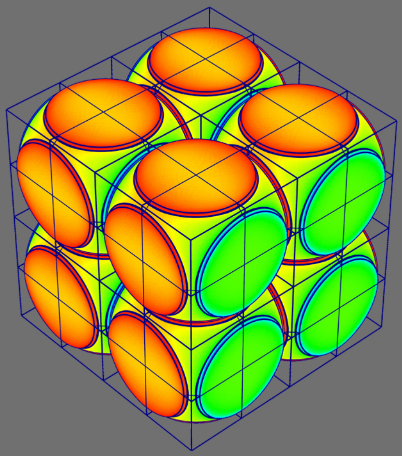
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование
и численные методы

УДК 539.3

Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия

Предложена теория термоползучести многослойных тонких пластин, основанная на анализе общих уравнений трехмерной нелинейной теории термоползучести с помощью построения асимптотических разложений по малому параметру, представляющему отношение толщины пластины к характерной длине, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Сформулированы локальные задачи для нахождения всех шести компонент тензора напряжений во всех слоях пластины, с точным учетом всех граничных условий. Выведены глобальные (осредненные по определенным правилам) уравнения теории термоползучести пластин, показано, что эти уравнения близки по структуре к уравнениям теории пластин Кирхгофа – Лява, но отличаются от них наличием 3-го порядка производных от продольных перемещений. Показано, что предложенная теория позволяет вычислить с наперед заданной точностью все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига, для этого необходимо численно решить только глобальные уравнения теории термоползучести пластин, а остальные вычисления сводятся только к использованию аналитических формул.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, асимптотические разложения, тонкие многослойные пластины, теория термоползучести, локальные задачи.*

Введение. Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких тел: пластин, стержней, оболочек и комбинированных тонкостенных конструкций на их основе представляет особый класс задач механики деформируемого твердого тела, которые, как правило, являются более сложными в плане вычислений, чем задачи расчета НДС в трехмерных телах, геометрическая форма которых такова, что у нее нет какого-либо преимущественного направления. Прямые конечно-элементные расчеты тонких тел как трехмерных объектов обычно приводят к неудачным результатам — или к очень большим вычислительным затратам, так как требуется очень мелкая сетка для получения требуемой точности расчета полного НДС, или не вполне удовлетворительным результатам распределения напряжений по толщине тонкого тела. Поэтому для расчетов НДС тонких тел применяют специализированные методы — особые типы конечных элементов [1] или двумерные теории пластин и оболочек [2].

Анализ первого направления не входит в задачи данной работы, а относительно двумерных теорий пластин и оболочек отметим наиболее перспективное направление, которое развивается в последнее время, — асимптотическую теорию пластин и оболочек, основанную на асимптотических разложениях трехмерных уравнений теории упругости по малому параметру, представляющему отношение толщины к характерной длине пластины [3–8]. Никаких гипотез относительно решения эта теория не использует. Данная теория была применена для упругих [9–11] и вязкоупругих [12] тел, а также для расчета и проектирования сотовых конструкций [13].

В статье предложено дальнейшее развитие этой асимптотической теории для пластин, обладающих нелинейными деформациями термоползучести. Проблема исследования НДС тонких тел с учетом эффектов термоползучести возникает во многих прикладных задачах, в частности в задачах расчета прочности и долговечности конструкций корпусов ядерных реакторов, длительно эксплуатируемых при повышенных температурах.

