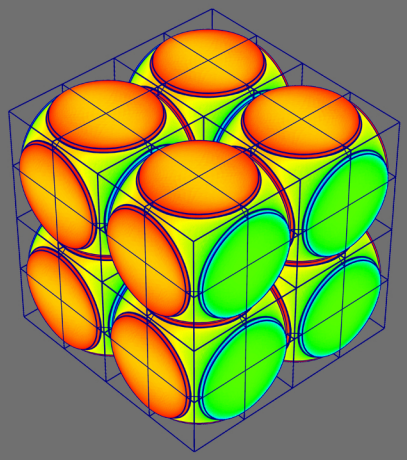
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Головина Н.Я., Белов П.А. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 1. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 1, с. 63–96

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/271/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:50:13

УДК 539.26 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-1-6396

Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 1

© Н.Я. Головина[1], П.А. Белов[2]

[1]Тюменский индустриальный университет,
Тюменская область, Тюмень, 625000, Россия
[2]Институт прикладной механики РАН, Москва, 125040, Россия

В статье представлен результат обзора работ, посвященных исследованиям свойств упругопластических материалов. Статья состоит из двух частей. В первой части рассмотрены универсальные одно-, двух- и трехпараметрические законы, описывающие нелинейную зависимость между напряжением и деформацией вплоть до разрушения. В обзор вошли: степенные законы, параболические законы, экспоненциальные законы, гармонический закон. Сравнение рассмотренных эмпирических кривых с выборкой экспериментальных точек осуществляется стандартной процедурой минимизации суммарного квадратичного отклонения и использованием метода градиентного спуска для определения минимума функции многих переменных. Для оценки предсказательной силы моделей на соответствие эксперименту, использована представительная выборка из 158 экспериментальных точек кривой деформирования российского титанового сплава ВТ6. Проведенный анализ показал, что универсальные эмпирические законы деформирования, содержащие менее четырех формальных параметров, не могут обеспечить инженерную точность описания кривой деформирования с заданными на концах кривой напряжением и касательным модулем. Анализ достоинств и недостатков существующих эмпирических законов деформирования, позволил сформулировать определенные требования к их формулировке.

Ключевые слова: *эмпирические кривые напряжения–деформации, нелинейный закон упругости, упругопластические свойства материала, физические параметры упругопластических материалов, обработка экспериментальных данных*

Введение. Исследование закономерностей упругопластического деформирования и прочности материалов является важнейшей задачей механики деформируемого твердого тела.

Известен ряд эмпирических моделей нелинейного поведения упругопластических материалов. Ранние предложенные модели описывают поведение материала одним уравнением (J. Bernoulli (1694) [1, 2], Riccati (1731) [1, 7], Gerstner (1824) [1], Poncelet (1839) [1], Wertheim (1846) [1], Hodkinson (1849) [1, 4], Cox (1850) [1, 5], Imbert (20) [1, 8], Thompson (1891) [1, 6], Hartig (1893) [1, 3], Ludwik (1909) [9], Френкель (1927) [12], Ramberg и Osgood (1943) [13], Hollomon (1945) [10], Voce (1948) [14], Swift (1952) [11], Ludwigson (1971) [15]).

Однако дальнейшие исследования показали, что такие модели не дают точного отражения поведения упругопластических материалов в

полном диапазоне нагружения. Были сформулированы модели, состоящие из системы уравнений, описывающих поведение материала на различных участках кривой деформирования. На сегодняшний момент известны модели для двух, трех и четырех диапазонов нагружения, которые будут рассмотрены в последующих статьях.

Анализ достоинств и недостатков существующих законов деформирования, представленный в статье основан на следующих постулатах:

- начальное состояние материала является ненапряженным;
- кривая деформирования должна быть непрерывной;
- для материалов, не имеющих зоны упрочнения касательный модуль должен быть монотонно убывающей функцией деформации и, следовательно, кривизна кривой деформирования должна оставаться отрицательной по всей длине.

Все уравнения, соответствующие законам деформирования, приведены к безразмерному виду так, чтобы все кривые проходили через точки $(0;0)$ и $(1;1)$. Для этого напряжения σ нормированы на предел прочности σ_c:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \tag{1}$$

а деформации ε на относительную деформацию, соответствующую пределу прочности ε_c:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}. \tag{2}$$

Нормированный касательный модуль упругости E_0^* в начальной точке $(0;0)$ кривой деформирования:

$$E_0^* = \frac{E_0 \varepsilon_c}{\sigma_c}. \tag{3}$$

Нормированный касательный модуль упругости E_1^* в конечной $(1;1)$ точке истинной кривой деформирования:

$$E_1^* = \frac{E_1 \varepsilon_c}{\sigma_c}. \tag{4}$$

Сравнение выборки экспериментальных точек с эмпирическими кривыми осуществляется стандартной процедурой минимизации среднеквадратичного отклонения и использованием метода

градиентного спуска для определения минимума функции многих переменных. Для сравнения предсказаний моделей с экспериментом, использована представительная выборка экспериментальных точек кривой деформирования российского титанового сплава ВТ6.

В книге Дж. Ф. Белл [1] представлен обзор наиболее ранних исследований, посвященных нелинейной зависимости напряжение–деформация, составленный Рудольфом Мемке в 1897 году. Более поздние труды ученых, посвященные механике пластических деформаций, отражены в книгах П.Людвика [9], А.Надаи [16], С.П. Тимошенко [17], А. Мендельсона [18], А.А. Ильюшина [19], Ю.И. Димитриенко [20–21]. Наиболее поздние модели напряженно-деформированного состояния материалов представлены учеными в [22–27]. В работах [28–34] представлены последовательные этапы создания математически обоснованной многозвенной модели упругопластического материала.

Степенная модель Я. Бернулли (J. Bernoulli). Наиболее раннюю нелинейную модель упругости, основанную на эксперименте, в 1694 г. предложил Яков Бернулли [1, 2]:

$$\varepsilon = a\sigma^n, \tag{5}$$

где a и n — параметры материала.

Позже к такой же зависимости пришли Бюльфингер, Ходкинсон, Бах и Шюле.

На примере закона Бернулли продемонстрируем процесс нормировки:

$$\varepsilon^* \varepsilon_c = a(\sigma^* \sigma_c)^n,$$

$$\varepsilon^* = \frac{a(\sigma^* \sigma_c)^n}{\varepsilon_c} = \frac{a(\sigma_c)^n}{\varepsilon_c}\sigma^{*n}.$$

Вводим обозначение:

$$\frac{a(\sigma_c)^n}{\varepsilon_c} = A.$$

Тогда нормированный закон Бернулли принимает вид:

$$\varepsilon^* = A\sigma^{*n}. \tag{6}$$

Здесь A и n — безразмерные параметры материала.

Нормированная кривая напряжение–деформация должна проходить через заданную начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\begin{cases} \varepsilon^*(0) = 0, \\ \varepsilon^*(1) = A = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь закон Бернулли имеет вид:

$$\varepsilon^* = \sigma^{*n}. \tag{8}$$

Касательный модуль в начальной и конечной точках будет определяться:

$$E^*(\sigma^*) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{n\sigma^{*(n-1)}}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma^* \to 0} E^*(0) = \lim\limits_{\sigma^* \to 0} \dfrac{1}{n\sigma^{*(n-1)}} = \infty, \\ E^*(1) = \dfrac{1}{n} = E_1^*, \end{cases} \tag{10}$$

$$n = \frac{1}{E_1^*}. \tag{11}$$

В результате закон Бернулли принимает вид:

$$\varepsilon^*(\sigma^*) = (\sigma^*)^{1/E_1^*}.$$

Требование монотонного убывания касательного модуля, эквивалентное требованию отрицательной кривизны на области определения кривой, даёт:

$$E^{*\prime}(\sigma^*) = \frac{d^2\sigma^*}{d\varepsilon^{*2}} = -\frac{(n-1)\sigma^{*(n-2)}}{n(\sigma^{*(n-1)})^2} < 0,$$

$$\frac{n-1}{n} > 0.$$

Отсюда видно, что значения n ограничены интервалом $n > 1$. При соблюдении этого условия, отрицательная кривизна кривой напряжение–деформация сохраняется на всей области определения.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через две заданные точки (начальную и конечную) и выполнение гипотезы о недеформированном начальном состоянии. Однако в начальной точке для любого материала, в соответствии с этим законом, касательный модуль оказывается бесконечно большим, что не соответствует экспериментальным данным и физике процесса деформирования.

На рис. 1 показана, построенная по закону Бернулли, кривая деформирования, которая имеет минимальное значение среднего квадратичного отклонения теоретической кривой от выборки экспериментальных точек по деформациям.

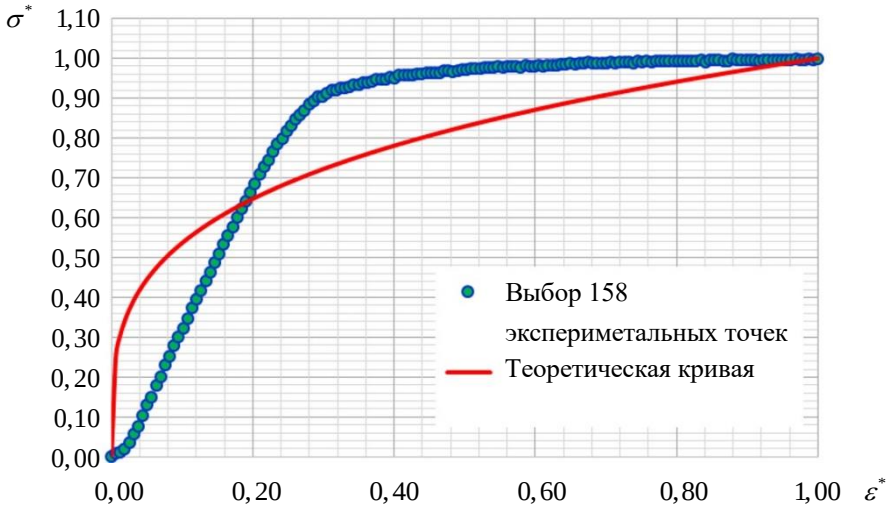


Рис. 1. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Бернулли

Среднее квадратичное отклонение по деформациям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 14,3%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = \infty;\ E_1^* = 0,273;\ n = 3,7$. Закон Бернулли не описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 хотя бы с инженерной точностью (5%).

