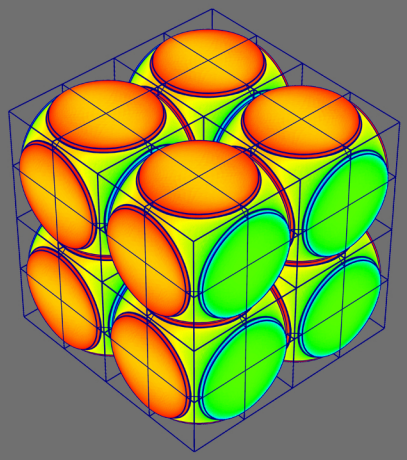
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Валишин А.А., Тиняев М.А. Моделирование динамических и спектральных вязкоупругих характеристик материалов на основе численного обращения преобразования Лапласа. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 1, с. 42–62.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/270/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
24.11.2026 16:09:19

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-1-4262

Моделирование динамических и спектральных вязкоупругих характеристик материалов на основе численного обращения преобразования Лапласа

© А.А. Валишин, М.А. Тиняев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

При проектировании изделий из композиционных материалов, предназначенных для эксплуатации в сложных условиях неоднородных деформаций и температур, важно учитывать вязкоупругие, в том числе спектральные и динамические, свойства связующего и наполнителей. В статье рассмотрены динамические характеристики (комплексный модуль, комплексная податливость, их действительные и мнимые части, тангенс угла потерь) и спектральные характеристики релаксации и ползучести и их зависимость друг от друга. Для всех известных типов ядер ползучести и ядер релаксации были найдены упомянутые выше характеристики. Для нахождения спектральных характеристик был использован один из численных метода обращения преобразования Лапласа — метод квадратурных формул с равными коэффициентами. Составлены алгоритмы и компьютерные программы для реализации этого метода. Полученные графики достаточно точные (максимальная погрешность вычислений в среднем не превосходит 5%), несмотря на то что на начальных участках времени погрешность очень заметна.

Ключевые слова: *вязкоупругость, релаксация, ползучесть, динамические характеристики, спектральные характеристики, преобразование Лапласа, метод квадратурных формул*

Введение. При проектировании изделий из композиционных материалов, предназначенных для эксплуатации в сложных условиях неоднородных деформаций и температур, важно учитывать вязкоупругие свойства связующего и наполнителей [1–3]. Все вязкоупругие характеристики как статические, так и динамические, выражаются, в конечном счёте, через ядра релаксации и ползучести [4–18].

Ядра релаксации и ползучести отражают специфические свойства конкретного материала. В литературе разбросано много предложенных в разное время модельных вариантов таких ядер. Все они были систематизированы и сведены воедино в работе [11], и там же установлена взаимная связь между ними. Альтернативный и обобщенный подход состоит в определении спектральных характеристик релаксации и ползучести — плотности спектра релаксации и спектра плозучести. Необходимо все определяющие вязкоупругие функции связать через спектральные характеристики, а также установить взаимосвязь спектральной плотности релаксации и спектральной плотности ползучести.

Таким образом, плотность спектров релаксации, например, становится первичной и главной вязкоупругой характеристикой материала. Она специфична для каждого конкретного материала и подлежит экспериментальному определению в каждом конкретном случае. В настоящей работе предлагается частичная реализация этой программы.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Для изотропных вязкоупругих материалов определяющие соотношения между тензорами напряжений и деформаций записываются так

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= G(t)\varepsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau,\\ \varepsilon(t) &= J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau.\end{aligned} \tag{1}$$

где $G(t)$ и $J(t)$ — это функции релаксации и ползучести соответственно [1–11].

Функция $G(t)$ описывает изменение напряжения со временем при постоянной деформации. Такой процесс называется релаксацией напряжения. В этом процессе напряжение убывает со временем, т.е. функция $G(t)$ — убывающая.

Функция $J(t)$ описывает изменение деформации со временем при постоянном напряжении. Такой процесс называется ползучестью деформации. В процессе ползучести при постоянном напряжении деформация растёт, т.е. функция $J(t)$ — возрастающая.

В теории упругости между упругим модулем G и податливостью J есть простая связь [1,2,5,6]

$$GJ = 1. \tag{2}$$

Однако в теории вязкоупругости между функциями релаксации и ползучести такой простой связи нет.

Запишем формулы (1) в пространстве изображений по Лапласу, используя теорему свёртки

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(p) &= p\overline{G}(p)\overline{\varepsilon}(p),\\ \overline{\varepsilon}(p) &= p\overline{J}(p)\overline{\sigma}(p).\end{aligned} \tag{3}$$

Из формул (3) следует

$$p^2\overline{G}(p)\overline{J}(p) = 1. \tag{4}$$

Это выражение определяет зависимость между изображениями функций релаксации и ползучести.

В теории преобразования Лапласа имеют место следующие предельные соотношения

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0+} G(t)\,J(t)=1,\\ &\lim_{t\to +\infty} G(t)\,J(t)=1, \end{aligned} \tag{5}$$

то есть, соотношения типа (2) в теории вязкоупругости имеют место только в двух предельных случаях: при $t\to 0+$ и при $t\to +\infty$.

Удобно функцию релаксации $G(t)$ и функцию ползучести $J(t)$ представить в безразмерном виде. Для этого обозначим

$$\begin{aligned} &G(t)=G_0\psi(t),\quad G(0)=G_0,\ [\text{Па}],\\ &J(t)=J_0 g(t),\quad J(0)=J_0,\ [\text{Па}^{-1}]. \end{aligned} \tag{6}$$

Функции $\psi(t)$ и $g(t)$ безразмерны, функция $\psi(t)$ называется ядром релаксации, а функция $g(t)$ — ядром ползучести.

В силу (2) и (5) будет

$$\begin{aligned} &G_0 J_0=1,\\ &\lim_{t\to 0+}\psi(t)\,g(t)=1,\\ &\lim_{t\to +\infty}\psi(t)\,g(t)=1. \end{aligned} \tag{7}$$

В пространстве изображений по Лапласу между изображениями безразмерных функций $\psi(t)$ и $g(t)$ имеет место соотношение типа (4):

$$p^2\overline{\psi}(p)\,\overline{g}(p)=1. \tag{8}$$

Динамические характеристики вязкоупругих материалов и связь между ними. В качестве одной из таких характеристик выступает комплексный модуль $G^*(i\omega)$, который связан с ядром релаксации $\psi(t)$ следующим образом:

$$G^*(i\omega)=i\omega G_0\tilde{\psi}(\omega), \tag{9}$$

где $\tilde{\psi}(\omega)=\int_0^{+\infty}\psi(t)\exp[-i\omega t]\,dt$ есть не что иное как прямое преобразование Фурье.

Аналогично (9) через ядро ползучести $g(t)$ определена другая

характеристика материалов — комплексная податливость $J^*(i\omega)$:

$$J^*(i\omega) = i\omega J_0 \tilde{g}(\omega), \tag{10}$$

где $\tilde{g}(\omega) = \int_0^{+\infty} g(t)\exp[-i\omega t]dt$.