Постановка задачи термоползучести. Рассмотрим многослойную пластину, занимающую область $\Omega = \left\{\mathbf{x} + \mathbf{n}_\Sigma h\xi : \mathbf{x} \in \Sigma, \xi \in \left[-1/2, 1/2\right]\right\}$, где Σ — срединная плоская поверхность с нормалью $\mathbf{n}_\Sigma$, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ; h — постоянная толщина пластины, для которой $\text{к} = h/L << 1$ — малый параметр (L — характерный линейный размер области Ω, например $L = diam(\Omega)$); ξ — безразмерная нормальная координата пластины. На границе рассматриваемой области $\partial\Omega$ выделим внешнюю $\Sigma_\sigma^+ = \left\{\mathbf{x} + \mathbf{n}_\Sigma h/2 : \mathbf{x} \in \Sigma\right\}$, внутреннюю $\Sigma_\sigma^- = \left\{\mathbf{x} - \mathbf{n}_\Sigma h/2 : \mathbf{x} \in \Sigma\right\}$ и торцевую $\Sigma_u = \left\{\mathbf{x} + \mathbf{n}_\Sigma h\xi : \mathbf{x} \in \Gamma,\right.$ $\left.\xi \in \left[-1/2, 1/2\right]\right\}$ поверхности: $\partial\Omega = \Sigma_\sigma^- \cup \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma^+$, а также поверхность раздела Σ_c^i i-го и ($i+1$)-го слоев пластины. В области $\Omega\times[0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим краевую задачу механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с учетом деформаций ползучести и термонапряжений [14]:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0;\\
&\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^\theta);\\
&\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\sigma});\\
&\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T);\\
&\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right]_{\Sigma_c^i} = \mathbf{0}; \qquad \left[\mathbf{u}\right]_{\Sigma_c^i} = \mathbf{0};\\
&\boldsymbol{\sigma}\big|_{\Sigma_\sigma^\pm} \cdot \mathbf{n} = -\tilde{p}_\pm \mathbf{n}; \qquad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}^b;\\
&\boldsymbol{\varepsilon}^c\Big|_{\tau=0} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ — тензор деформаций ползучести; $\boldsymbol{\varepsilon}^\theta = \boldsymbol{\alpha}(\theta - \theta_0)$ — тензор тепловых деформаций; $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\sigma})$ — дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{12}$ тензорная функция, описывающая модель скоростей деформаций термоползучести [14]; $[\cdot]_{\Sigma_c^i}$ — скачок функции через поверхность Σ_c^i; $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор температурного расширения; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали; $\tilde{p}_\pm$ — давление, заданное на разных поверхностях пластины $\Sigma_\sigma^\pm$; ∇ — набла-оператор [15]; $\otimes$ — знак тензорного произведения; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор модулей упругости; $\mathbf{u}^b$ — заданное перемещение.

Температурное поле θ будем считать известным, распределенным неравномерно по пластине.

Введем прямоугольные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по орту $\mathbf{n}_\Sigma$, а оси $O\tilde{x}_1$, $O\tilde{x}_2$ принадлежат Σ. Введем также безразмерные компоненты величин, входящих в задачу (1) в системе координат $O\tilde{x}_i : q_i = \tilde{x}_i / L; \tau = \tilde{t} / T$; $u_i = \tilde{u}_i / L$; $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} / \sigma_0$; $C_{ijkl} = \tilde{C}_{ijkl} / \sigma_0$; $F_{ij} = \tilde{F}_{ij} / T$; $p_\pm = \tilde{p}_\pm / \sigma_0$; $u_i^b = \tilde{u}_i^b / L$, где σ_0 — характерное значение напряжений; T — характерное время развития деформаций ползучести, а тильдой обозначены соответствующие размерные величины. Таким образом, безразмерную нормальную координату пластины можно записать в виде $\xi = \tilde{x}_3 / h = q_3 / \kappa$. Пусть также $\tilde{\partial}_i = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ — оператор дифференцирования по введенным декартовым координатам. Тогда систему (1) можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\partial}_j \sigma_{ij} = 0, \\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^c - \varepsilon_{kl}^\theta); \\
&\dot{\varepsilon}_{ij}^c = F_{ij}(\varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}); \\
&2\varepsilon_{ij} = L\tilde{\partial}_j u_i + L\tilde{\partial}_i u_j; \\
&\left[\sigma_{ij} n_j\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \qquad [u_i]_{\Sigma_c^k} = 0; \\
&\sigma_{i3}\big|_{\Sigma_\sigma^\pm} = -p_\pm \delta_{i3}; \qquad u_i\big|_{\Sigma_u} = u_i^b; \\
&\varepsilon_{ij}^c\Big|_{\tau=0} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $\varepsilon_{kl}^{\theta} = \alpha_{ij}(\theta - \theta_0)$.