Параболическая модель Хартига-Герстнера-Ходкинсона. Параболическая модель была сформулирована в результате независимых экспериментов Герстнером (Franz Anton von Gerstner, 1824), Итоном Ходкинсоном (Eaton Hodgkinson, 1843), Хартигом (Ernst Karl Hartig, 1893) [1,3,4].

$$\sigma = a_0\varepsilon - a_1\varepsilon^2. \tag{12}$$

Здесь a_0 и a_1 — параметры материала.

После нормировки имеем:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = A_0\varepsilon^* - A_1\varepsilon^{*2}. \tag{13}$$

Здесь A_0 и A_1 — безразмерные параметры материала.

Согласно условия прохождения нормированной кривой напряжение–деформация через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\begin{cases} \sigma^*(0) = 0, \\ \sigma^*(1) = A_0 - A_1 = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Из условия, что кривая в начальной и конечной точке имеет заданную касательную:

$$E^*(\varepsilon^*) = \sigma^{*\prime}(\varepsilon^*) = A_0 - 2A_1\varepsilon^*,$$
$$\begin{cases} E^*(0) = A_0 = E_0^*, \\ E^*(1) = A_0 - 2A_1 = E_1^*. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом параметры материала:

$$\begin{cases} A_0 = E_0^*, \\ A_1 = \dfrac{E_0^* - E_1^*}{2}. \end{cases} \quad (16)$$

Для материала, не имеющего на кривой напряжение–деформация участка упрочнения, кривая на всем интервале определения должна иметь отрицательную кривизну:

$$E^{*\prime}(\varepsilon^*) = \sigma^{*\prime\prime}(\varepsilon^*) = -2A_1 = -(E_0^* - E_1^*) < 0. \quad (17)$$

Действительно, этот закон определяет кривизну кривой отрицательной на всем интервале определения: $0 \le \varepsilon^* \le 1$.

Два параметра A_0 и A_1 связаны тремя условиями (14) и (15), которые позволяют установить также связь между физическими параметрами материала:

$$E_0^* + E_1^* = 2. \quad (18)$$

В результате параболический закон Хартига–Герстнера–Ходкинсона приобретает вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = E_0^*\varepsilon^* - \frac{(E_0^* - E_1^*)}{2}\varepsilon^{*2}. \quad (19)$$

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через две заданные точки (начальную и конечную), выполнение гипотезы о ненапряженном состоянии в начальной точке. В то же время значения касательных модулей в начальной и конечной точках не могут иметь независимые значения. В соответствии с этим законом они связаны соотношением (18), что не соответствует экспериментальным данным и физике процесса деформирования.

На рис. 2. показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с моделью Хартига–Герстнера–Ходкинсона.

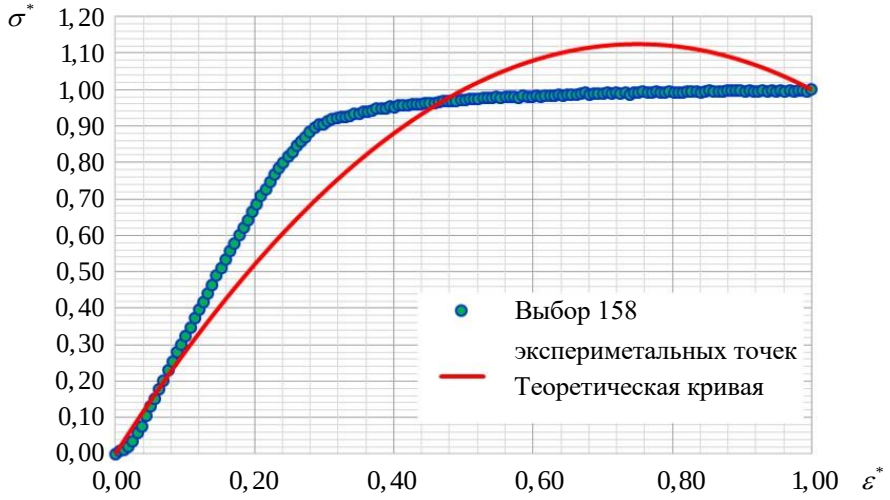


Рис. 2. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Хартига–Герстнера–Ходкинсона

Среднее квадратичное отклонение по напряжениям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 10,8%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 3;\ E_1^* = -1$. Закон Хартига–Герстнера–Ходкинсона описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с недостаточной точностью.

Гиперболический модель Кокса (Cox). Гомершам Кокс (Homersham Cox) в 1850 году предложил следующую модель [1,5]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{a_0 - a_1\sigma}. \tag{20}$$

Здесь a_0 и a_1 — параметры материала.

После нормировки кривая напряжение–деформация проходит через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\varepsilon^*(\sigma^*) = \frac{\sigma^*}{A_0 - A_1\sigma^*}. \tag{21}$$

Здесь A_0 и A_1 — безразмерные параметры материала.

$$\begin{cases} \varepsilon^*(0) = 0, \\ \varepsilon^*(1) = \dfrac{1}{A_0 - A_1} = 1 \to A_0 - A_1 = 1. \end{cases} \tag{22}$$

Выражение касательного модуля и их значения в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках будут:

$$E^*(\sigma^*) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{(A_0 - A_1\sigma^*)^2}{A_0}, \tag{23}$$

$$\begin{cases} E^*(0) = A_0 = E_0^*, \\ E^*(1) = \dfrac{(A_0 - A_1)^2}{A_0} = E_1^* \to (E_0^* - A_1)^2 = E_0^* E_1^*. \end{cases} \tag{24}$$

Решая (22) совместно с (24), получим:

$$\begin{aligned} A_0 &= E_0^*, \\ A_1 &= E_0^* - 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Условия (25) и (24) позволяют выразить зависимость между физическими параметрами материала:

$$E_0^* E_1^* = 1. \tag{26}$$

Модель Кокса, после этого принимает вид:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_0^* - (E_0^* - 1)\sigma^*}. \tag{27}$$

Кривизна кривой напряжение–деформация должна быть отрицательной на всей длине при условии отсутствия участка упрочнения, поэтому должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^*}{d\varepsilon^{*2}} = \frac{dE^*}{d\sigma^*}\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = -2A_1\frac{(A_0 - A_1\sigma^*)^3}{A_0^2} < 0, \\ E_0^* - (E_0^* - 1)\sigma^* > 0, \\ \sigma^* > \frac{E_0^*}{E_0^* - 1}. \end{aligned} \tag{28}$$

Так, как область определения для σ^* ограничена интервалом $[0;1]$, то:

$$\frac{E_0^*}{E_0^* - 1} > 0. \tag{29}$$

Отсюда $E_0^* > 1$.

Действительно, этот закон деформирования определяет кривизну кривой деформирования отрицательной на всем интервале.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную и конечную точки, выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке. Гиперболический закон

Кокса, первоначально двухпараметрический, может быть представлен, как однопараметрический. Недостатком данного закона является то, что касательный модуль в конце кривой не является независимым от касательного модуля в начале кривой напряжения–деформации.

На рис. 3 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с гиперболическим законом Кокса.

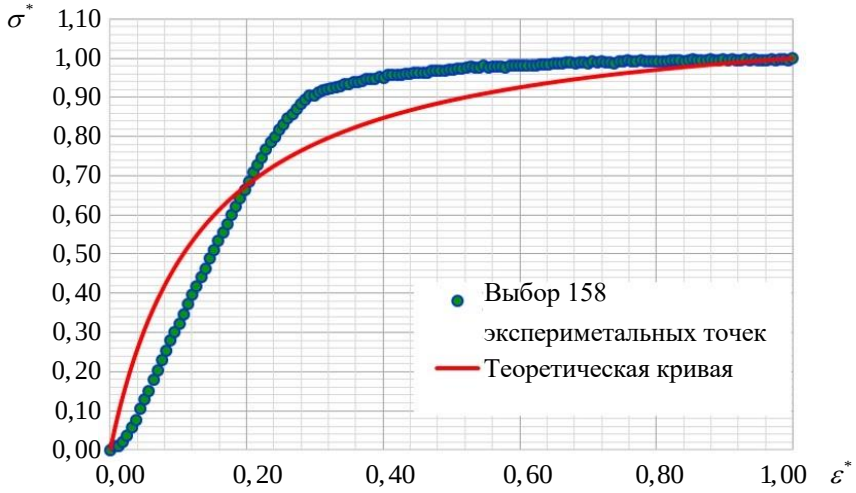


Рис. 3. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по гиперболической модели Кокса

Среднее квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 8,5%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 8,35$; $E_1^* = 0,12$. Гиперболический закон Кокса описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с недостаточной точностью.