Между (9) и (10) существует следующая связь [17,18]

$$G^*(i\omega)J^*(i\omega) = 1, \tag{11}$$

которую также называют формулой Гросса.

У комплексного модуля и комплексной податливости, как следует из названия, есть действительные и мнимые части:

$$G^*(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega),\ J^*(i\omega) = J'(\omega) + iJ''(\omega), \tag{12}$$

где $G'(\omega)$ и $G''(\omega)$ — действительная и мнимая части комплексного модуля, $[\text{Па}]$; $J'(\omega)$ и $J''(\omega)$ — действительная и мнимая части комплексной податливости, $\left[\text{Па}^{-1}\right]$. Обычно функцию $G'(\omega)$ называют модулем накопления, а функцию $G''(\omega)$ — модулем потерь.

Подстановкой формул (12) в (11) получим следующую систему

$$\begin{cases} G'(\omega)J'(\omega) - G''(\omega)J''(\omega) = 1, \\ G'(\omega)J''(\omega) + G''(\omega)J'(\omega) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

из которой можно получить важные соотношения:

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= J'(\omega)\left|J^*(i\omega)\right|^{-2},\ \mathrm{G}''(\omega) = -J''(\omega)\left|J^*(i\omega)\right|^{-2}, \\ J'(\omega) &= G'(\omega)\left|G^*(i\omega)\right|^{-2},\ J''(\omega) = -G''(\omega)\left|G^*(i\omega)\right|^{-2}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\left|G^*(i\omega)\right|^2 = \left\{G'(\omega)\right\}^2 + \left\{G''(\omega)\right\}^2$; $\left|J^*(i\omega)\right|^2 = \left\{J'(\omega)\right\}^2 + \left\{J''(\omega)\right\}^2$.

Вернёмся к системе (13) и запишем второе её уравнение в виде

$$G''(\omega)\left[G'(\omega)\right]^{-1} = -J''(\omega)\left[J'(\omega)\right]^{-1}, \tag{15}$$

где величина $G''(\omega)\left[G'(\omega)\right]^{-1}$, по определению, называется тангенсом угла потерь $\mathrm{tg}\alpha$, то есть

$$\mathrm{tg}\alpha = G''(\omega)\left[G'(\omega)\right]^{-1}. \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = -J^{''}(\omega)\left[J^{'}(\omega)\right]^{-1}. \tag{17}$$

Спектры релаксации и ползучести и их связь с ядрами релаксации и ползучести. В [9,10] функция релаксации $G(t)$ определена следующий образом:

$$G(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau)\exp\left[-t\tau^{-1}\right]d\tau + G_\infty, \tag{18}$$

где $G_\infty = G(t)\big|_{t\to+\infty}$, $H(\tau)$ — функция распределения времён релаксации (спектр релаксации), $\left[\text{Па}\cdot\text{с}^{-1}\right]$.

С учётом (6), ядро релаксации $\psi(t)$ выражается через спектр релаксации $H(\tau)$ как

$$\psi(t) = (G_0)^{-1}\left\{\int_0^{+\infty} H(\tau)\exp\left[-t\tau^{-1}\right]d\tau + G_\infty\right\}. \tag{19}$$

Из этой формулы путём замены $\tau \to \gamma^{-1}$ можно получить выражение

$$\int_0^{+\infty} \gamma^{-2}H\left(\gamma^{-1}\right)\exp\left[-t\gamma\right]d\gamma = G_0\psi(t) - G_\infty, \tag{20}$$

в котором интегральное выражение есть не что иное как прямое преобразование Лапласа. Это означает, что функция $\gamma^{-2}H\left(\gamma^{-1}\right)$ является оригиналом, а функция $G_0\psi(t) - G_\infty$ — изображением. Обращением преобразования Лапласа можно определить $\gamma^{-2}H\left(\gamma^{-1}\right)$ через $\psi(t)$ и тогда путём обратной замены $\gamma \to \tau^{-1}$ находим $H(\tau)$:

$$H(\tau) = \tau^{-2}\left[G_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\psi(t)\right\} - G_\infty\delta\left(\tau^{-1}\right)\right], \tag{21}$$

где $\mathcal{L}^{-1}$ — оператор обратного преобразования Лапласа; $\delta\left(\tau^{-1}\right)$ — дельта-функция Дирака, $[\text{с}]$.

Поскольку величина G_∞ является константой, слагаемое $\tau^{-2}G_\infty\delta\left(\tau^{-1}\right)$ при $0 < \tau < +\infty$ равно нулю. Тогда (21) принимает более простой вид:

$$H(\tau) = G_0\tau^{-2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\psi(t)\right\}. \tag{22}$$

В [9,10] функция ползучести $J(t)$ определена как

$$J(t)=\int_0^{+\infty} j(\tau)\left\{1-\exp\left[-t\tau^{-1}\right]\right\}d\tau+J_0, \tag{23}$$

где $j(\tau)$ — функция распределения времён запаздывания, или спектр запаздывания (ползучести), $\left[\text{Па}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}\right]$.

С учётом (6), ядро ползучести $g(t)$ выражается через спектр ползучести $j(\tau)$ как

$$g(t)=1+\left(J_0\right)^{-1}\int_0^{+\infty} j(\tau)\left\{1-\exp\left[-t\tau^{-1}\right]\right\}d\tau. \tag{24}$$

Заменой $\tau\to\gamma^{-1}$ получим выражение, аналогичное (20):

$$\int_0^{+\infty}\gamma^{-2}j\left(\gamma^{-1}\right)\exp\left[-t\gamma\right]d\gamma=J_\infty-J_0g(t), \tag{25}$$

где $J_\infty=J(t)\big|_{t\to+\infty}=\int_0^{+\infty} j(\tau)\,d\tau+J_0$.

Тогда из (25) обращением преобразования Лапласа находим $j(\tau)$:

$$j(\tau)=\tau^{-2}\left[J_\infty\delta\left(\tau^{-1}\right)-J_0\mathcal{L}^{-1}\left\{g(t)\right\}\right]. \tag{26}$$

Заметим, что слагаемое $\tau^{-2}J_\infty\delta\left(\tau^{-1}\right)$ при $0<\tau<+\infty$ равно нулю, если $J_\infty=\text{const}\neq 0$ (вязкоупругое твёрдое тело). Тогда (26) записывается в виде

$$j(\tau)=-J_0\tau^{-2}\mathcal{L}^{-1}\left\{g(t)\right\}.$$

Для случая, когда $J_\infty=+\infty$ (вязкая или вязкоупругая жидкость), слагаемое $\tau^{-2}J_\infty\delta\left(\tau^{-1}\right)$ не определено (неопределённость типа $\left[0\cdot\infty\right]$).

Связь спектров релаксации и ползучести между собой. Согласно (8), в пространстве изображений Лапласа между ядром релаксации $\psi(t)$ и ядром ползучести $g(t)$ существует взаимная связь. С учётом (19) и (24) становится очевидным, что функции спектра релаксации $H(\tau)$ и спектра ползучести $j(\tau)$ тоже являются не независимыми.