Основное допущение модели состоит в следующем: давление $p_{\pm}\left(q_I\right)$ на поверхностях пластины является малой величиной 3-го порядка малости:

$$p_{\pm}\left(q_I\right) = \kappa^3 p_{\pm}^0\left(q_I\right). \tag{3}$$

Построение асимптотического разложения. Согласно общему подходу метода асимптотического осреднения (МАО) [9,10], координаты q_i будем рассматривать как макроскопические (медленные), а координату ξ — как локальную (быструю). При этом из формулы для производной сложной функции для оператора дифференцирования $\tilde{\partial}_i$ имеем $L\tilde{\partial}_i = \partial_i + \dfrac{\delta_{i3}}{\kappa}\partial_{\xi}$, где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial q_i}$; $\partial_{\xi} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}$ — соответствующие операторы дифференцирования по макроскопическим и локальной координатам. Координаты q_3 и ξ, как обычно в МАО, будем предполагать независимыми, а все функции, входящие в систему (2), не зависящими от q_3. Решение задачи (2) будем проводить на основе асимптотического разложения по степеням малого параметра κ:

$$u_i(q_I, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n u_i^{(n)}(q_I, \xi). \tag{4}$$

Здесь и далее индексы $I, J, K, L, \ldots \in \{1, 2\}$. Подставляя это разложение в соотношение Коши в системе (2), получим

$$2\varepsilon_{ij} = \partial_j u_i^{(0)} + \frac{\delta_{j3}}{\kappa}\partial_{\xi} u_i^{(0)} + \ldots + \partial_i u_j^{(0)} + \frac{\delta_{i3}}{\kappa}\partial_{\xi} u_j^{(0)} + \ldots \tag{5}$$

Согласно общей схеме МАО, коэффициенты при отрицательных степенях малого параметра должны обращаться в нуль, т. е.

$$\partial_{\xi} u_i^{(0)} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, начальный член в асимптотическом разложении вектора перемещений не зависит от локальной координаты ξ. Кроме того, из соотношения (5) получаем асимптотическое разложение компонент тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \varepsilon_{ij}^{(n)}; \quad 2\varepsilon_{ij}^{(n)} = \partial_j u_i^{(n)} + \partial_i u_j^{(n)} + \delta_{j3}\partial_{\xi} u_i^{(n+1)} + \delta_{i3}\partial_{\xi} u_j^{(n+1)}. \tag{7}$$

Далее, формально считая построенным асимптотическое разложение для компонент тензора деформаций ползучести $\varepsilon_{ij}^{c} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \kappa^n \varepsilon_{ij}^{c(n)}$ и подставив его и разложение (7) в определяющее соотношение в системе (2), получим формулу для разложения компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \sigma_{ij}^{(n)}, \ \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{(n)} - \varepsilon_{kl}^{c(n)} - \varepsilon_{kl}^{\theta}\delta_{n0}). \tag{8}$$

Подставив теперь найденные асимптотические разложения в определяющее соотношение для тензора деформаций ползучести, получим

$$\sum_{s=0}^{n-1} \kappa^s \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(s)} + \kappa^n \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} + \kappa^{n+1} O(1) = \varphi_{ij}(\kappa^n);$$

$$\varphi_{ij}(v) = F_{ij}\left(\tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} + \kappa\left(\varepsilon_{kl}^{c(n)} + \kappa O(1)\right); \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)} + \kappa\left(\sigma_{pq}^{(n)} + \kappa O(1)\right)\right); \tag{9}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)} = \sum_{s=0}^{n} \kappa^s \varepsilon_{kl}^{c(s)}; \ \tilde{\sigma}_{kl}^{(n)} = \sum_{s=0}^{n} \kappa^s \sigma_{kl}^{(s)}.$$

