in R^M$.

Определение 4. Точка $x \in X$ называется Λ –оптимальной, если для всякого $y \in X$ такого, что $u(y) - u(x) \in \Lambda$ следует $u(y) = u(x)$.

Множество всех Λ –оптимальных точек на X будем обозначать X_Λ .

Множество Λ –оптимальных точек на $U = u(X)$ будем обозначать $U_\Lambda, U_\Lambda = u(X_\Lambda)$.

Определение 5. Конус Λ^* называется многогранным, если его можно представить в виде

$$\Lambda^* = \left\{ z \mid z = \sum_{i=1}^L \alpha_i H_i, \alpha_i \geq 0, H_i \in R^M, i = \overline{1, L} \right\}. \quad (12)$$

Векторы $H_i, i = \overline{1, L}$ называются генераторами конуса.

Определение 6. Конус Λ называется сопряженным конусу Λ^* , если

$$\Lambda = \{u \mid (u, z) \geq 0, z \in \Lambda^*\}. \quad (13)$$

Далее предполагается, что на основании анализа модели системы выделены агрегированные параметры $u(x), u \in R^M, x \in X \subset R^N, M < N$, и глобальный критерий допускает представление $F(x) = \Phi(u(x))$, где $\Phi(u)$ является Λ –монотонной функцией для конуса Λ . Выберем произвольный многогранный конус $\Lambda^1 \subset \Lambda$,

$$\Lambda^1 = \{u \mid (u, H_i) \geq 0, H_i \in R^M, i = \overline{1, L}\} \quad (14)$$

и точку E внутри конуса $E \in \text{int } \Lambda$ (E можно получить, например, как решение задачи чебышевского приближения

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \min, \\ -(u, H_i) &\leq \eta, \quad |u_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (15)$$

Метод нахождения недоминируемых решений. Поиск Λ -оптимальных решений можно формулировать в минимаксной форме и использовать алгоритмы [14]. Более удобный способ приведен ниже.

Произвольную Λ -оптимальную точку можно получить, решая задачи математического программирования для различных $P \in R^M$:

$$\begin{cases} t \rightarrow \max; \\ (u(x) - (Et + P), H_i) \geq 0, i = \overline{1, L}; \\ x \in X \subset R^N. \end{cases} \quad (16)$$

Ниже приводится алгоритм решения задачи (16).

Будем рассматривать следующую задачу математического программирования: область допустимых значений X определена неравенствами

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (17)$$

где функции $g_i(x)$ — выпуклые гладкие функции, причем множество X регулярно по Слейтеру и ограничено. На множестве X требуется максимизировать функцию $f(x)$, то есть найти точку x^* , для которой выполняется

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \quad (18)$$

поскольку множество X содержит внутренние точки, то начальное приближение можно найти, решая задачу

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\geq \sigma, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Причем нет необходимости искать максимальное значение σ , достаточно найти некоторое начальное приближение x^1 при котором $\sigma > 0$.

Для того, чтобы избежать слишком маленьких шагов, движения по зигзагам, на каждом k -ом шаге алгоритма задаются некоторые значения $\varepsilon_k > 0$ и далее точку x^k будем полагать принадлежащей поверхности $g_i(x) = 0$, если

$$\varepsilon_k \geq g_i(x^k) \geq 0, \quad (20)$$

множество активных ограничений, в этом случае будем обозначать $I(x^k, \varepsilon_k)$.

Далее будем полагать, что x^1 находится на границе области допустимых значений X , так как в противном случае можно продвинуться до границы допустимой области по направлению $\nabla f(x^1)$.

Теперь полагаем $k=1$ и алгоритм метода в общем виде можно сформулировать так:

1. определение в полученной точке приближенного решения x^k подходящего направления S^k , указывающего наискорейшее возрастание функции $f(x)$;
2. вычисление нового значения ε_k ;
3. вычисление длины шага перемещения и перехода в точку x^{k+1} .

Изложим алгоритм детально:

Этап 1. Определение подходящего направления.

Подходящее направление S^k в точке x^k определим таким образом, чтобы в этом направлении возрастала функция $f(x)$, то есть должно быть выполнено условие

$$(\nabla f, S^k) > 0. \quad (21)$$

Кроме того, направление должно вести внутрь области X , то есть выполняются неравенства

$$(\nabla g_i, S^k) \geq 0, \quad i \in I(x^k, \varepsilon_k). \quad (22)$$

Для осуществления наискорейшего движения по направлению наискорейшего возрастания целевой функции с проникновением внутрь области X , необходимо чтобы меньшая из величин

$$\begin{aligned} &(\nabla f, S^k), (\nabla g_i, S^k), \\ &i \in I(x^k, \varepsilon_k) \end{aligned} \quad (23)$$

принимала наибольшее значение.