Определим формулы, связывающие спектры между собой. Начнём с того, что из (19) найдём изображение ядра релаксации:

$$\bar{\psi}(p)=\frac{1}{G_0}\left\{\frac{G_\infty}{p}+\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}\gamma^{-2}H\left(\gamma^{-1}\right)\exp\left[-t\gamma\right]d\gamma\right\}\exp\left[-pt\right]dt\right\}. \quad (27)$$

Затем, используя (8), находим изображение ядра ползучести:

$$\bar{g}(p)=\left[p^2\bar{\psi}(p)\right]^{-1}. \quad (28)$$

Применив оператор обратного преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}$ к функции $J_\infty p^{-1}-J_0\bar{g}(p)$, получим выражение (25), из которого, как было сказано выше, можно получить функцию $\gamma^{-2}j\left(\gamma^{-1}\right)$. Обратной заменой $\gamma\to\tau^{-1}$ находим спектр ползучести $j(\tau)$, а с учётом (5) и (7) итоговая формула имеет вид:

$$\begin{gathered} j(\tau)=\tau^{-2}\left[\left(G_\infty\right)^{-1}\delta\left(\tau^{-1}\right)-\right. \\ \left.-\mathcal{L}^{-2}\left\{\left[p^2\mathcal{L}^2\left\{\gamma^{-2}H\left(\gamma^{-1}\right)\right\}+G_\infty p\right]^{-1}\right\}\right], \end{gathered} \quad (29)$$

где $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{L}^{-2}$ — операторы прямого и обратного преобразований Лапласа соответственно, применённые дважды.

Аналогичным образом можно вывести формулу, выражающую спектр релаксации через спектр ползучести:

$$H(\tau)=\tau^{-2}\mathcal{L}^{-2}\left\{\left[J_\infty p-p^2\mathcal{L}^2\left\{\gamma^{-2}j\left(\gamma^{-1}\right)\right\}\right]^{-1}\right\}. \quad (30)$$

Таким образом, через прямое и обратное преобразования Лапласа получают спектр ползучести из спектра релаксации, и наоборот.

Известные типы функций релаксации и ползучести. В работе [11] были представлены в виде таблиц известные типы ядер релаксации и ползучести и их производных (функции Абеля, Работнова, Ржаницына и др.). Используя эти данные, далее были найдены динамические и спектральные характеристики каждого из этих ядер.

Динамические характеристики известных ядер ползучести и ядер релаксации. Используя данные таблиц из [11] и формулы (9)–(17), были получены динамические характеристики известных ядер ползучести и ядер релаксации. Результаты показаны в таблицах 1–6.

1) Функции Максвелла. В таблице 1 приведены динамические характеристики ядер Максвелла.

Таблица 1

Динамические характеристики ядер Максвелла

№	Релаксация	Ползучесть	
1	$\exp\left[-\tau^{-1}t\right]$	$1+\tau^{-1}t$	
2	$G_0 i\tau\omega\left(1+i\tau\omega\right)^{-1}$	$J_0\left(1-i\tau^{-1}\omega^{-1}\right)$	
3	$G_0\tau^2\omega^2\left(1+\tau^2\omega^2\right)^{-1}$	J_0	
4	$G_0\tau\omega\left(1+\tau^2\omega^2\right)^{-1}$	$-J_0\tau^{-1}\omega^{-1}$	
5	$\tau^{-1}\omega^{-1}$	$+\infty$	0

2) Функции Кольрауша. В таблице 2 приведены динамические характеристики ядер Кольрауша.

В таблице 2 β принимает значения $0\le\beta\le 1$, $b_0=1$, $b_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left[(k-1)!\right]^{-1}\Gamma\left[z(k)\right]b_{r-k}$, $r=1,2,...,+\infty$, $z(k)=k(1-\beta)$, $z(r)=r(1-\beta)$. При $\beta=0$ характеристики Кольрауша переходят в характеристики Максвелла.

Таблица 2

Динамические характеристики ядер Кольрауша

№	Релаксация	Ползучесть
1	$\exp\left[-\tau^{\beta-1}t^{1-\beta}\right];$ $\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r(r!)^{-1}\tau^{z(-r)}t^{z(r)}$	$\sum_{r=0}^{+\infty}b_r\left\{\Gamma\left[1+z(r)\right]\right\}^{-1}\tau^{z(-r)}t^{z(r)}$
2	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-1)^r\Gamma\left[1+z(r)\right]}{r!(\tau\omega)^{z(r)}}\exp\left[-\frac{i\pi z(r)}{2}\right]$	$J_0\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(\tau\omega)^{z(-r)}\exp\left[-i\pi z(r)/2\right]$
3	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-1)^r\Gamma\left[1+z(r)\right]}{r!(\tau\omega)^{z(r)}}\cos\left[\frac{\pi z(r)}{2}\right]$	$J_0\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(\tau\omega)^{z(-r)}\cos\left[\pi z(r)/2\right]$
4	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{r+1}\Gamma\left[1+z(r)\right]}{r!(\tau\omega)^{z(r)}}\sin\left[\frac{\pi z(r)}{2}\right]$	$-J_0\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(\tau\omega)^{z(-r)}\sin\left[\pi z(r)/2\right]$

3) Функции Абеля. В таблице 3 приведены динамические характеристики ядер Абеля.

В таблице 3 β принимает значения $0<\beta\le 1$, а $z=-r\beta$. При $\beta=1$ характеристики Абеля переходят в характеристики Максвелла.

Таблица 3

Динамические характеристики ядер Абеля

№	Релаксация	Ползучесть	
1	$\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^{r}\left[\Gamma(1-z)\right]^{-1}\tau^{z}t^{-z}$	$1+\beta^{-1}\tau^{-\beta}t^{\beta}$	
2	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^{r}(\tau\omega)^{z}\exp\left[i\pi z/2\right]$	$J_0\left\{1+\Gamma(\beta)(\tau\omega)^{-\beta}\exp\left[-i\pi\beta/2\right]\right\}$	
3	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^{r}(\tau\omega)^{z}\cos\left[\pi z/2\right]$	$J_0\left\{1+\Gamma(\beta)(\tau\omega)^{-\beta}\cos\left[\pi\beta/2\right]\right\}$	
4	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^{r}(\tau\omega)^{z}\sin\left[\pi z/2\right]$	$-J_0\Gamma(\beta)(\tau\omega)^{-\beta}\sin\left[\pi\beta/2\right]$	
5	$\sin\left[\pi\beta/2\right]\left\{(\tau\omega)^{\beta}\left[\Gamma(\beta)\right]^{-1}+\cos\left[\pi\beta/2\right]\right\}^{-1}$	$\mathrm{tg}\left[\pi\beta/2\right]$	0

4) Функции Работнова. В таблице 4 приведены динамические характеристики ядер Работнова.