Здесь функция $\varphi_{ij}(v)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нуля, а символами $O(1)$ обозначены остаточные члены в асимптотических разложениях. Применяя для $\varphi_{ij}(v)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, будем иметь

$$\varphi_{ij}(\kappa^n) = \varphi_{ij}(0) + \left(\kappa^n \varepsilon_{kl}^{c(n)} + \kappa^{n+1} O(1)\right) \left.\frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^{c}}\right|_{\substack{\varepsilon_{kl}^{c} = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} +$$

$$+ \left(\kappa^n \sigma_{pq}^{(n)} + \kappa^{n+1} O(1)\right) \left.\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma_{pq}}\right|_{\substack{\varepsilon_{kl}^{c} = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} + 1/2 \varphi_{ij}''(\zeta_n) \kappa^{2n}.$$

Здесь $0 < \zeta_n < \kappa^n$ — некоторая постоянная. Из этого соотношения имеем

$$\varphi_{ij}(\kappa^n) - S_{ij}^{(n)} = O(\kappa^{n+1}), \tag{10}$$

$$S_{ij}^{(n)}(\varepsilon_{kl}^{c(n)}, \sigma_{pq}^{(n)}) = \begin{cases} F_{ij}(\varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)}), \ n = 0; \\ F_{ij}\Big|_{\substack{\varepsilon_{kl}^{c} = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} + \kappa^n \varepsilon_{kl}^{c(n)} \left.\frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^{c}}\right|_{\substack{\varepsilon_{kl}^{c} = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} + \end{cases}$$

$$+\kappa^n \sigma_{pq}^{(n)} \left.\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma_{pq}}\right|_{\substack{\varepsilon_{kl}^c=\tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq}=\tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}}, \; n > 0.$$

Далее введем функции $F_{ij}^{(n)}$ в следующем виде:

$$F_{ij}^{(n)} = \begin{cases} S_{ij}^{(0)}, \; n = 0; \\ \kappa^{-n} S_{ij}^{(n)} - \kappa^{-n+1} S_{ij}^{(n-1)}, \; n > 0. \end{cases}$$

Тогда из (10) имеем, что асимптотическое разложение правой части в формуле (9) можно записать так:

$$\varphi_{ij}(\kappa^n) = \sum_{s=0}^{\infty} \kappa^s F_{ij}^{(s)}.$$

Подставляя это разложение в (9) и приравнивая коэффициенты при κ^n, получим

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} = F_{ij}^{(n)}(\varepsilon_{kl}^{c(n)}, \sigma_{pq}^{(n)}). \tag{11}$$

Таким образом, для членов асимптотического разложения компонент тензора деформаций ползучести имеем систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида (11).

Далее, подставив асимптотические разложения в силовое граничное, начальное и контактные условия в системе (2) и учитывая допущение (3), будем иметь

$$\begin{gathered} \left[\sigma_{ij}^{(n)} n_j\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \; \left[u_i^{(n)}\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \\ \left.\varepsilon_{ij}^{c(n)}\right|_{\tau=0} = 0; \; \left.\sigma_{i3}^{(n)}\right|_{\Sigma_\sigma^\pm} = -p_\pm^0 \delta_{i3} \delta_{n3}. \end{gathered} \tag{12}$$

Подставим теперь асимптотическое разложение (8) в уравнение равновесия системы (2), получим

$$\partial_J \sigma_{iJ}^{(0)} + \frac{1}{\kappa} \partial_\xi \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa \left(\partial_J \sigma_{iJ}^{(1)} + \frac{1}{\kappa} \partial_\xi \sigma_{i3}^{(1)} \right) + \ldots = 0.$$