Данное направление может быть чебышевской точкой, записанной выше системы неравенств. Это эквивалентно следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned}
 &\sigma \rightarrow \max \\
 &(\nabla f(x^k), S^k) \geq \sigma, \\
 &(\nabla g_i(x^k), S^k) \geq \sigma, \quad i \in I(x^k, \varepsilon_k) \\
 &-1 \leq S_j^k \leq 1, \quad j = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Задача (24) является задачей линейного программирования. На данном шаге вычисляются значения S^k и σ_k . Вместо последнего ограничения задачи (24) иногда используется условие $(S^k, S^k) \leq 1$.

Этап 2. Вычисление значения ε_k .

Если $\sigma_k \geq \varepsilon_k$, то значение ε_k не меняется, полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

Если $\sigma_k \leq \varepsilon_k$, то значение ε_k меняется.

В случае, когда $\varepsilon_k \geq \sigma_k > 0$, то полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k c$, где $1 > c > 0$ и продолжаем процесс движения из точки x^k в направлении S^k

Если $\sigma_k = 0$, то решается задача

$$\begin{aligned}
 &\sigma \rightarrow \max \\
 &(\nabla f(x^k), S^k) \geq \sigma, \\
 &(\nabla g_i(x^k), S^k) \geq \sigma, \quad i \in I(x^k) \\
 &-1 \leq S_j^k \leq 1, \quad j = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Если $\max \sigma = 0$, то x^k — решение, процедура останавливается.

Если $\max \sigma > 0$, то полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k c$ и продолжаем движение в направлении S^k .

Этап 3. Вычисление шага. Если определены значения S^k и σ_k , то осуществляется движение по направлению S^k по формуле

$$x^{k+1} = x^k + S^k \theta_k,$$

где θ_k является наименьшим из многочисленных значений корней уравнений

$$g_i(x^k + S^k \theta) = 0, \quad i \in I. \tag{26}$$

Теперь определены значения S^{k+1} и σ_{k+1} , полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 1.

Численный пример. Пример 3. Множество допустимых значений X задано линейными неравенствами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 11, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (27)$$

Это можно записать так

$$\begin{cases} g_1(x) = 8 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ g_2(x) = 11 - 4x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ g_3(x) = x_1 \geq 0, \\ g_4(x) = x_2 \geq 0, \\ g_5(x) = x_3 \geq 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$X = \{x \mid g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, 5}\}.$$

Агрегированные переменные являются функциями от x

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 5x_1^4 + 2x_2 + 3x_3^2, \\ u_2(x) &= 9x_1^2 + 10x_2 + 0,5x_3^{3/2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Глобальный критерий эффективности имеет вид

$$\begin{aligned} F(x) &= \Phi_1(u(x^1)) + \Phi_2(x^2), \\ x^1 &\in X^1 \subset R^3, \quad x^2 \in X^2 \subset R^{N-3} \end{aligned} \quad (30)$$

и его требуется максимизировать. Здесь выделена подзадача размерности 3.

Для нахождения максимума $F(x)$ требуется найти максимум функции Φ_1 , которая является Λ -монотонной функцией для конусам Λ , сопряженного конусу Λ^* с генератором $H_1 = (5, 4)^T, H_2 = (4, 5)^T$ (рис. 1).

Для нахождения максимального значения $F(x)$ необходимо найти максимальное значение $\Phi_1(u(x^1))$ на множестве недоминируемых решений. Здесь можно заметить, что размерность данной подзадачи меньше размерности исходной задачи. Конус Λ в данном случае включает R^+ , поскольку $R^+ \subset \Lambda$, то множество Λ -оптимальных точек может быть уже, чем множество Парето-оптимальных точек. Множеством Парето-оптимальных точек в данной задаче будет кривая, проходящая через точки (рис. 2).

$$A = (16,00, 80,00)^T, \quad B = (19,00, 79,00)^T, \quad C = (285,96, 68,06)^T.$$