Модель кубической параболы Кокса (Cox). После проведения большого количества экспериментов над чугуном, в 1850 году Кокс сформулировал еще одну, трехпараметрическую полиномиальную модель [1,5]:

$$\sigma = a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^3. \tag{30}$$

Здесь a_0, a_1 и a_2 — три параметра материала.

Нормируем кривую напряжение-деформация и учтем, что она должна проходить через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = A_0\varepsilon^* + A_1\varepsilon^{*2} + A_2\varepsilon^{*3}. \tag{31}$$

Здесь A_0, A_1 и A_2 — три безразмерных параметра материала.

$$\begin{cases} \sigma^*(0) = 0, \\ \sigma^*(1) = A_0 + A_1 + A_2 = 1. \end{cases} \tag{32}$$

Касательный модуль в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$E^*(\varepsilon^*) = \sigma^{*\prime}(\varepsilon^*) = A_0 + 2A_1\varepsilon^* + 3A_2\varepsilon^{*2}, \tag{33}$$

$$\begin{cases} E^*(0) = A_0 = E_0^*, \\ E^*(1) = A_0 + 2A_1 + 3A_2 = E_1^*. \end{cases} \tag{34}$$

С учетом (32) и (34), безразмерные параметры могут быть выражены через физические параметры материала:

$$\begin{cases} A_0 = E_0^*, \\ A_1 = 3 - 2E_0^* - E_1^*, \\ A_2 = E_0^* + E_1^* - 2. \end{cases} \tag{35}$$

Теперь трехпараметрический закон Кокса может быть записан, как двухпараметрический:

$$\sigma^* = E_0^*\varepsilon^* + (3 - 2E_0^* - E_1^*)\varepsilon^{*2} + (E_0^* + E_1^* - 2)\varepsilon^{*3}. \tag{36}$$

Проверим, выполняется ли требование отрицательной кривизны кривой напряжение-деформация на всем интервале определения.

$$\begin{gathered} E^{*\prime}(\varepsilon^*) = \sigma^{*\prime\prime}(\varepsilon^*) = 2A_1 + 6A_2\varepsilon^* < 0, \\ A_1 + 3A_2\varepsilon^* < 0 \end{gathered} \tag{37}$$

С учетом (37) кривизна будет отрицательной если выполняется:

$$\varepsilon^* < \frac{2E_0^* + E_1^* - 3}{3(E_0^* + E_1^* - 2)}.$$

Кривизна кривой напряжения–деформации в зависимости от физических параметров конкретного материала может оказаться положительной на участке, где выполняется условие:

$$\frac{2E_0^* + E_1^* - 3}{3E_0^* + 3E_1^* - 6} < \varepsilon^* < 1.$$

В этом случае, кривая будет иметь точку перегиба, где кривизна меняет знак. Наличие этой точки определяется соотношением:

$$E_1^* > \frac{3 - E_0^*}{2}.$$

Таким образом можно выполнить требование отрицательной кривизны, но это не будет гарантировать минимума среднего квадратичного отклонения теоретической кривой от выборки экспериментальных значений.

Трехпараметрическая модель Кокса обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки, выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке, а также дает ненулевое значение касательного модуля в начальной точке и произвольное значение в конечной точке.

На рис. 4 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с законом кубической параболы Кокса.

Из рис. 4 видно, что у этой кривой внутри интервала определения есть точка локального максимума. За точкой локального максимума кривая имеет отрицательный касательный модуль, что говорит о том, что начался процесс разрушения материала. При переходе через точку локального минимума, процесс разрушения сменяется процессом упрочнения (положительный, возрастающий касательный модуль), что представляется нефизичным.

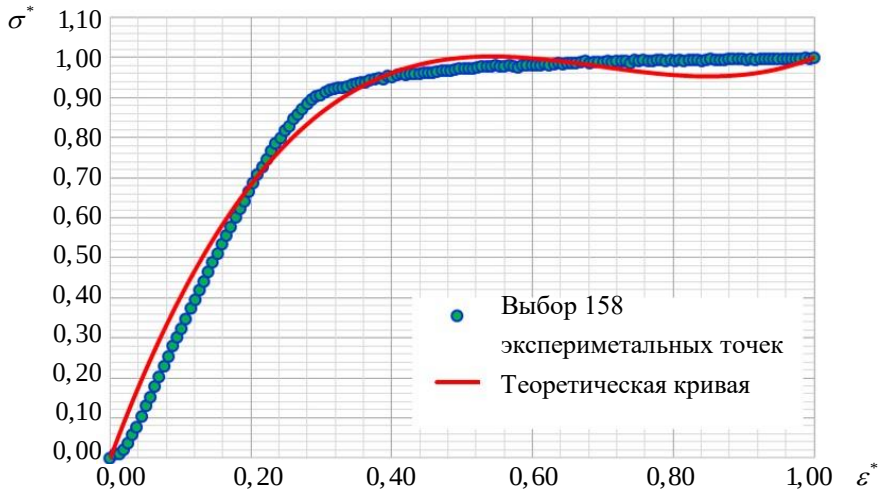


Рис. 4. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели кубической параболы Кокса

Среднее квадратичное отклонение по напряжениям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 3,95%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 4,7;\ E_1^* = 0,7$. Закон кубической параболы Кокса достаточно точно описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6.

Модель кубической параболы Томпсона (Thompson). Джозеф Осгуд Томпсон в 1891 году в результате большого количества экспериментальных исследований [1,6] сформулировал трехпараметрический полиномиальный закон, обратный закону Кокса:

$$\varepsilon = a_0\sigma + a_1\sigma^2 + a_2\sigma^3. \tag{38}$$

Здесь a_0 , a_1 и a_2 — три параметра материала.

Нормированная кривая напряжение–деформация проходит через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки:

$$\varepsilon^*(\sigma^*) = A_0\sigma^* + A_1\sigma^{*2} + A_2\sigma^{*3}. \tag{39}$$

Здесь A_0 , A_1 и A_2 — три безразмерных параметра материала.

$$\begin{cases} \varepsilon^*(0) = 0, \\ \varepsilon^*(1) = A_0 + A_1 + A_2 = 1. \end{cases} \tag{40}$$

Касательный модуль в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$E^*(\sigma^*) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{A_0 + 2A_1\sigma^* + 3A_2\sigma^{*2}},$$

$$\begin{cases} E^*(0) = \dfrac{1}{A_0} = E_0^*, \\ E^*(1) = \dfrac{1}{A_0 + 2A_1 + 3A_2} = E_1^*. \end{cases} \tag{41}$$

С учетом (40) и (41), безразмерные параметры могут быть выражены через физические параметры материала:

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{E_0^*}, \\ A_1 = 3 - \dfrac{2}{E_0^*} - \dfrac{1}{E_1^*}, \\ A_2 = \dfrac{1}{E_0^*} + \dfrac{1}{E_1^*} - 2. \end{cases} \tag{42}$$

Теперь закон Томпсона будет иметь выражение:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_0^*} + \left(3 - \frac{2}{E_0^*} - \frac{1}{E_1^*}\right)\sigma^{*2} - \left(2 - \frac{1}{E_0^*} - \frac{1}{E_1^*}\right)\sigma^{*3}. \tag{43}$$

Учтем, что кривизна кривой напряжение–деформация должна быть отрицательной на всей длине при условии отсутствия участка упрочнения:

$$E^{*\prime}(\sigma^*) = \frac{d^2\sigma^*}{d\varepsilon^{*2}} = \frac{dE^*}{d\sigma^*}\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = -\frac{2A_1 + 6A_2\sigma^*}{(A_0 + 2A_1\sigma^* + 3A_2\sigma^{*2})^2} < 0. \qquad (44)$$

Условие отрицательной кривизны:

$$\begin{gathered} A_1 + 3A_2\sigma^* > 0, \\ (3 - \frac{2}{E_0^*} - \frac{1}{E_1^*}) + 3(\frac{1}{E_0^*} + \frac{1}{E_1^*} - 2)\sigma^* > 0. \end{gathered} \qquad (45)$$

Это создает условие:

$$\sigma^* > \frac{E_0^* + 2E_1^* - 3E_0^*E_1^*}{3E_0^* + 3E_1^* - 6E_0^*E_1^*}. \qquad (46)$$

Таким образом кривизна кривой напряжения–деформации будет оставаться отрицательной при условии:

$$\frac{E_0^* + 2E_1^* - 3E_0^*E_1^*}{3E_0^* + 3E_1^* - 6E_0^*E_1^*} < \sigma^* < 1. \qquad (47)$$

Оставаться отрицательной на всей области определения кривизна будет при условии равенства нулю левой части (47), или выполнения:

$$E_1^* = \frac{E_0^*}{3E_0^* - 2}. \qquad (48)$$

Можно выполнить требование отрицательной кривизны, но это не будет гарантировать минимума среднего квадратичного отклонения теоретической кривой от выборки экспериментальных значений.

Трехпараметрический закон Томпсона обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки, выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке, а также дает ненулевое значение касательного модуля в начальной точке. Отметим, что касательные модули в начальной и конечной точках (41) могут быть определены независимо из экспериментальных данных и не связаны никакой физически обоснованной зависимостью.

На рис. 5 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с законом кубической параболы Томпсона.