Тогда, вводя коэффициенты $h_i^{(n)} = \partial_J \sigma_{iJ}^{(n)} + \partial_\xi \sigma_{i3}^{(n+1)}$, не зависящие от локальной координаты ξ, из последнего соотношения имеем

$$\partial_\xi \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \; \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n h_i^{(n)} = 0. \tag{13}$$

Объединяя полученные соотношения, приходим к локальным задачам для нулевого приближения:

$$\begin{cases} \partial_\xi \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \\ \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{(0)} - \varepsilon_{kl}^{c(0)} - \varepsilon_{kl}^{\theta}); \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)} = F_{ij}^{(0)}(\varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)}); \\ 2\varepsilon_{ij}^{(0)} = \partial_j u_i^{(0)} + \partial_i u_j^{(0)} + \delta_{j3}\partial_\xi u_i^{(1)} + \delta_{i3}\partial_\xi u_j^{(1)}; \\ \left[\sigma_{ij}^{(0)} n_j\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \ \left[u_i^{(1)}\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \\ \varepsilon_{ij}^{c(0)}\Big|_{\tau=0} = 0; \\ \sigma_{i3}^{(0)}\Big|_{\Sigma_\sigma^\pm} = -p_\pm^0 \delta_{i3}\delta_{m0}; \ < u_i^{(1)} > = 0 \end{cases} \tag{14}$$

и для последующих приближений ($n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} h_i^{(n-1)} = \partial_J \sigma_{iJ}^{(n-1)} + \partial_\xi \sigma_{i3}^{(n)}; \\ \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{(n)} - \varepsilon_{kl}^{c(n)}); \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} = F_{ij}^{(n)}(\varepsilon_{kl}^{c(n)}, \sigma_{pq}^{(n)}); \\ 2\varepsilon_{ij}^{(n)} = \partial_j u_i^{(n)} + \partial_i u_j^{(n)} + \delta_{j3}\partial_\xi u_i^{(n+1)} + \delta_{i3}\partial_\xi u_j^{(n+1)}; \\ \left[\sigma_{ij}^{(n)} n_j\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \ \left[u_i^{(n)}\right]_{\Sigma_c^k} = 0; \\ \varepsilon_{ij}^{c(n)}\Big|_{\tau=0} = 0; \\ \sigma_{i3}^{(n)}\Big|_{\Sigma_\sigma^\pm} = -p_\pm^0 \delta_{i3}\delta_{n3}; \ < u_i^{(n+1)} > = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь к локальным задачам присовокуплены традиционные для МАО условия однозначной разрешимости локальных задач $< u_i^{(n)} > = 0$ (условия нормировки), где $< f(q_I, \xi) > = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(q_I, \xi) d\xi$ — функционал осреднения по толщине пластины. Локальные задачи параметризированы функциями $u_i^{(0)}$, для определения которых далее будет сформулирована осредненная задача.

Решение локальных задач. Локальные задачи (14), (15) являются одномерными по переменной ξ, но осложнены входящими в них линейными неоднородными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами (11). Вследствие этого в дальнейших выкладках будем условно предполагать компоненты $\varepsilon_{ij}^{c(n)}$ известными величинами, а при численном расчете для решения системы (11) может быть применена одна из разностных схем (например, схема типа Рунге − Кутты).

Определяющее соотношение для локальных задач (8) может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{ijk3}\varepsilon_{k3}^{(n)} + C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{c(n)} + \varepsilon_{kl}^{\theta}\delta_{n0}). \tag{16}$$

Предполагая обратимость матрицы C_{i3j3}, введем обратную для нее матрицу $C_{i3j3}^{-1}\left(C_{i3s3}^{-1}C_{s3j3} = C_{i3s3}C_{s3j3}^{-1} = \delta_{ij}\right)$. Тогда из формулы (16) имеем

$$\varepsilon_{k3}^{(n)} = C_{k3s3}^{-1}\left[\sigma_{s3}^{(n)} - C_{s3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{s3pq}(\varepsilon_{pq}^{c(n)} + \varepsilon_{pq}^{\theta}\delta_{n0}))\right]. \tag{17}$$