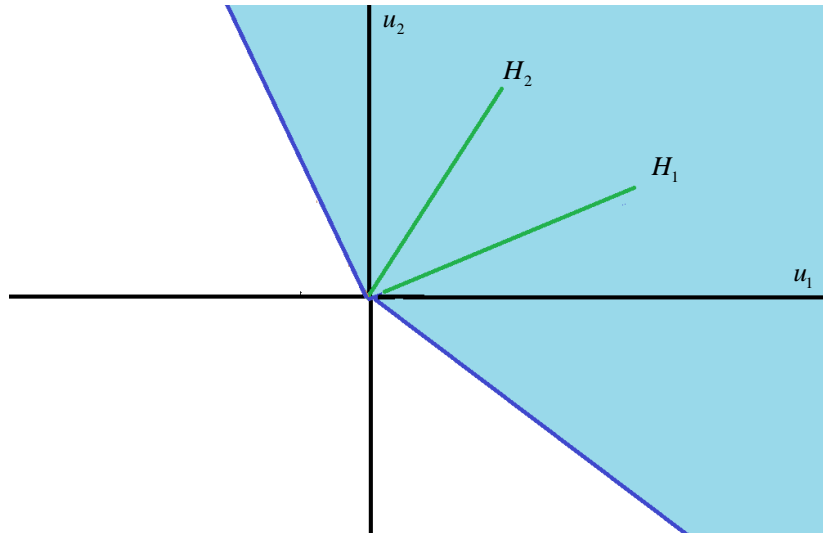


Рис. 1. Фиксированный конус Λ . На рисунке вектора H_1 и H_2 являются генератором конуса Λ^* , голубым выделен конус Λ

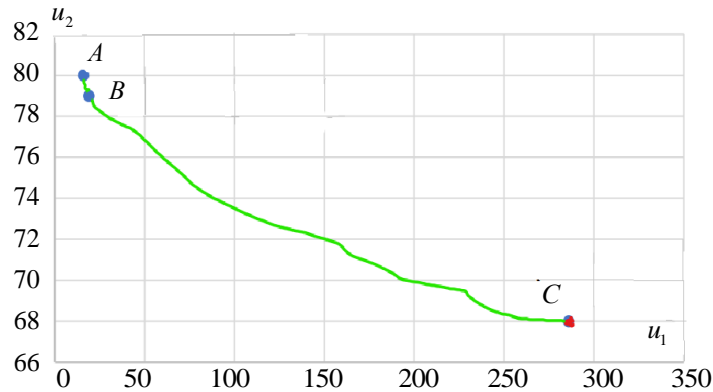


Рис. 2. Парето-оптимальные и Λ -оптимальные решения

Если использовать изложенный выше метод решения соответствующей задачи (A), то в результате вычислений будет получена только одна Λ -оптимальная точка $C = (285,96, 68,06)^T$, эти значения достигаются при $x = (2,75, 0,00, 0,00)^T$.

Заключение. Метод, рассмотренный в статье, применим для случая, когда глобальный критерий эффективности является Λ -монотонной функцией от выделенных агрегированных параметров. Поскольку обычная монотонность является частным случаем Λ -монотонности, то метод применим для более широкого

класса целевых функций, чем в работе [1], кроме того, метод позволяет выделять подзадачи меньшей размерности. Численный пример показывает, что количество Λ -оптимальных решений может быть значительно меньше, чем количество Парето-оптимальных решений. Можно заметить, что предложенный численный метод основан на методе возможных направлений [15,16] и его применение более "удобно" для задач с линейными ограничениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Краснощёков П.С., Морозов В.В., Фёдоров В.В. Декомпозиция в задачах проектирования. *Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика*, 1979, № 2, с. 7–9.
- [2] Краснощёков П.С. Морозов В.В., Попов Н.М. *Оптимизация в автоматизированном проектировании*. Москва, МАКС Пресс, 2018, 323 с.
- [3] Месарович М., Такахара Я. *Общая теория систем: математические основы*. Москва, Мир, 1978, 316 с.
- [4] Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях*. Москва, URSS, 2009, 288 с.
- [5] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва, Физматлит, 2007, 256 с.
- [6] Цурков В.И. *Декомпозиция в задачах большой размерности*. Москва, Наука, 1981, 352 с.
- [7] Васин А.А., Краснощёков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций*. Москва, Издательский центр «Академия», 2008, 464 с.
- [8] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем*. Москва, Едиториал УРСС, 2004, 400 с.
- [9] Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. *Проблема декомпозиции в математическом моделировании*. Москва, Фазис, 1998, 266 с.
- [10] Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 319–377.
- [11] Tzeng G.H., Wang H.F., Wen U.P., Yu P.L. *Multiple Criteria Decision Making*. New York, Springer, 2011, 398 p.
- [12] Kiselev V.V. Application of the Λ -monotonicity to the search for optimal solutions in higher-dimensional problems, *Journal of Mathematical Science*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673.
- [13] Киселев В.В. Использование Парето и Λ -оптимальности при решении некоторых классов задач оптимального управления. *Вестник финансового университета*, 2016, № 4, с. 72–77.
- [14] Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Гончаров Д.А. Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 84–102.
- [15] Зойтендейк Г. *Методы возможных направлений*. Москва, Издательство иностранной литературы, 1963, 176 с.
- [16] Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва, Физматлит, 2004, 264 с.