В таблице 4 γ принимает значения $0<\gamma\le 1$, а $z_1=-\gamma(r+1)$, $z_2=-\gamma$. При $\gamma=1$ характеристики Работнова переходят в характеристики Максвелла.

Таблица 4

Динамические характеристики ядер Работнова

№	Релаксация	Ползучесть	
1	$1-\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^{r}\left[\Gamma(1-z_1)\right]^{-1}\tau^{z_1}t^{-z_1}$	$1+\left[\Gamma(1-z_2)\right]^{-1}\tau^{z_2}t^{-z_2}$	
2	$G_0\left\{1+\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^{r}(z_1)^{-1}(\tau\omega)^{z_1}\exp\left[i\pi z_1/2\right]\right\}$	$J_0\left\{1+(\tau\omega)^{z_2}\exp\left[i\pi z_2/2\right]\right\}$	
3	$G_0\left\{1+\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^{r}(z_1)^{-1}(\tau\omega)^{z_1}\cos\left[\pi z_1/2\right]\right\}$	$J_0\left\{1+(\tau\omega)^{z_2}\cos\left[\pi z_2/2\right]\right\}$	
4	$G_0\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^{r}(z_1)^{-1}(\tau\omega)^{z_1}\sin\left[\pi z_1/2\right]$	$J_0(\tau\omega)^{z_2}\sin\left[\pi z_2/2\right]$	
5	$-\sin\left[\pi z_2/2\right]\left\{(\tau\omega)^{-z_2}+\cos\left[\pi z_2/2\right]\right\}^{-1}$	$-\mathrm{tg}\left[\pi z_2/2\right]$	0

5) Функции Ржаницына. В таблице 5 приведены динамические характеристики ядер Ржаницына.

В таблице 5 β принимает значения $0<\beta\le 1$, а $z_1=\beta$, $z_2=r\beta$, $\gamma\left(\beta,\tau^{-1}t\right)=\int_0^{\tau^{-1}t}\xi^{\beta-1}\exp\left[-\xi\right]d\xi$ — нижняя неполная гамма-функция

[19, 20], $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}(\tau\omega)$, $\rho(\omega)=\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$. При $\beta=1$ характеристики Ржаницына переходят в характеристики Максвелла.

Таблица 5

Динамические характеристики ядер Ржаницына

№	Релаксация	Ползучесть	
1	$1-\gamma\left(z_1,\tau^{-1}t\right)\left[\Gamma(z_1)\right]^{-1}$	$1+\sum_{r=1}^{+\infty}\gamma\left(z_2,\tau^{-1}t\right)\left[\Gamma(z_2)\right]^{-1}$	
2	$G_0\left\{1-\left[\rho(\omega)\right]^{-z_1}\exp\left[-iz_1\varphi(\omega)\right]\right\}$	$J_0\left\{1+\sum_{r=1}^{+\infty}\left[\rho(\omega)\right]^{-z_2}\exp\left[-iz_2\varphi(\omega)\right]\right\}$	
3	$G_0\left\{1-\left[\rho(\omega)\right]^{-z_1}\cos\left[z_1\varphi(\omega)\right]\right\}$	$J_0\left\{1+\sum_{r=1}^{+\infty}\left[\rho(\omega)\right]^{-z_2}\cos\left[z_2\varphi(\omega)\right]\right\}$	
4	$G_0\left[\rho(\omega)\right]^{-z_1}\sin\left[z_1\varphi(\omega)\right]$	$-J_0\sum_{r=1}^{+\infty}\left[\rho(\omega)\right]^{-z_2}\sin\left[z_2\varphi(\omega)\right]$	
5	$\sin\left[z_1\varphi(\omega)\right]\left\{\left[\rho(\omega)\right]^{z_1}-\cos\left[z_1\varphi(\omega)\right]\right\}^{-1}$	$+\infty$	0

6) Функции Гаврильяка-Негами. В таблице 6 приведены динамические характеристики ядер Гаврильяка-Негами

В таблице 6 α, β принимают значения $0<\alpha\le 1$, $0<\beta\le 1$, а $D_m=\sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\cdots\sum_{k_{r-1}}^{k_{r-2}}\prod_{j=0}^{r-1}a\left(k_j-k_{j+1}\right)$, $a(r)=\dfrac{\Gamma(r+\beta)}{r!\,\Gamma(\beta)}$, $k_0=m$, $k_r=0$, $z_1=-\alpha(r+\beta)$, $z_2=-\alpha(r\beta+m)$, $r=1,2,...,+\infty$, $m=0,1,...,+\infty$.

При $a=1$ характеристики Гаврильяка-Негами переходят в характеристики Ржаницына, а при $\alpha=\beta=1$ они переходят в спектры Максвелла.

Таблица 6

Динамические характеристики ядер Ржаницына

№	Релаксация	Ползучесть
1	$1-\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\,a(r)\left[\Gamma(1-z_1)\right]^{-1}\tau^{z_1}t^{-z_1}$	$1+\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\,D_m\left[\Gamma(1-z_2)\right]^{-1}\tau^{z_2}t^{-z_2}$
2	$G_0\left\{1-\sum_{r=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^r\,a(r)}{(\tau\omega)^{-z_1}}\exp\left[\dfrac{i\pi z_1}{2}\right]\right\}$	$J_0\left\{1+\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^m\,D_m}{(\tau\omega)^{-z_2}}\exp\left[\dfrac{i\pi z_2}{2}\right]\right\}$
3	$G_0\left\{1-\sum_{r=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^r\,a(r)}{(\tau\omega)^{-z_1}}\cos\left[\dfrac{\pi z_1}{2}\right]\right\}$	$J_0\left\{1+\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^m\,D_m}{(\tau\omega)^{-z_2}}\cos\left[\dfrac{\pi z_2}{2}\right]\right\}$
4	$-G_0\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\,a(r)(\tau\omega)^{z_1}\sin\left[\dfrac{\pi z_1}{2}\right]$	$J_0\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\,D_m(\tau\omega)^{z_2}\sin\left[\dfrac{\pi z_2}{2}\right]$

В таблицах 1–6 под номером 1 обозначены функции ядер, под номером 2 — комплексный модуль и комплексная податливость соответственно, а под номерами 3–4 — их действительные и мнимые части. Под номером 5 обозначены тангенс угла потерь и его предельные значения при $\omega \to 0+$ и при $\omega \to +\infty$ соответственно.

Замечание. Формулы тангенса угла потерь $\mathrm{tg}\alpha$ для ядер Абеля и Работнова были получены с помощью формулы (17), для ядер Ржаницына — по формуле (16). Это обусловлено тем, что в первом случае функции $J'(\omega)$ и $J''(\omega)$, в отличие от $G'(\omega)$ и $G''(\omega)$, представляют собой аналитические выражения, а не бесконечные ряды, поэтому здесь удобнее использовать (17). Во втором случае всё наоборот. Для ядер Максвелла одинаково удобно использовать обе формулы, тогда как для ядер Кольрауша и Гаврильяка-Негами и (16), и (17) не дадут аналитического выражения $\mathrm{tg}\alpha$.