Из этого соотношения и из формулы (16) получаем

$$\begin{gathered} \sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}\sigma_{s3}^{(n)} + \tilde{C}_{IJKL}(\varepsilon_{KL}^{(n)} - \varepsilon_{KL}^{c(n)} - \varepsilon_{KL}^{\theta}\delta_{n0}); \\ \tilde{C}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}C_{s3KL}. \end{gathered} \tag{18}$$

Найдем выражения для вектора перемещений. Для компоненты $u_3^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, из выражения (7) с учетом условия нормировки имеем следующую рекуррентную формулу:

$$u_3^{(n+1)} = \int_{-1/2}^{\xi} \varepsilon_{33}^{(n)}d\xi - < \int_{-1/2}^{\xi} \varepsilon_{33}^{(n)}d\xi > = \left\langle \varepsilon_{33}^{(n)} \right\rangle_{\xi}. \tag{19}$$

Здесь для сокращения записи введен оператор $\left\langle f(q_I,\xi)\right\rangle_{\xi} =$ $= \int_{-1/2}^{\xi} f(q_I,\xi)d\xi - < \int_{-1/2}^{\xi} f(q_I,\xi)d\xi >$. Аналогично из (7) для остальных компонент вектора перемещений $u_I^{(n+1)}$ получим

$$u_I^{(n+1)} = \left\langle 2\varepsilon_{I3}^{(n)} - \partial_I u_3^{(n)} \right\rangle_{\xi}. \tag{20}$$

Далее из (20) и (7) имеем следующее рекуррентное соотношение, связывающее компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$ с компонентами тензора деформаций и вектора перемещений предыдущих членов асимптотического разложения:

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\partial_J u_I^{(n+1)} + \partial_I u_J^{(n+1)}\right) = \left\langle \partial_J \varepsilon_{I3}^{(n)} + \eta_{IJ}^{(n)} + \partial_I \varepsilon_{J3}^{(n)} \right\rangle_{\xi}.$$

Здесь введены коэффициенты $\eta_{IJ}^{(n)} = -\partial_{IJ}^2 u_3^{(n)}$, а $\partial_{IJ}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial q_J \partial q_I}$ — соответствующий оператор дифференцирования. Подставляя в это соотношение формулу (17), будем иметь

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}=\left\langle \Psi_{IJsK}\partial_K\sigma_{s3}^{(n)}+\Phi_{IJKLM}\partial_M\varepsilon_{KL}^{(n)}+\eta_{IJ}^{(n)}\right\rangle_{\xi}+\Phi_{IJ}^{c(n)}+\Phi_{IJ}^{\theta(n)},$$

$$\Psi_{IJsK}=C_{I3s3}^{-1}\delta_{KJ}+C_{J3s3}^{-1}\delta_{KI};\ \Phi_{IJKLM}=-C_{s3KL}\left(C_{I3s3}^{-1}\delta_{MJ}+C_{J3s3}^{-1}\delta_{MI}\right);\quad(21)$$

$$\Phi_{IJ}^{c(n)}=\left\langle C_{s3pq}\left(C_{I3s3}^{-1}\partial_J\varepsilon_{pq}^{c(n)}+C_{J3s3}^{-1}\partial_I\varepsilon_{pq}^{c(n)}\right)\right\rangle_{\xi};$$

$$\Phi_{IJ}^{\theta(n)}=\delta_{n0}\left\langle C_{s3pq}\left(C_{I3s3}^{-1}\partial_J\varepsilon_{pq}^{\theta}+C_{J3s3}^{-1}\partial_I\varepsilon_{pq}^{\theta}\right)\right\rangle_{\xi}.$$