Статья поступила в редакцию 09.11.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Киселев В.В. Метод нахождения недоминируемых решений в задачах декомпозиции моделей сложных систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 129–140.

Киселев Виктор Вадимович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: gedanbare@gmail.com

Method of finding non-dominant solutions in decomposition problems

© V.V. Kiselev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article discusses the method of finding optimal solutions in the presence of a model of a complex technical system in the optimal design problem. The method is based on the use of nondominable, Λ – optimal solutions and is a generalization of the method of Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V.V. [1]. The method allows in many cases (for Λ – monotone objective functions) to reduce the number of calculations and reduce the dimension of the original problem. A numerical method for constructing Λ – optimal solutions has been developed. A numerical example is given in which it is shown that the number of Λ – optimal solutions consists of a single point, and the set of Pareto–optimal solutions is a curve on which it is necessary to build an ε –network to find the optimal solution.

Keywords: *mathematical programming, large dimension, Pareto–optimality, decomposition, monotonicity*

REFERENCES

- [1] Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V.V. Dekompozitsiya v zadachah proektirovaniya [Decomposition in design problems]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics], 1979, No. 2, pp. 7-9.
- [2] Krasnoshchekov P.S. Morozov V.V., Popov N.M. *Optimizatsiya v avtomatizirovannom proektirovanii* [Optimization in computer-aided design]. Moscow, MAKS Press, 2018, 323 p.
- [3] Mesarovich M., Takahara Ya. *Obschay teoriya system: matematicheskie osnovi* [General theory of systems: mathematical foundations]. Moscow, Mir Publ., 1978, 316 p.
- [4] Morozov V.V., Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Issledovanie operativ v zadachax i uprazhneniyax* [Investigation of operations in tasks and exercises]. Moscow, URSS Publ., 2009, 288 p.
- [5] Podinovskiy V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimalnie resheniya mnogokriterialnix zadachax* [Pareto-optimal solutions of multicriteria problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 256 p.
- [6] Tsurkov V.I. *Dekompozitsiya v zadachax bolschoy razmernosti* [Decomposition in problems of large dimension]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 352 p.
- [7] Vasin A.A., Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V. *Issledovanie operativ* [Operations research]. Moscow, Publishing Center "Academy", 2008, 464 p.

- [8] Kalman R., Falb P., Arbib M. *Oчерки по математической теории систем* [Essays on the mathematical theory of systems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004, 400 p.
- [9] Pavlovsky Yu.N., Smirnova T.G. *Problema dekompozitsii v matematicheskoy modelirovani* [The problem of decomposition in mathematical modeling]. Moscow, Phasis Publ., 1998 266 p.
- [10] Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 319–377.
- [11] Tzeng G.H., Wang H.F., Wen U.P., Yu P.L. *Multiple Criteria Decision Making*. New York, Springer, 2011, 398 p.
- [12] Kiselev V.V. Application of the Λ -monotonicity to the search for optimal solutions in higher-dimensional problems, *Journal of Mathematical Science*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 667–673.
- [13] Kiselev V.V. Pareto-optimality and L-optimal for solving some classes of optimal control problem. *Bulletin of the Financial University*, 2016, no. 4, pp. 72–77.
- [14] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Goncharov D.A. Use of hybrid algorithms in extremum eigenproblems of Lagrangian dynamical systems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 84–102.
- [15] Zoitendijk G. *Metodi vozmozhnix napravleniy* [Methods of possible directions]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1963, 176 p.
- [16] Karmanov V.G. *Matematicheskoye programmirovaniye* [Mathematical programming]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 264 p.

Kiselev V.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: gedanbare@gmail.com