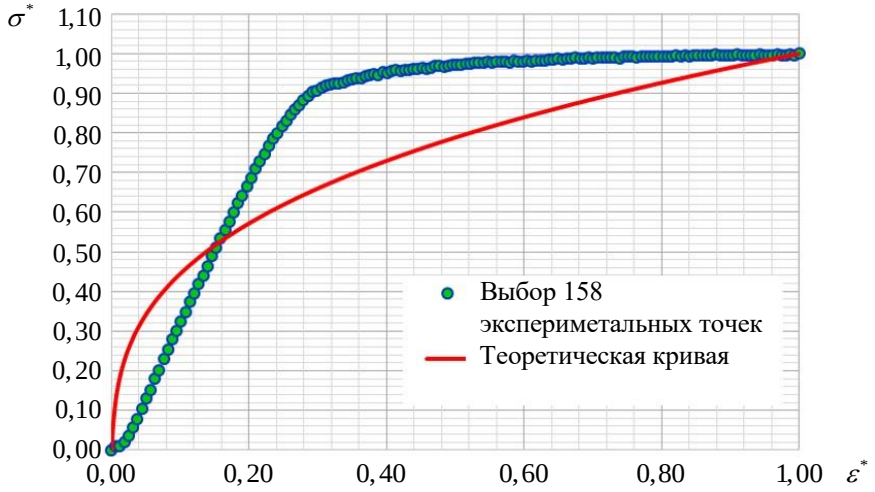


Рис. 5. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели кубической параболы Томпсона

Среднее квадратичное отклонение по деформациям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 29,1%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 10;\ E_1^* = 0,36$. Закон кубической параболы Томпсона описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 недостаточно точно.

Экспоненциальная модель Риккати (Riccati). Экспоненциальный закон Giordano Riccati [1,7] датирован 1731 годом

$$\sigma = ae^{-1/\varepsilon}. \tag{49}$$

Здесь a — параметр материала.

Нормированная кривая напряжение-деформация должна проходить через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки, поэтому:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = Ae^{-\frac{1}{\varepsilon^* \varepsilon_c}}. \tag{50}$$

Здесь A — безразмерный параметр материала:

$$A = \frac{a}{\sigma_c}.$$

Кривая должна проходить через начальную и конечную точки, откуда следует:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon^* \to 0} \sigma^*(\varepsilon) = Ae^{-\frac{1}{\varepsilon_c \varepsilon^*}} = 0, \\ \sigma^*(1) = Ae^{-\frac{1}{\varepsilon_c}} = 1. \end{cases} \tag{51}$$

Касательный модуль должен быть монотонно убывающей функцией:

$$E^*(\varepsilon^*) = \sigma^{*'}(\varepsilon^*) = \frac{Ae^{-\frac{1}{\varepsilon_c \varepsilon^*}}}{\varepsilon_c \varepsilon^{*2}}.$$

В начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках касательный модуль будет:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon^* \to 0^+} E^*(0) = \lim\limits_{\varepsilon^* \to 0^+} \dfrac{Ae^{-\frac{1}{\varepsilon_c \varepsilon^*}}}{\varepsilon_c \varepsilon^{*2}} = 0, \\ E^*(1) = \dfrac{Ae^{-\frac{1}{\varepsilon_c}}}{\varepsilon_c} = E_1^* \to A = E_1^* \varepsilon_c e^{\frac{1}{\varepsilon_c}}. \end{cases} \quad (52)$$

С учетом (51) параметр материала будет определяться:

$$A = e^{\frac{1}{\varepsilon_c}}.$$

Условие (52) позволяет выразить зависимость между физическими параметрами:

$$E_1^* = \frac{1}{\varepsilon_c}.$$

Теперь закон Риккати будет иметь вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = e^{\frac{1}{\varepsilon_c}(1-\frac{1}{\varepsilon^*})}.$$

Обеспечим требование отрицательной кривизны кривой напряжение–деформация на всем интервале определения

$$E^{*'}(\varepsilon^*) = \sigma^{*''}(\varepsilon^*) = \frac{Ae^{(1-\frac{1}{\varepsilon^*})}}{\varepsilon_c^2 \varepsilon^{*4}} - \frac{2Ae^{(1-\frac{1}{\varepsilon^*})}}{\varepsilon_c \varepsilon^{*3}} < 0,$$

$$\frac{1}{2\varepsilon_c} < \varepsilon^*.$$

Кривизна остается отрицательной не на всей области определения кривой напряжение–деформация.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки. Обеспечивает выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной

точке. Однако в начальной точке для любого материала касательный модуль оказывается нулевым, что не соответствует экспериментальным данным и физике процесса деформирования. Закон (49) в нормированном виде содержит два параметра a и ε_c. В то же время требование $\sigma^*(1)=1$ и задание касательных модулей в начальной и конечной точках дают три связи на формальные параметры a и ε_c. Это возможно только при условии, что для всех материалов, касательные модули в начальной и конечной точках связаны между собой. Скорее всего такая универсальная связь противоречит экспериментальным данным.

На рис. 6 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с параболическим четвертой степени законом Риккати.

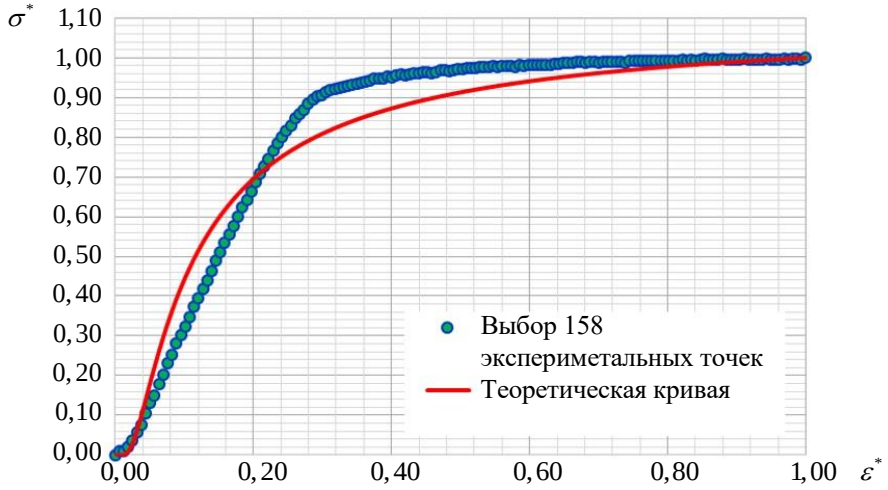


Рис. 6. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая экспоненциальной модели Риккати

Среднее квадратичное отклонение по напряжениям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 5,9%. При этом оптимальное значение параметров материала: $\lim\limits_{\varepsilon^*\to 0^+} E^*(0)=0;\ E_1^*=0,4$. Параболический закон Риккати описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с почти инженерной точностью.

Экспоненциальная модель Эмбер (Imbert). Эта модель сформулирована [1,8] в 1880 году в результате опытов, проведенных с индийской резиной

$$\varepsilon = A(e^{N\sigma} - 1). \tag{53}$$

Здесь a и N — параметры материала.

Произведем нормировку закона:

$$\varepsilon^*(\sigma^*) = A(e^{n\sigma^*} - 1). \tag{54}$$

Здесь A и n — безразмерные параметры материала:

$$A = \frac{a}{\varepsilon_c},\ n = N\sigma_c.$$

Условие прохождения нормированной кривой напряжение–деформация через начальную $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$E^*(\sigma^*) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{Ane^{n\sigma^*}},$$

$$\begin{cases} E^*(0) = \dfrac{1}{An} = E_0^*, \\ E^*(1) = \dfrac{1}{Ane^n} = E_1^* \rightarrow \dfrac{E_0^*}{E_1^*} = e^n. \end{cases} \tag{55}$$

С учетом (54) и (55), безразмерные параметры могут быть выражены через физические параметры материала:

$$\begin{cases} A = \dfrac{E_1^*}{E_0^* - E_1^*}, \\ n = \ln\dfrac{E_0^*}{E_1^*}. \end{cases} \tag{56}$$

Условия (54), (55) и (56) позволяют выразить зависимость между физическими параметрами E_0^* и E_1^*:

$$\frac{1}{E_1^*} - \frac{1}{E_0^*} = \ln\frac{E_0^*}{E_1^*}. \tag{57}$$

Теперь закон Эмбер может быть записан:

$$\varepsilon^* = \frac{E_1^*}{E_0^* - E_1^*}\left(\left(\frac{E_0^*}{E_1^*}\right)^{\sigma^*} - 1\right). \tag{58}$$

Учтем, что кривизна кривой напряжение–деформация должна быть отрицательной на всей длине при условии отсутствия участка упрочнения:

$$E^{*\prime}(\sigma^*) = \frac{d^2\sigma^*}{d\varepsilon^{*2}} = \frac{dE^*}{d\sigma^*}\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = -\frac{1}{Ae^{n\sigma^*}} < 0. \tag{59}$$

Кривизна остается отрицательной на всей области определения кривой напряжение–деформация.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки. Обеспечивает выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке. Закон обеспечивает отрицательную кривизну кривой деформирования для всего диапазона деформаций. Однако касательный модуль в начальной и конечной точках остаются зависимыми друг от друга характеристиками в соответствии с (57). Скорее всего такая универсальная связь противоречит экспериментальным данным.

На рис. 7 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с экспоненциальным законом Эмбер.