Также заметим, что из (14) можно получить следующие функции уже в аналитическом виде:

1) модуль накопления и модуль потерь Абеля соответственно:

$$G'(\omega) = \frac{G_0(\tau\omega)^\beta\left\{(\tau\omega)^\beta + \Gamma(\beta)\cos[\pi\beta/2]\right\}}{(\tau\omega)^{2\beta} + 2\Gamma(\beta)(\tau\omega)^\beta\cos[\pi\beta/2] + [\Gamma(\beta)]^2};$$

$$G''(\omega) = \frac{G_0\Gamma(\beta)(\tau\omega)^\beta\sin[\pi\beta/2]}{(\tau\omega)^{2\beta} + 2\Gamma(\beta)(\tau\omega)^\beta\cos[\pi\beta/2] + [\Gamma(\beta)]^2};$$

2) модуль накопления и модуль потерь Работнова соответственно:

$$G'(\omega) = G_0(\tau\omega)^\gamma\left\{(\tau\omega)^\gamma + \cos[\pi\gamma/2]\right\}\left\{(\tau\omega)^{2\gamma} + 2(\tau\omega)^\gamma\cos[\pi\gamma/2] + 1\right\}^{-1};$$

$$G''(\omega) = G_0(\tau\omega)^\gamma\sin[\pi\gamma/2]\left\{(\tau\omega)^{2\gamma} + 2(\tau\omega)^\gamma\cos[\pi\gamma/2] + 1\right\}^{-1};$$

3) действительная и мнимая части комплексной податливости Ржаницына соответственно:

$$J'(\omega) = J_0\left\{[\rho(\omega)]^\beta - \cos[\beta\varphi(\omega)]\right\}\left\{[\rho(\omega)]^\beta - 2\cos[\beta\varphi(\omega)] + [\rho(\omega)]^{-\beta}\right\}^{-1};$$

$$J''(\omega) = -J_0\sin[\beta\varphi(\omega)]\left\{[\rho(\omega)]^\beta - 2\cos[\beta\varphi(\omega)] + [\rho(\omega)]^{-\beta}\right\}^{-1}.$$

Спектральные характеристики известных ядер ползучести и ядер релаксации. Между спектрами и ядрами ползучести и релаксации были установлены зависимости (22), (26). Используя данные таблиц из [18] и формулы (22), (26), были определены выражения соответствующих спектров ползучести и релаксации. Полученные результаты приведены ниже в таблицах 7–12.

1) Функции Максвелла. В таблице 7 приведены спектры и ядра Максвелла.

Таблица 7

Спектральные характеристики ядер Максвелла

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$G_0 t^{-2}\delta\left(t^{-1}-\tau^{-1}\right)$	$\exp\left[-\tau^{-1}p\right]$
2	$J_0 t^{-2}\left(\tau^{-1}t-1\right)\delta\left(t^{-1}\right)$	$1+\tau^{-1}p$

2) Функции Кольрауша. В таблице 8 приведены спектры и ядра Кольрауша.

В таблице 8 β принимает значения $0\le\beta\le 1$, $b_0=1$, $b_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left[(k-1)!\right]^{-1}\Gamma\left[z(k)\right]b_{r-k}$, $r=1,2,...,+\infty$, $z(k)=(1-\beta)k$, $s\left[z(r)\right]=\pi\left\{\sin\left[\pi z(r)\right]\right\}^{-1}=\Gamma\left[1-z(r)\right]\Gamma\left[z(r)\right]$, $z(r)=r(1-\beta)$. При $\beta=0$ спектры Кольрауша переходят в спектры Максвелла.

Таблица 8

Спектральные характеристики ядер Кольрауша

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$\frac{G_0}{t^2}\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\left\{r!\Gamma\left[z(-r)\right]\right\}^{-1}\tau^{z(-r)}t^{z(r)+1}$	$\exp\left[-\tau^{\beta-1}p^{1-\beta}\right]$; $\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r(r!)^{-1}\tau^{z(-r)}p^{z(r)}$
2	$\frac{J_0}{t^2}\sum_{r=0}^{+\infty}b_r\left\{s\left[z(r)\right]\right\}^{-1}\tau^{z(-r)}t^{z(r)+1}$	$\sum_{r=0}^{+\infty}b_r\left\{\Gamma\left[1+z(r)\right]\right\}^{-1}\tau^{z(-r)}p^{z(r)}$

3) Функции Абеля. В таблице 9 приведены спектры и ядра Абеля.

В таблице 9 β принимает значения $0<\beta\le 1$, а $s(z)=\pi\left[\sin(\pi z)\right]^{-1}=\Gamma(1-z)\Gamma(z)$, $z=-r\beta$. При $\beta=1$ спектры Абеля переходят в спектры Максвелла.

Таблица 9

Спектральные характеристики ядер Кольрауша

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$G_0 t^{-2}\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^r\left[s(z)\right]^{-1}\tau^z t^{1-z}$	$\sum_{r=0}^{+\infty}\left[-\Gamma(\beta)\right]^r\left[\Gamma(1-z)\right]^{-1}\tau^z p^{-z}$
2	$-J_0 t^{-2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)+\beta^{-1}\left[\Gamma(-\beta)\right]^{-1}\tau^{-\beta}t^{\beta+1}\right\}$	$1+\beta^{-1}\tau^{-\beta}p^{\beta}$

4) Функции Работнова. В таблице 10 приведены спектры и ядра Работнова.

В таблице 10 γ принимает значения $0<\gamma\le 1$, а $s(z)=\pi\left[\sin(\pi z)\right]^{-1}=\Gamma(1-z)\Gamma(z)$, $z_1=-\gamma(r+1)$, $z_2=-\gamma$. При $\gamma=1$ спектры Работнова переходят в спектры Максвелла.

Таблица 10

Спектральные характеристики ядер Работнова

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$\frac{G_0}{t^2}\left\{\delta(t^{-1})-\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\left[s(z_1)\right]^{-1}\tau^{z_1}t^{1-z_1}\right\}$	$1-\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\left[\Gamma(1-z_1)\right]^{-1}\tau^{z_1}p^{-z_1}$
2	$-J_0t^{-2}\left\{\delta(t^{-1})+\left[s(z_2)\right]^{-1}\tau^{z_2}t^{1-z_2}\right\}$	$1+\left[\Gamma(1-z_2)\right]^{-1}\tau^{z_2}p^{-z_2}$

5) Функции Ржаницына. В таблице 5 приведены спектры и ядра Ржаницына.

В таблице 11 β принимает значения $0<\beta\le 1$, а $\theta(t)=th(\tau t^{-1}-1)$, $h(\tau t^{-1}-1)$ — функция Хевисайда, $s(z)=\pi\left[\sin(\pi z)\right]^{-1}=\Gamma(1-z)\Gamma(z)$, $z_1=\beta$, $z_2=r\beta$, $\gamma(\beta,\tau^{-1}p)=\int_0^{\tau^{-1}p}\xi^{\beta-1}\exp[-\xi]d\xi$ — нижняя неполная гамма-функция [19,20]. При $\beta=1$ спектры Ржаницына переходят в спектры Максвелла.