Из уравнения равновесия локальной задачи (14) следует, что компоненты $\sigma_{i3}^{(0)}$ не зависят от локальной переменной ξ. Учитывая силовые граничные условия для системы (14) и допущение (3), приходим к выводу, что уравнение равновесия локальной задачи начального приближения имеет следующее решение:

$$\sigma_{i3}^{(0)}=0.\qquad(22)$$

Для локальной задачи (15) решение уравнения равновесия с учётом силового граничного условия на внутренней поверхности Σ_{σ}^{-} имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(n+1)}=-p_{-}^{0}\delta_{i3}\delta_{3(n+1)}-\int_{-1/2}^{\xi}\partial_J\sigma_{iJ}^{(n)}d\xi+(\xi+1/2)h_i^{(n)},\ n\in\mathbb{Z}_{+}.$$

Из граничного условия на внешней поверхности Σ_{σ}^{+} имеем

$$\sigma_{i3}^{(n+1)}=-\left(p_{-}^{0}+\Delta p^{0}(\xi+1/2)\right)\delta_{i3}\delta_{3(n+1)}-\left\{\partial_J\sigma_{iJ}^{(n)}\right\}_{\xi};\qquad(23)$$

$$h_i^{(n)}=-\Delta p^{0}\delta_{i3}\delta_{3(n+1)}+<\partial_J\sigma_{iJ}^{(n)}>.\qquad(24)$$

Здесь для краткости записи введен оператор $\left\{f(q_I,\xi)\right\}_{\xi}=$ $=\int_{-1/2}^{\xi}\left(f(q_I,\xi)-<f(q_I,\xi)>\right)d\xi$. Из формул (23) и (18) вытекают рекуррентные соотношения для вычисления членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений $\sigma_{i3}^{(n+1)}$:

$$\sigma_{I3}^{(n+1)}=-\left\{C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}\partial_J\sigma_{s3}^{(n)}\right\}_{\xi}-\left\{\tilde{C}_{IJKL}\partial_J\varepsilon_{KL}^{(n)}\right\}_{\xi}+$$
$$+\left\{\tilde{C}_{IJKL}\partial_J\varepsilon_{KL}^{c(n)}\right\}_{\xi}+\left\{\tilde{C}_{IJKL}\partial_J\varepsilon_{KL}^{\theta}\right\}_{\xi}\delta_{n0};\qquad(25)$$

$$\sigma_{33}^{(n+1)}=-\left(p_{-}^{0}+\Delta p^{0}(\xi+1/2)\right)\delta_{3(n+1)}-\left\{\partial_J\sigma_{3J}^{(n)}\right\}_{\xi}.\qquad(26)$$

Найдем аналогичное выражение для $\eta_{IJ}^{(n+1)}$. Подставляя (17) в (19), получим

$$\eta_{IJ}^{(n+1)} = -\left\langle C_{33s3}^{-1}\partial_{IJ}^{2}\sigma_{s3}^{(n)}\right\rangle_{\xi} + \left\langle C_{33s3}^{-1}C_{s3KL}\partial_{IJ}^{2}\varepsilon_{KL}^{(n)}\right\rangle_{\xi} -$$
$$-\left\langle C_{33s3}^{-1}C_{s3pq}\partial_{IJ}^{2}\varepsilon_{pq}^{c(n)}\right\rangle_{\xi} - \left\langle C_{33s3}^{-1}C_{s3pq}\partial_{IJ}^{2}\varepsilon_{pq}^{\theta}\right\rangle_{\xi}\delta_{n0}. \qquad (27)$$