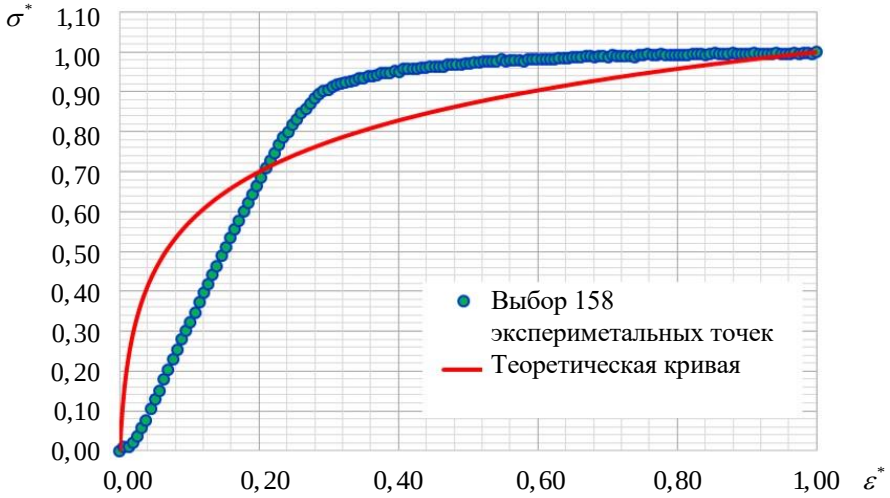


Рис. 7. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая экспоненциальной модели Эмбер

Среднее квадратичное отклонение по деформациям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 23,6%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 20;\ E_1^* = 0{,}1$. Экспоненциальный закон Эмбер описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с недостаточной точностью.

Первая экспоненциальная модель Хартига (Hartig). Проводя эксперименты по растяжению кожи [1,3], Ernst Karl Хартиг сформулировал в 1893 году закон:

$$\sigma = a(e^{N\varepsilon} - 1). \tag{60}$$

Здесь a и N — параметры материала.

После нормировки закон принимает вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = A(e^{n\varepsilon^*} - 1). \tag{61}$$

Здесь A и n — безразмерные параметры материала:

$$A = \frac{a}{\sigma_c},\ n = N\varepsilon_c.$$

Условие прохождения нормированной кривой напряжение–деформация через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки, дает:

$$\begin{cases} \sigma^*(0) = 0, \\ \sigma^*(1) = A(e^n - 1) = 1 \to e^n = \dfrac{1}{A} + 1. \end{cases} \tag{62}$$

Касательный модуль в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$\begin{gathered} E^*(\varepsilon^*) = \sigma^{*'}(\varepsilon^*) = Ane^{n\varepsilon^*}, \\ \begin{cases} E^*(0) = An = E_0^*, \\ E^*(1) = Ane^n = E_1^* \to e^n = \dfrac{E_1^*}{E_0^*}. \end{cases} \end{gathered} \tag{63}$$

С учетом (62) и (63), безразмерные параметры могут быть выражены через физические параметры материала:

$$\begin{cases} A = \dfrac{E_0^*}{E_1^* - E_0^*}, \\ n = \ln\dfrac{E_1^*}{E_0^*} = E_1^* - E_0^*. \end{cases} \tag{64}$$

Условия (62), (63) и (64) позволяют выразить зависимость между физическими параметрами E_0^*, E_1^*:

$$E_1^* - \ln E_1^* = E_0^* - \ln E_0^*. \tag{65}$$

Теперь закон Хартига может быть записан:

$$\sigma^* = \frac{E_0^*}{E_1^* - E_0^*}\left(\left(\frac{E_1^*}{E_0^*}\right)^{\varepsilon^*} - 1\right). \tag{66}$$

Обеспечим требование отрицательной кривизны кривой напряжение–деформация на всем интервале определения

$$E^{*'}(\varepsilon^*) = \sigma^{*''}(\varepsilon^*) = An^2e^{n\varepsilon^*} < 0.$$

Кривизна остается отрицательной на всей области определения кривой напряжения–деформации, т.к. $E_0^* > E_1^*$ и, согласно (64), $A < 0$.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки. Обеспечивает выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке. Закон обеспечивает отрицательную кривизну кривой деформирования для всего диапазона деформаций. В то же время касательный модуль в начальной и конечной точках не могут быть произвольно заданы. Связь между ними установлена соотношением (65). Скорее всего такая универсальная связь противоречит экспериментальным данным.

На рис. 8 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с экспоненциальным законом Хартига.

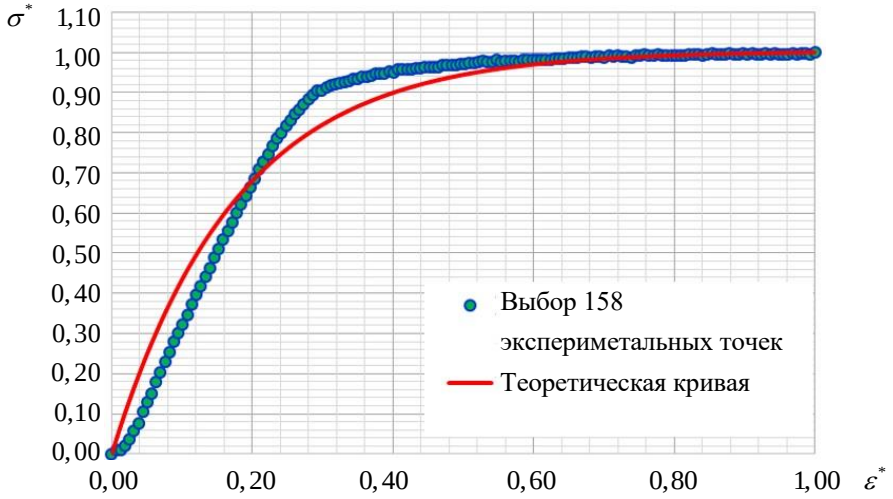


Рис. 8. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая экспоненциальной модели Хартига

Среднее квадратичное отклонение по напряжениям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 5,3%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 2,9;\ E_1^* = 0,01$. Экспоненциальный закон Эмбер описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с почти инженерной точностью.

Экспоненциальная модель Понселе (Poncelet). Модель сформулирована в 1839 году в результате опытов, проведенных с латунью [1]

$$\varepsilon = \sigma(a_0 + a_1 e^{N\sigma}). \tag{67}$$

Здесь a_0, a_1 и N — параметры материала.

Произведем нормировку:

$$\varepsilon^* = \sigma^* (A_0 + A_1 e^{n\sigma^*}). \tag{68}$$

Здесь A_0, A_1 и n — безразмерные параметры материала:

$$A_0 = a_0 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c},\ A_1 = a_1 \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c},\ n = N\sigma_c.$$

Условие прохождения нормированной кривой напряжение–деформация через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки, дает:

$$\begin{cases} \varepsilon^*(0) = 0, \\ \varepsilon^*(1) = A_0 + A_1 e^n = 1 \to e^n = \dfrac{1 - A_0}{A_1}. \end{cases} \tag{69}$$

Касательный модуль в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$E^*(\sigma^*) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{(A_0 + A_1 e^{n\sigma^*}) + \sigma^* A_1 n e^{n\sigma^*}},$$

$$\begin{cases} E^*(0) = \dfrac{1}{A_0 + A_1} = E_0^* \to A_0 = \dfrac{1}{E_0^*} - A_1, \\ E^*(1) = \dfrac{1}{A_0 + A_1 e^n (1+n)} = E_1^* \to e^n = \dfrac{1 - A_0 E_1^*}{E_1^* A_1 (1+n)}. \end{cases} \tag{70}$$

С учетом (69) и (70), безразмерные параметры могут быть выражены через физические параметры материала:

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{e^n - E_0^*}{E_0^*(e^n - 1)}, \\ A_1 = \dfrac{E_0^* - 1}{E_0^*(e^n - 1)}, \\ e^n = \left[\dfrac{E_0^*(1 - E_1^*)}{n E_1^* (E_0^* - 1)} - 1 \right]^{-1} + 1. \end{cases} \tag{71}$$

Условия (69), (70) и (71) позволяют выразить зависимость между физическими параметрами E_0^* и E_1^*:

$$E_1^* - \ln E_1^* = E_0^* - \ln E_0^*. \tag{72}$$

Теперь закон Понселе может быть записан:

$$\varepsilon^* = \sigma^* \frac{e^n - E_0^* + (E_0^* - 1)e^{n\sigma^*}}{E_0^*(e^n - 1)}. \quad (73)$$

Учтем, что кривизна кривой напряжение–деформация должна быть отрицательной на всей длине при условии отсутствия участка упрочнения:

$$E^{*\prime}(\sigma^*) = \frac{d^2\sigma^*}{d\varepsilon^{*2}} = \frac{dE^*}{d\sigma^*}\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = -\frac{2A_1 n e^{n\sigma^*} + \sigma^* A_1 n^2 e^{n\sigma^*}}{((A_0 + A_1 e^{n\sigma^*}) + \sigma^* A_1 n e^{n\sigma^*})^2} < 0, \quad (74)$$

$$A_1 n e^{n\sigma^*}(2 + n\sigma^*) > 0.$$

Кривизна остается отрицательной на всей области определения кривой напряжения–деформации.

Данный закон обеспечивает прохождение кривой деформирования через начальную $(0;0)$ и конечную $(1;1)$ точки. Обеспечивает выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке. Касательные модули в начальной и конечной точках являются независимыми друг от друга характеристиками в соответствии с (70).

На рис. 9 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с экспоненциальным законом Понселе.