Таблица 11

Спектральные характеристики ядер Ржаницына

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$G_0t^{-2}\left[s(z_1)\right]^{-1}\theta(t)(\tau t^{-1}-1)^{-z_1}$	$1-\gamma(z_1,\tau^{-1}p)\left[\Gamma(z_1)\right]^{-1}$
2	$J_0t^{-2}\left\{\theta(t)\sum_{r=1}^{+\infty}\left[s(z_2)\right]^{-1}(\tau t^{-1}-1)^{-z_2}-\delta(t^{-1})\right\}$	$1+\sum_{r=1}^{+\infty}\gamma(z_2,\tau^{-1}p)\left[\Gamma(z_2)\right]^{-1}$

6) Функции Гаврильяка-Негами. В таблице 12 приведены спектры и ядра Гаврильяка-Негами.

В таблице 12 α, β принимают значения $0<\alpha\le 1$, $0<\beta\le 1$, а $D_m=\sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\cdots\sum_{k_{r-1}}^{k_{r-2}}\prod_{j=0}^{r-1}a(k_j-k_{j+1})$, $a(r)=\frac{\Gamma(r+\beta)}{r!\Gamma(\beta)}$, $k_0=m$, $s(z)=\pi\left[\sin(\pi z)\right]^{-1}=\Gamma(1-z)\Gamma(z)$, $z_1=-\alpha(r+\beta)$, $z_2=-\alpha(r\beta+m)$,

$r=1,2,...,+\infty$, $m=0,1,...,+\infty$. При $\alpha=1$ спектры Гаврильяка-Негами переходят в спектры Ржаницына, а при $\alpha=\beta=1$ они переходят в спектры Максвелла.

Таблица 12

Спектральные характеристики ядер Гаврильяка-Негами

№	Спектр (оригинал)	Ядро (изображение)
1	$\frac{G_0}{t^2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)-\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\,a(r)\left[s(z_1)\right]^{-1}\tau^{z_1}t^{1-z_1}\right\}$	$1-\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-1)^r\,a(r)}{\Gamma(1-z_1)}\left(\frac{p}{\tau}\right)^{-z_1}$
2	$-\frac{J_0}{t^2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)+\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\,D_m\left[s(z_2)\right]^{-1}\tau^{z_2}t^{1-z_2}\right\}$	$1+\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\,D_m}{\Gamma(1-z_2)}\left(\frac{p}{\tau}\right)^{-z_2}$

В таблицах 7–12 под номером 1 обозначены спектры и ядра релаксации, под номером 2 — спектры и ядра ползучести. Каждый спектр был получен обращением соответствующего ядра. В полученном обращении делали замену $t\to t^{-1}$, и затем результат умножали на t^{-2}.

Численный метод решения задачи. Спектры релаксации и ползучести, согласно (22) и (26), необходимо находить через ядра релаксации и ползучести обращением преобразования Лапласа. Данную задачу решим одним из численных методов обращения преобразования Лапласа — методом квадратурных формул с равными коэффициентами [21]. Подробно этот метод был описан в предыдущей работе [11].

Примеры численного решения задачи. Были написаны компьютерные программы, реализующие метод квадратурных формул для нахождения спектров. Приведём несколько расчётов, полученных с помощью данных программ.

На рис. 1–6 показаны графики, полученные методом квадратурных формул.

Для построения функций спектров задали параметры:

$$\tau=100\ \left(\text{для спектров Работнова }\tau=20\right),$$

$$\beta=0,5;\ \gamma=0,5;\ h=0,5;\ s=1;\ G_0=1;\ J_0=1.$$

На рис. 1 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра релаксации Абеля, которую сравнивают с её приближённым выражением в виде ряда

$$G_0t^{-2}\sum_{r=0}^{50}\left[-\Gamma(\beta)\right]^r\left[s(z)\right]^{-1}\tau^z t^{1-z}.$$

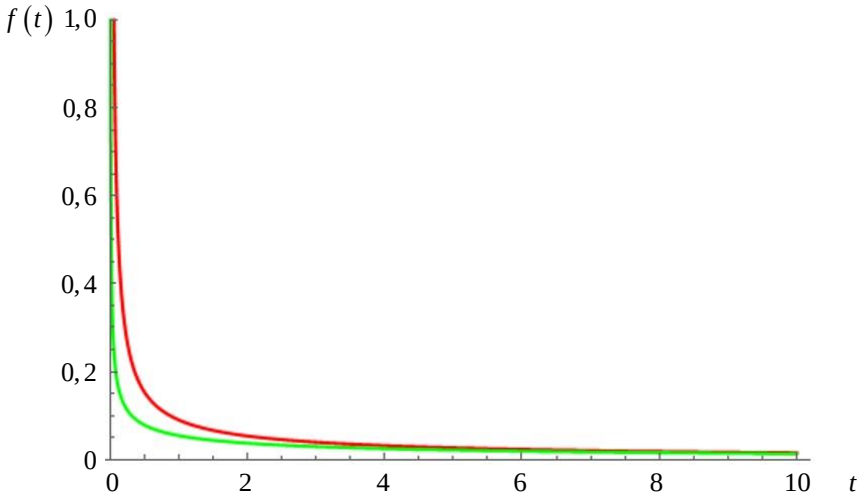


Рис. 1. Спектр релаксации Абеля при $n=100,\ \Delta H_{cp}\approx 0,05$:

— численное решение; — аналитическое решение

На рис. 2 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра ползучести Абеля, которую сравнивают с её аналитическим выражением

$$-J_0 t^{-2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)+\tau^{-\beta}\left[\beta\Gamma\left(-\beta\right)\right]^{-1}t^{\beta+1}\right\}.$$

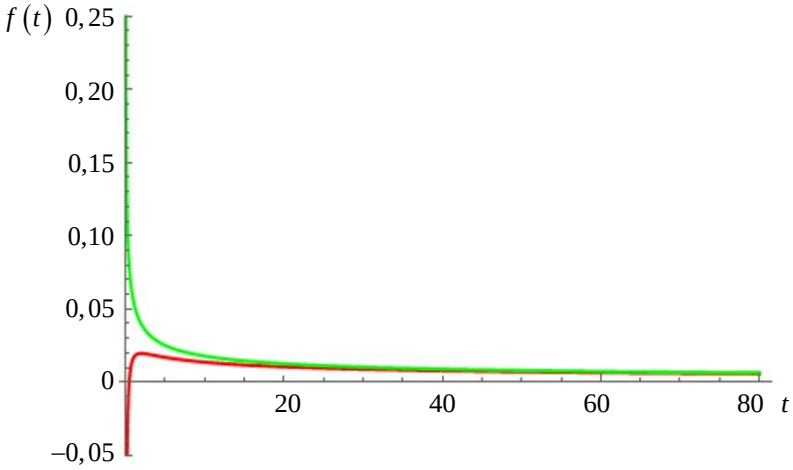


Рис. 2. Спектр ползучести Абеля при $n=100,\ \Delta j_{cp}\approx 0,008$:

— численное решение; — аналитическое решение

На рис. 3 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра релаксации Работнова, которую сравнивают с её приближённым выражением в виде ряда

$$G_0 t^{-2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)-\sum_{r=0}^{50}\left(-1\right)^r\left[s\left(z_1\right)\right]^{-1}\tau^{z_1}t^{1-z_1}\right\}.$$

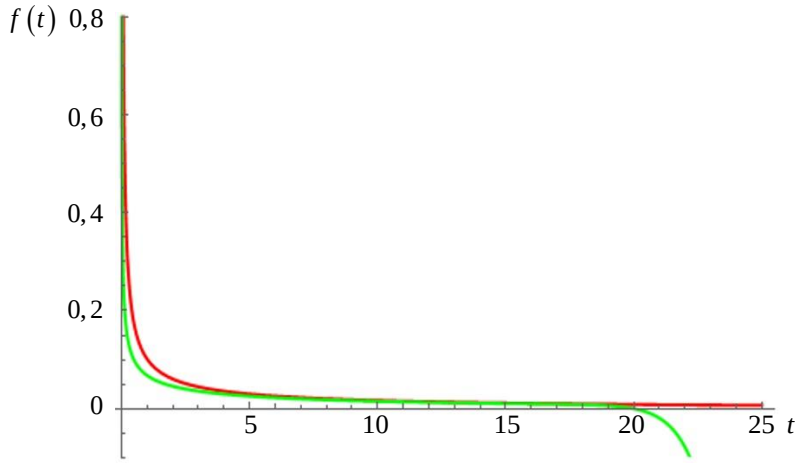


Рис. 3. Спектр релаксации Работнова при $n=100,\ \Delta H_{ср}\approx 0,025$:
— численное решение; — аналитическое решение

На рис. 4 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра ползучести Работнова, которую сравнивают с её аналитическим выражением

$$-J_0 t^{-2}\left\{\delta\left(t^{-1}\right)+\left[s\left(z_2\right)\right]^{-1}\tau^{z_2}t^{1-z_2}\right\}.$$

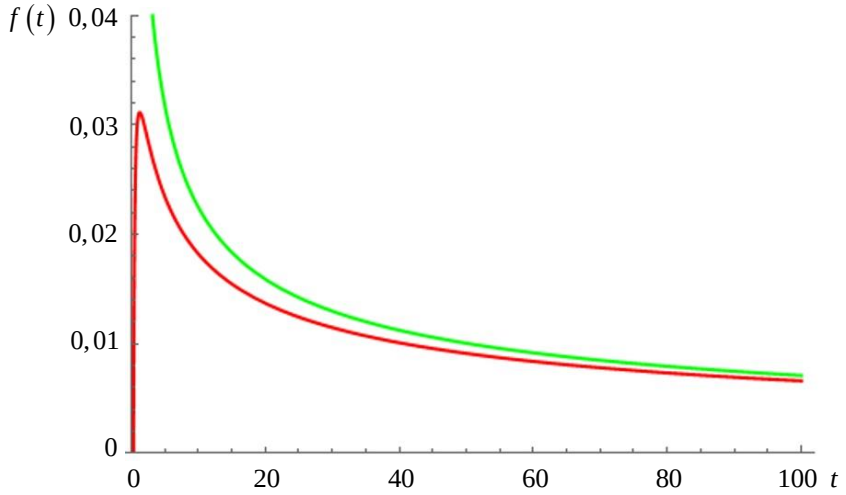


Рис. 4. Спектр ползучести Работнова при $n=100,\ \Delta j_{ср}\approx 0,006$:
— численное решение; — аналитическое решение

На рис. 5 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра релаксации Ржаницына, которую сравнивают с её аналитическим выражением

$$G_0\left[s\left(z_1\right)\right]^{-1}t^{-2}\left(\tau t^{-1}-1\right)^{-z_1}\theta\left(t\right).$$

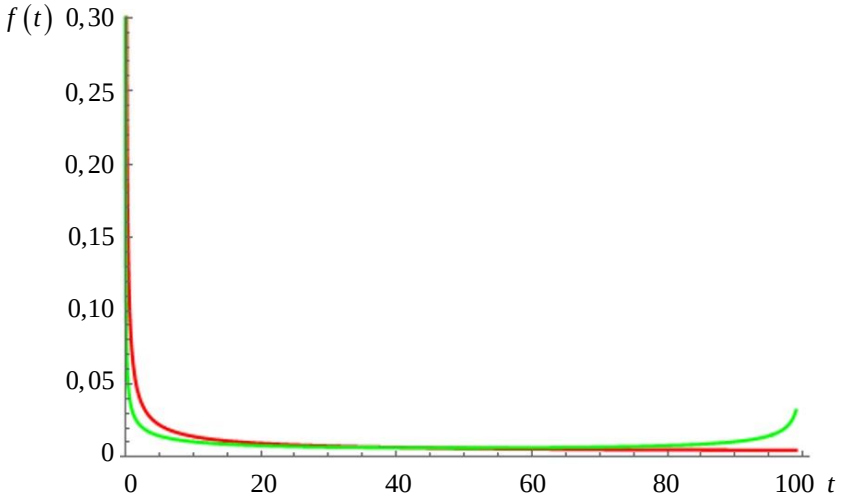


Рис. 5. Спектр релаксации Ржаницына при $n=100,\ \Delta H_{ср}\approx 0,007$:
— численное решение; — аналитическое решение

На рис. 6 приведён результат работы программы, определяющей функцию спектра ползучести Ржаницына, которую сравнивают с её приближённым выражением в виде ряда

$$J_0 t^{-2}\left\{\theta(t)\sum_{r=1}^{100}\left[s(z_2)\right]^{-1}\left(\tau t^{-1}-1\right)^{-z_2}-\delta\left(t^{-1}\right)\right\}.$$

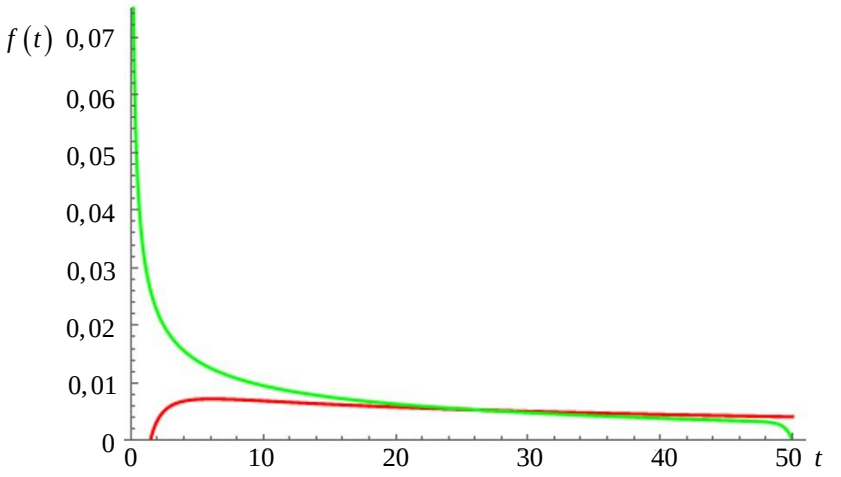


Рис. 6. Спектр ползучести Ржаницына при $n=100,\ \Delta j_{ср}\approx 0,0027$:
— численное решение; — аналитическое решение