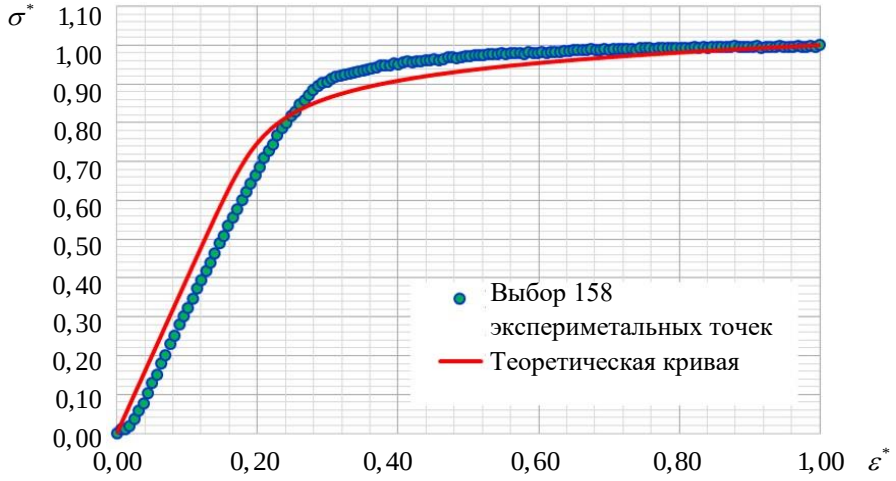


Рис. 9. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая экспоненциальной модели Понселе

Среднее квадратичное отклонение по деформациям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 13,7%. При этом оптимальное значение параметров материала: $E_0^* = 4,0;\ E_1^* = 0,2$. Экспоненциальный закон Понселе описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 с недостаточной точностью.

Модели Людвика (Ludwik), Холломона (Hollomon), Свифта (Swift). Одну из наиболее популярных моделей, разработанных для описания кривой деформирования, сформулировал в 1909 году Людвик [9]:

$$\sigma = \sigma_0 + a\varepsilon^n. \tag{75}$$

В 1945 г. Холломон [10] предложил модель, обратную закону Бернулли:

$$\sigma = a\varepsilon^n. \tag{76}$$

Другая популярная эмпирическая трехпараметрическая модель была сформулирована в 1952 году Свифтом [11]:

$$\sigma = a(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n, \tag{77}$$

где a и n — параметры материала.

После нормировки эти законы принимают соответственно вид:

$$\sigma^* = \sigma_0^* + A\varepsilon^{*n}, \tag{78}$$

$$\sigma^* = A\varepsilon^{*n}, \tag{79}$$

$$\sigma^* = A(\varepsilon_0^* + \varepsilon^*)^n. \tag{80}$$

Здесь A и n — безразмерные параметры материала.

Принимая во внимание гипотезу о ненапряженном начальном состоянии материала, положим начальное напряжение $\sigma_0^* = 0$, а деформацию $\varepsilon_0^* = 0$. Тогда законы Людвика, Холломона и Свифта совпадают:

$$\sigma^* = A\varepsilon^{*n}. \tag{81}$$

В точке предела прочности, где $\sigma^* = 1$, $\varepsilon^* = 1$ все три закона дают значение параметра $A = 1$ и приобретают вид:

$$\sigma^* = \varepsilon^{*n}. \tag{82}$$

Из определения касательного модуля следует:

$$E^*(\varepsilon^*) = \sigma^{*\prime}(\varepsilon^*) = n\varepsilon^{*(n-1)}. \tag{83}$$

Касательный модуль в начальной $(0;0)$ и конечной $(1;1)$ точках:

$$\begin{cases} E^*(0) = \lim\limits_{\varepsilon^* \to 0} \sigma^{*\prime} = \lim\limits_{\varepsilon^* \to 0} n\varepsilon^{*(n-1)} = \begin{cases} \infty & \text{при } (n-1)<0 \\ 0 & \text{при } (n-1)>0 \end{cases}, \\ E^*(1) = n = E_1^*. \end{cases} \tag{84}$$

Теперь закон принимает вид:

$$\sigma^* = \varepsilon^{*E_1^*}. \tag{85}$$

Требование монотонного убывания модуля Юнга, эквивалентное требованию отрицательной кривизны на области определения кривой, даёт:

$$\begin{aligned} E^{*'}(\varepsilon^*) = \sigma^{*''}(\varepsilon^*) = \\ = n(n-1)\varepsilon^{*(n-2)}. \end{aligned} \tag{86}$$

Отсюда видно, что отрицательная кривизна на всей области определения задается требованием:

$$n(n-1)<0 \ \rightarrow \ \mathrm{n} \in (0;1).$$

Таким образом кривизна остается отрицательной на всей области определения, т.к. для всех материалов выполняется условие: $E_1^* \in (0;1)$.

При всей простоте закона, он обладает существенным недостатком: из (84) следует, что для всех материалов, т.е. на всем множестве параметра n, касательный модуль в начале координат является бесконечным. Это эквивалентно тому, что касательная к кривой деформирования — вертикальная. Это следствие вряд ли можно считать физичным и соответствующим результатам экспериментов.

По закону Людвика–Холломона–Свифта кривая деформирования проходит через точки $(0;0)$ и $(1;1)$. Соответственно, в этих точках касательный модуль принимает значения $E_0^* = \infty$, E_1^*. Тот факт, что для любых материалов касательный модуль E_0^* в начальной точке кривой деформирования не отражает индивидуальных механических свойств материалов, является недостатком рассмотренной модели.

На рис. 10 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с моделями Людвика, Холломона и Свифта.

Среднее квадратичное отклонение по напряжениям теоретической кривой от выборки экспериментальных точек составило 14,4%. При этом оптимальное значение параметров материала: $n = 0,27;\ E_0^* = \infty;\ E_1^* = 0,27$. Закон Людвика–Холломона–Свифта не описывает упругопластические свойства титанового сплава ВТ6 хотя бы с инженерной точностью (5%).

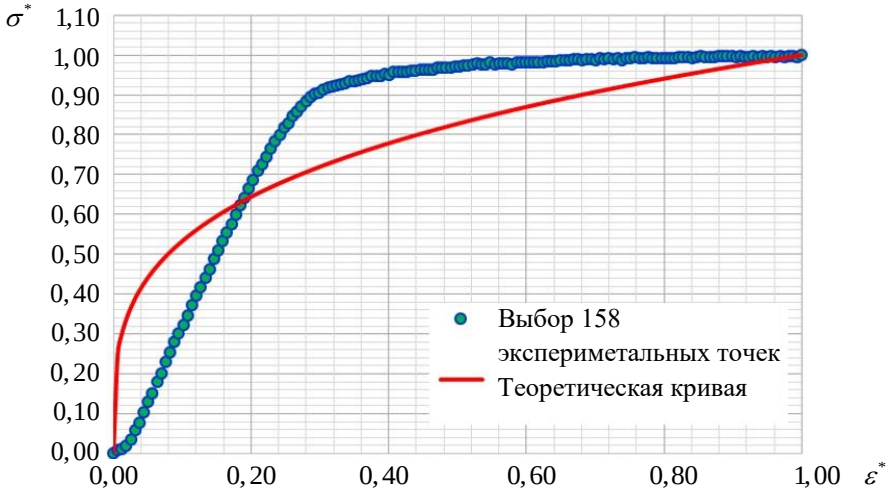


Рис. 10. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Людвика–Холомона–Свифта

Модель Френкеля. Я.И. Френкель связал теоретическую прочность материала с действием сдвигового напряжения при относительном параллельном смещении двух рядов атомов [12]. Для растяжения эта модель приводит к выводу о том, что напряжение σ является периодической функцией относительного перемещения (деформации ε):

$$\sigma = a \sin n\varepsilon, \tag{87}$$

где a и n — параметры материала.

После нормировки получим:

$$\sigma^* = A \sin n\varepsilon^*, \tag{88}$$

где A и n — безразмерные параметры материала.

Кривая деформирования проходит через точку $(0;0)$, что соответствует гипотезе ненапряженного начального состояния:

$$\sigma^*(0) = 0. \tag{89}$$

В точке $(1;1)$:

$$\begin{gathered} \sigma^*(1) = A \sin n = 1, \\ A = \frac{1}{\sin n}. \end{gathered} \tag{90}$$

В результате модель Френкеля принимает вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = \frac{\sin n\varepsilon^*}{\sin n}. \tag{91}$$

При этом оставшийся неопределенным параметр n должен одновременно удовлетворять двум условиям:

$$\begin{cases} \sigma^{*'}(0) = E_0^*, \\ \sigma^{*'}(1) = E_1^*. \end{cases}$$

Из определения касательного модуля следует:

$$\sigma^{*'}(\varepsilon^*) = n\frac{\cos n\varepsilon^*}{\sin n}. \tag{92}$$

В точке $(0;0)$:

$$\sigma^{*'}(0) = n\frac{1}{\sin n} = E_0^*. \tag{93}$$

В точке $(1;1)$:

$$\sigma^{*'}(1) = n\frac{\cos n}{\sin n} = E_1^*. \tag{94}$$

В результате получается в общем случае несовместная система двух уравнений относительно параметра n. Вынужденный выбор между первым (93) и вторым (94) из условий делает эту модель в некотором смысле субъективной и не отражающей в полной мере индивидуальных механических свойств конкретного материала. В общем случае, исключая из (93) и (94) параметр n, может быть получена связь между касательным модулем в начальной и конечной точках кривой деформирования:

$$\operatorname{tg}\sqrt{(E_0^*)^2 - (E_1^*)^2} = \frac{\sqrt{(E_0^*)^2 - (E_1^*)^2}}{E_1^*}. \tag{95}$$

При минимизации суммарного квадратичного отклонения теоретической кривой от выборки экспериментальных точек как функции параметра n получено оптимальное значение n. Касательные модули вычислялись из соотношений (93) и (94).

Требование монотонного убывания модуля Юнга, эквивалентное требованию отрицательной кривизны на области определения кривой, даёт:

$$\sigma^{*''}(\varepsilon^*) = -n^2\frac{\sin n\varepsilon^*}{\sin n}. \tag{96}$$

Кривая деформирования имеет отрицательную кривизну на всем диапазоне деформаций.

Кривая напряжения-деформации, построенная по закону Френкеля, проходит через точки $(0;0)$ и $(1;1)$. Закон обеспечивает выполнение гипотезы о недеформированном состоянии в начальной точке. Кривизна остается отрицательной в пределах всей области определения кривой. Однако касательный модуль в начальной и конечной точках не могут быть заданы независимыми друг от друга. Связь между ними устанавливается соотношением (95).

На рис. 11 показана кривая деформирования, построенная для титанового сплава ВТ6 в соответствии с моделью Френкеля.

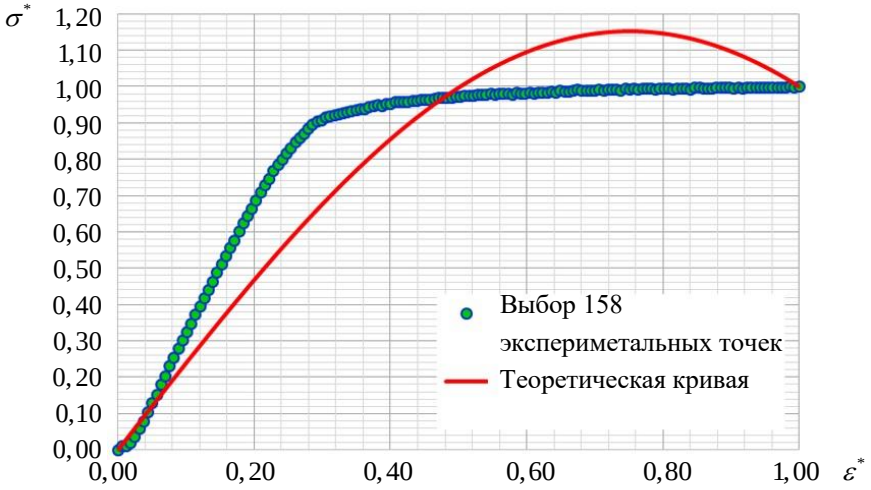


Рис. 11. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Френкеля

Теоретическая кривая построена для ВТ6 при оптимальных значениях параметров материала: $n = 2,09;\ E_0^* = 2,41;\ E_1^* = -1,19$. При этих параметрах среднее квадратичное отклонение по напряжениям составило 13,6%.

Модель Вока (Voce). Экспоненциальный закон Вока (1948) [14] является в общем случае трехпараметрическим:

$$\sigma = a_0 + a_1(1 - \exp(-n\varepsilon)), \tag{97}$$

где a_0, a_1 и n — параметры материала.

После нормировки:

$$\sigma^* = A_0 + A_1(1 - \exp(-n\varepsilon^*)). \tag{98}$$

Здесь A_0, A_1 и n — безразмерные параметры материала.

Кривая деформирования проходит через точку $(0;0)$ при условии:

$$A_0 = 0.$$

Это приводит закон Вока к следующему виду:

$$\sigma^* = A_1(1-e^{-n\varepsilon^*}). \tag{99}$$

Кривая деформирования проходит через точку $(1;1)$ при условии:

$$A_1 = \frac{1}{(1-e^{-n})}.$$

В результате закон Вока приобретает вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = \frac{(1-e^{-n\varepsilon^*})}{(1-e^{-n})}. \tag{100}$$

Из определения касательного модуля следует:

$$\sigma^{*\prime}(\varepsilon^*) = \frac{ne^{-n\varepsilon^*}}{(1-e^{-n})}. \tag{101}$$

При этом оставшийся неопределенным параметр n определяется из условия, что касательный модуль в начальной и конечной точках кривой имеет заданные значения.

В точке $(0;0)$:

$$\sigma^{*\prime}(0) = \frac{n}{(1-e^{-n})} = E_0^*. \tag{102}$$

В точке $(1;1)$:

$$\sigma^{*\prime}(1) = \frac{ne^{-n}}{(1-e^{-n})} = E_1^*. \tag{103}$$

В результате получается в общем случае несовместная система двух уравнений относительно параметра n. Вынужденный выбор между первым (102) и вторым (103) из условий делает эту модель, так же, как и модель Френкеля, в некотором смысле субъективной и не отражающей в полной мере индивидуальных механических свойств конкретного материала. В общем случае, исключая из (102) и (103) параметр n, может быть получена связь между касательным модулем в начальной и конечной точках кривой деформирования:

$$e^{-(E_0^*-E_1^*)} = \frac{E_1^*}{E_0^*}. \tag{104}$$

Требование монотонного убывания касательного модуля, эквивалентное требованию отрицательной кривизны на области определения кривой, даёт:

$$\sigma^{*''}(\varepsilon^*) = -\frac{n^2 e^{-n\varepsilon^*}}{(1-e^{-n})}. \qquad (105)$$

Отсюда видно, что отрицательная кривизна на всей области определения устанавливается требованием: $n > 0$.

На рис. 12 приведена кривая деформирования, которая получена при минимизации суммарного квадратичного отклонения теоретической кривой (100) от выборки экспериментальных точек как функции параметра n. После определения оптимального значения параметра n, касательные модули вычислялись из соотношений (102) и (103).

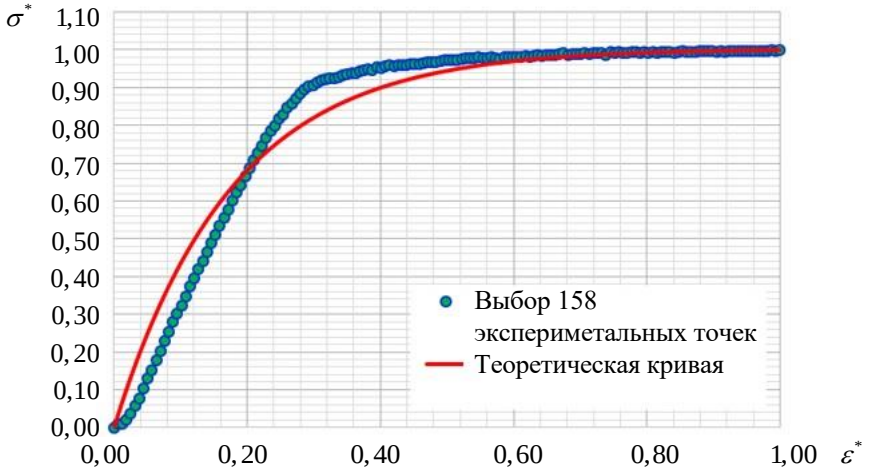


Рис. 12. Экспериментальная кривая титанового сплава ВТ6 и теоретическая кривая по модели Вока

Отметим, что, исключив из этих соотношений параметр n, касательные модули в начальной и конечной точках оказываются связанными соотношением (104) и не могут быть определены из эксперимента независимо. Как уже отмечалось, такая универсальная связь вряд ли соответствует экспериментальным данным.

При оптимально подобранных значениях параметров материала: $n = 5,68;\ E_0^* = 5,7;\ E_1^* = 0,019$. Среднее квадратичное отклонение составило 5,3%, что немного превышает требования инженерной точности.

Заключение. Анализ достоинств и недостатков универсальных эмпирических моделей деформирования, представленный в статье, позволил выявить ряд требований к их формулировке. Для того, чтобы обеспечить аппроксимацию с достаточной точностью кривых деформирования материалов, подобных сплаву ВТ6, эмпирические законы деформирования должны обеспечить:

- ненапряженное начальное состояние материала;

- непрерывность кривой деформирования;
- неположительную кривизну кривой деформирования вплоть до разрушения;
- значения касательных модулей в начальной и конечной точках кривой деформирования должны быть независимыми физическими параметрами.

Последнее требование приводит к тому, что закон деформирования должен быть, как минимум четырех-параметрическим. Во второй части данной статьи будут рассмотрены и проанализированы кривые деформирования, содержащие четыре и более параметров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белл Дж.Ф. *Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1: Малые деформации*. Москва, Наука, 1984, 596 с.
[2] Bernoulli J. Curvatura laminae elasticae. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1694, pp. 262–276.
[3] Hartig E.K. Der Elasticitatsmodul des gerades Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung. *Civilingenieur*, 1893, no. 39, pp. 113–138.
[4] Hodgkinson E. Experiments to prove that all bodies are in some degree inelastic, and a proposed law for estimating the deficiency. *Report of the 13th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 1843, pp. 23–25.
[5] Cox H. The deflection of imperfectly elastic beams and the hyperbolic law of elasticity. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1856, no. 9, pp. 177–190.
[6] Thompson J.O. Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung. *Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge*, 1891, no. 44, pp. 555–576.
[7] Riccati G. Delle vibrazione sonore dei cilindri. *Memorie Mathematica e Fisica Societa Italiana*, 1782, no 1, pp. 444–525.
[8] Imbert A. *Recherches théoriques et expérimentales sur l'élasticité du caoutchouc*. Goyard, Lyon, 1880, 105 p.
[9] Ludwik P. *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin, Springer, 1909, 58 p.
[10] Hollomon J.H. Tensile deformation. *AIME. Technical Publication*, 1945, no. 162, pp. 268–290.
[11] Swift H.W. Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1952, no. 1(1), pp. 1–18.
[12] Френкель Я.И. *Собрание избранных трудов*. Москва, Ленинград, Изд-во Акад. наук СССР, 1956–1959, 3 т.
[13] Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress–strain curves by three parameters*. Washington DC, NASA, 1943, 29 p.
[14] Voce E. *The relationship between stress and strain for homogeneous deformation*. Journal of the Institute of Metals, 1948, vol. 74, pp. 537–562.
[15] Ludwigson D.C. Modified stress–strain relation for FCC metals and alloys. *Metallurgical and material handling B*, 1971, no. 2(10), pp. 2825–2828.
[16] Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел. Т.1*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1954, 648 с.
[17] Тимошенко С.П., Гере Дж. *Механика материалов*. Санкт-Петербург, Лань, 2002, 672 с.
[18] Mendelson A. *Plasticity: Theory, and Application*. New York, London, Macmillan, 1968, 353 p.