Все необходимые вычисления были выполнены в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Выводы. Проанализировав результаты, делаем следующие выводы:

1) графики спектров релаксации и ползучести были получены достаточно точно (максимальная погрешность вычислений в среднем не превосходит 5%), несмотря на то что на начальных участках времени погрешность очень заметна. Численное нахождение функций спектров ползучести Кольрауша и Гаврильяка-Негами вызвало трудности, связанные со сложной рекурсивной формулой в этих ядрах;

2) для всех ядер (кроме ядер Кольрауша и Гаврильяка-Негами) были получены их динамические характеристики в виде аналитических функций, даже несмотря на то, что функции некоторых ядер представлены в виде приближённого бесконечного ряда;

3) формулы, определяющие спектры друг через друга, на практике оказались не слишком эффективны (за исключением спектров Максвелла). Не исключено, что для большей эффективности прямое и обратное преобразование Лапласа в этих формулах следует заменять на приближённое (подынтегральную функцию записывать в виде приближённого бесконечного ряда).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды.* Москва, Физматлит, 2009, 624 с.

[2] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[3] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязкоупругих композитов методом асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 22–46.

[4] Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. Москва, Наука, 1966, 752 с.

[5] Колтунов М.А. *Ползучесть и релаксация*. Москва, Высшая школа, 1976, 276 с.

[6] Москвитин Б.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов*. Москва, Наука, 1972, 328 с.

[7] Ржаницын А.Р. *Теория ползучести*. Москва, Стройиздат, 1968, 416 с.

[8] Бартенев Г.М., Френкель С.Я. *Физика полимеров*. Ленинград, Химия, 1990, 432 с.

[9] Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва, Мир, 1974, 339 с.

[10] Бленд Д. *Теория линейной вязкоупругости*. Москва, Мир, 1965, 199 с.

[11] Валишин А.А., Тиняев М.А. Моделирование вязкоупругих характеристик материалов на основе численного обращения преобразования Лапласа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 3–21.

[12] Биргер И.А., Пановко Я.Г. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах, том 1*. Москва, Машиностроение, 1968, 831 с.

[13] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика в десяти томах. Т. VII. Теория упругости*. Москва, Физматлит, 2003, 264 с.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 2, с. 28–48.
[16] Coleman B.D. Thermodynamics of Materials with Memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 1964, № 17, pp. 1–46.
[17] Ферри Дж. *Вязкоупругие свойства полимеров*. Москва, Иностранная литература, 1963, 535 с.
[18] Gross B., *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Paris, Hermann & Cie Publ., 1953, 71 p.
[19] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции*. Москва, Физматгиз, 1968, 344 с.
[20] Пагурова В.И. *Таблицы неполной гамма-функции*. Москва, Физматгиз, 1963, 235 с.
[21] Крылов В.И., Скобля Н.С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*. Москва, Наука, 1974, 223 с.

Статья поступила в редакцию 04.11.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Валишин А.А., Тиняев М.А. Моделирование динамических и спектральных вязкоупругих характеристик материалов на основе численного обращения преобразования Лапласа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 42–62.

Валишин Анатолий Анатольевич — д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: enf@mail.ru

Тиняев Михаил Александрович — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: infomaniak97@yandex.ru

Modeling of dynamic and spectral viscoelastic characteristics of materials based on numerical inversion of the Laplace transform

© A.A. Valishin, M.A. Tinyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

When designing products made of composite materials intended for use in difficult conditions of inhomogeneous deformations and temperature, it is important to take into account viscoelastic, including spectral and dynamic, properties of the binder and fillers. The article considers dynamic characteristics (complex modulus, complex malleability, their real and imaginary parts, loss angle tangent) and spectral characteristics of relaxation and creep and their dependence on each other. The characteristics mentioned above were found for all known types of creep kernel and relaxation kernel. To find the spectral characteristics, one of the numerical methods of inverting the Laplace transform

was used — the method of quadrature formulas with equal coefficients. Algorithms and computer programs for the implementation of this method have been compiled. The obtained graphs are quite accurate (the maximum error of calculations in the average does not exceed 5%), despite the fact that the error is very noticeable in the initial time segments.

Keywords: *viscoelasticity, relaxation, creep, dynamic characteristics, spectral characteristics, Laplace transform, method of quadrature formulas*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.
[2] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.
[3] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Sborschikov S.V., Yahnovskiy A.D., Baymurzin R.R. Modeling of effective relaxation and creep kernels of viscoelastic composites by asymptotic averaging method. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 3, pp. 22–46.
[4] Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstrukcij* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p.
[5] Koltunov M.A. *Polzuchest' i relaksaciya* [Creep and relaxation]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1976, 276 p.
[6] Moskvitin B.V. *Soprotivlenie vyazkouprugih materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 328 p.
[7] Rzhanicyn A.R. *Teoriya polzuchesti* [Theory of creep]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1968, 416 p.
[8] Bartenev G.M., Frenkel S.Ya. *Fizika polimerov* [Physics of polymers]. Leningrad, Chemistry Publ., 1990, 432 p.
[9] Kristensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1974, 339 p.
[10] Blend D. Teoriya linejnoj vyazkouprugosti [Theory of linear viscoelasticity]. Moscow, Mir Publ., 1965, 199 p.
[11] Valishin A.A., Tinyaev M.A. Modeling the viscoelastic characteristics of materials based on the numerical inversion of the Laplace transform. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 3, pp. 3–21.
[12] Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik v tryoh tomah, tom 1* [Strength, stability, oscillations. Handbook in three volumes, volume 1]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 831 p.
[13] Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[14] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika v desyati tomakh. Tom VII. Teoriya uprugosti*. [Theoretical physics in ten volumes. Volume VII. Theory of elasticity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 264 p.
[15] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.
[16] Coleman B.D. Thermodynamics of Materials with Memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, № 17, pp. 1–46.
[17] Ferry J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. New-York, Wiley, 1961, 482 p.
[18] Gross B., *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Paris, Hermann & Cie Publ., 1953, 71 p.

[19] Janke E., Emde F., Lesh F. *Special'nye funkcii* [Special functions]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1968, 344 p.
[20] Pagurova V.I. *Tablicy nepolnoj gamma-funkcii* [Tables of incomplete gamma function]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 235 p.
[21] Krylov V.I., Skoblya N.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa* [Methods of the approximate Fourier transform and inversion of the Laplace transform]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 223 p.

Valishin A.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: enf@mail.ru

Tinyaev M.A., assistant of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: infomaniak97@yandex.ru