[19] Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГУ, 1990, 310 с.
[20] Димитриенко Ю.И. *Основы механики твердого тел. Т.4. Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
[22] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 27–33.
[23] Real E., Arrayago I., Mirambell E., Westeel R. Comparative study of analytical expressions forthe modelling of stainless steel behavior. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 83, pp. 2–11.
[24] Quach W.M., Huang J.F. Two-stage stress-strain models for light-gauge steels. *Advances in Structural Engineering*, 2014, vol. 17, no. 7, pp. 937–949.
[25] Abdella K. Inversion of a full-range stress–strain relation for stainless steel alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, iss. 3, pp. 456–463.
[26] Li T., Zheng J., Yi Chen Z. Description of the behavior of steel in strain hardening in the entire range. *Springer Plus*, 2016, no. .5, pp.1316–1328.
[27] Rasmussen K. Full range stress-strain curves for stainless steel alloys. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, vol. 59, iss. 1, pp. 47–61.
[28] Головина, Н. Я. Об одной эмпирической модели нелинейного деформирования упругопластических материалов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 3, с. 48–55.
[29] Головина Н.Я., Белов П.А. Модель кривой нелинейного деформирования стали 20ХГР и стали 35. *Проблемы прочности и пластичности*, 2020, т. 82, № 3, с. 305–316.
[30] Головина Н.Я., Белов П.А. Кривая деформирования как экстремаль некоторого функционала. *Наука и бизнес: пути развития*, 2019, № 10 (100), с. 44–52.
[31] Golovina N.Ya. The nonlinear stress-strain curve model as a solution of the fourth order differential equation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 189, art. no. 104258.
[32] Кривошеева С.Я., Головина Н.Я. Исследование влияния осевой жесткости на работу гибких металлических трубопроводов. *Научное обозрение*, 2016, № 16, с. 213–216.
[33] Головина Н.Я., Белов П.А., Лурье С.А., Егорова О.В. Модель ресурса для различных моделей упругопластического материала. *Деформация и разрушение материалов*, 2022, № 2, с. 2–11.
[34] Белов П.А., Головина Н.Я. Критика закона деформирования UGent для упругопластических материалов и альтернатива ему. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2021, т. 27, № 1, с. 3–16.

Статья поступила в редакцию 25.10.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Головина Н.Я., Белов П.А. Анализ эмпирических моделей кривых деформирования упругопластических материалов (обзор). Часть 1. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 63–96.

Головина Наталья Яковлевна — доцент, кандидат технических наук, доцент, Тюменский индустриальный университет. e-mail: golovinanj@tyuiu.ru

Белов Петр Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, Институт прикладной механики РАН. e-mail: belovpa@yandex.ru

Analysis of empirical models of deformation curves of elastoplastic materials (review). Part 1

© N.Ya. Golovina[1], P.A. Belov[2]

[1]Industrial University of Tyumen, Tyumen, 625000, Russian Federation
[2]Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, 125040, Russian Federation

The article presents the result the review of works devoted to the research the properties of elastoplastic materials. The article consists of two parts. In the first part, universal single, two- and three-parametric laws describing the nonlinear dependence between the stress and deformation up to the destruction. The review includes: power laws, parabolic laws, exponential laws, harmonic law. A comparison the considered empirical curves with a sample experimental points is carried out by the standard procedure for minimizing the total quadratic deviation and using the method the gradient descent to determine the minimum function of many variables. To assess the predictive force for models on the compliance with the experiment, a representative sample used from 158 experimental points in the deformation curve of the Russian titanium alloy WT6. The analysis showed that the empirical laws of deformation containing less than four formal parameters cannot describe the universal deformation curve with the stress specified at the ends and the tangent module. Analysis of the advantages and disadvantages of existing empirical laws of deformation, made it possible to formulate certain requirements for their wording.

Keywords: *empirical stress-strain curves, nonlinear elasticity law, elastoplastic properties of a material, physical parameters of elastoplastic materials, processing of experimental data*

REFERENCES

[1] Bell J.F. *Mechanics of Solids: Volume I: The Experimental Foundations of Solid Mechanics*. Springer, 1984, 813 p.
[2] Bernoulli J. Curvatura laminae elasticae. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1694, pp. 262–276.
[3] Hartig E.K. Der Elasticitatsmodul des gerades Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung. *Civilingenieur*, 1893, no. 39, pp. 113–138.
[4] Hodgkinson E. Experiments to prove that all bodies are in some degree inelastic, and a proposed law for estimating the deficiency. *Report of the 13th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 1843, pp. 23–25.
[5] Cox H. The deflection of imperfectly elastic beams and the hyperbolic law of elasticity. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1856, no. 9, pp. 177–190.
[6] Thompson J.O. Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung. *Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge*, 1891, no. 44, pp. 555–576.
[7] Riccati G. Delle vibrazione sonore dei cilindri. *Memorie Mathematica e Fisica Societa Italiana*, 1782, no 1, pp. 444–525.
[8] Imbert A. *Recherches théoriques et expérimentales sur l'élasticité du caoutchouc*. Goyard, Lyon, 1880, 105 p.
[9] Ludwik P. *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin, Springer, 1909, 58 p.

[10] Hollomon J.H. Tensile deformation. *AIME. Technical Publication*, 1945, no. 162, pp. 268–290.
[11] Swift H.W. Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1952, no. 1(1), pp. 1–18.
[12] Frenkel Ya.I. *Sobranie izbrannyh trudov* [Collection of selected works]. Moscow, Leningrad, The Academy of Sciences of the USSR Publ., 1956–1959, 3 vols.
[13] Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress–strain curves by three parameters*. Washington DC, NASA, 1943, 29 p.
[14] Voce E. *The relationship between stress and strain for homogeneous deformation*. Journal of the Institute of Metals, 1948, vol. 74, pp. 537–562.
[15] Ludwigson D.C. Modified stress–strain relation for FCC metals and alloys. *Metallurgical and material handling B*, 1971, no. 2(10), pp. 2825–2828.
[16] Nadai A. *Theory of flow and fracture of solids. Vol.1*. New York, McGraw-Hill, 1950, 572 p.
[17] Timoshenko S.P., Gere J. *Mekhanika materialov* [Mechanics of materials]. St. Petersburg, Lan Publ., 2002, 672 p.
[18] Mendelson A. *Plasticity: Theory, and Application*. New York, London, Macmillan, 1968, 353 p.
[19] Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoj sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, MSU Publ., 1990, 310 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Osnovy mekhaniki tverdogo tela. T.4. Mekhanika sploshnoj sredy* [Fundamentals of solid mechanics. Vol.4. Continuum mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
[22] Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. Full-range stressestrain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, no. 92, pp. 27–33.
[23] Real E., Arrayago I., Mirambell E., Westeel R. Comparative study of analytical expressions forthe modelling of stainless steel behavior. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 83, pp. 2–11.
[24] Quach W.M., Huang J.F. Two-stage stress-strain models for light-gauge steels. *Advances in Structural Engineering*, 2014, vol. 17, no. 7, pp. 937–949.
[25] Abdella K. Inversion of a full-range stress–strain relation for stainless steel alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, iss. 3, pp. 456–463.
[26] Li T., Zheng J., Yi Chen Z. Description of the behavior of steel in strain hardening in the entire range. *Springer Plus*, 2016, no. .5, pp.1316–1328.
[27] Rasmussen K. Full range stress-strain curves for stainless steel alloys. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, vol. 59, iss. 1, pp. 47–61.
[28] Golovina N.Y. On one empirical model of nonlinear deformation of elastoplastic materials. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 48–55.
[29] Golovina N.Ya., Belov P.A. Model of a curve of nonlinear deformation of steel 20HGR and steel 35. *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 3, pp. 305–316.
[30] Golovina N.Ya., Belov P.A. Deformation curve as a functional extremal. *Science and Business: Ways of Developmen*, 2019, no. 10 (100), pp. 44–52.
[31] Golovina N.Ya. The nonlinear stress-strain curve model as a solution of the fourth order differential equation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 189, art. no. 104258.

[32] Krivosheeva S.Ya., Golovina N.Ya. Study of axial stiffness effect on the performance of pliable metal pipelines. *Scientific review*, 2016, no. 16, pp. 213–216.
[33] Golovina N.Ya., Belov P.A., Lurie S.A., Egorova O.V. Resource model for various elastic-plastic material models. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2022, no. 2, pp. 2–11.
[34] Belov P.A., Golovina N.Ya. Criticism of the law of deformation ugent for elastoplastic materials and an alternative to it. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, vol. 27, no. 1, pp. 3–16.

Golovina N.a.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, position of associate professor, Industrial University of Tyumen. e-mail: golovinanj@tyuiu.ru

Belov P.A., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Institute of Applied Mechanics of RAS. e-mail: belovpa@yandex.ru