Соотношение (27) совместно с (25), (26) и (21) позволяет вычислять компоненты $\eta_{IJ}^{(n+1)}$, $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$, $\sigma_{i3}^{(n+1)}$ по предыдущим членам асимптотических разложений этих же компонентов. Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{i3}^{(n)}$, напряжений $\sigma_{IJ}^{(n)}$ и вектора перемещений $u_{i}^{(n)}$ вычисляют по формулам (17)−(20). Полученные соотношения позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть функции* $\eta_{IJ}^{(0)}$ *являются* N *раз, а функции* $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ — $(N+1)$ *раз дифференцируемы. Тогда* $\forall n \in \mathbb{Z}_{N+1}$, *имеют место следующие соотношения:*

$$\varepsilon_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n-1}}^{n-1}\eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKL\mathbf{M}_{n}}^{\varepsilon\varepsilon(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n}}^{n}\varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\varepsilon(n)} + \Xi_{IJ}^{\varepsilon c(n)} + \Xi_{IJ}^{\varepsilon\theta(n)}; \quad (28)$$

$$\sigma_{I3}^{(n)} = C_{IKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n-1}}^{n-1}\eta_{KL}^{(0)} + C_{IKL\mathbf{M}_{n}}^{\sigma S\varepsilon(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n}}^{n}\varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{I}^{\sigma S(n)} + \Xi_{I}^{\sigma Sc(n)} + \Xi_{I}^{\sigma S\theta(n)}; \quad (29)$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = C_{KL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n-1}}^{n-1}\eta_{KL}^{(0)} + C_{KL\mathbf{M}_{n}}^{\sigma T\varepsilon(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n}}^{n}\varepsilon_{KL}^{(0)} + P^{\sigma T(n)} + \Xi^{\sigma Tc(n)} + \Xi^{\sigma T\theta(n)}; \quad (30)$$

$$\eta_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL\mathbf{M}_{n}}^{\eta\eta(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n}}^{n}\eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKL\mathbf{M}_{n+1}}^{\eta\varepsilon(n)}\partial_{\mathbf{M}_{n+1}}^{n+1}\varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\eta(n)} + \Xi_{IJ}^{\eta c(n)} + \Xi_{IJ}^{\eta\theta(n)}. \quad (31)$$

Здесь $\mathbf{M}_n = \left(M_1,\ldots,M_n\right)$ — *мультииндекс;* $\partial_{\mathbf{M}_n}^{n} = \dfrac{\partial^n}{\partial q_{M_n}\ldots\partial q_{M_1}}$ — *соответствующие дифференциальные операторы. Коэффициенты* $C^{(n)}$ *являются функциями только локальной координаты* ξ. *Для нулевых приближений функции* $C^{(0)}$, $P^{(0)}$ и $\Xi^{(0)}$ *имеют следующий вид:*

$$\begin{gathered}
C_{IJKL}^{\varepsilon\eta(0)} = C_{IKL}^{\sigma S\eta(0)} = C_{IKL}^{\sigma S\varepsilon(0)} = C_{KL}^{\sigma T\eta(0)} = C_{KL}^{\sigma T\varepsilon(0)} = C_{IJKLM}^{\eta\varepsilon(0)} = 0;\\
P_{IJ}^{\varepsilon(0)} = P_{I}^{\sigma S(0)} = P^{\sigma T(0)} = P_{IJ}^{\eta(0)} = 0;\\
\Xi_{IJ}^{\varepsilon c(0)} = \Xi_{IJ}^{\varepsilon\theta(0)} = \Xi_{IJ}^{\eta c(0)} = \Xi_{IJ}^{\eta\theta(0)} = \Xi_{I}^{\sigma Sc(0)} = \Xi_{I}^{\sigma S\theta(0)} = \Xi^{\sigma Tc(0)} = \Xi^{\sigma T\theta(0)} = 0;\\
C_{IJKL}^{\eta\eta(0)} = C_{IJKL}^{\varepsilon\varepsilon(0)} = \Delta_{IJKL} = 1/2\left(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}\right).
\end{gathered} \qquad (32)$$

З а м е ч а н и е. Функции $P^{(n)}$ в соотношениях (28)–(31) учитывают зависимость решений локальных задач от силовых граничных условий, функции $\Xi^{c(n)}$, $\Xi^{\theta(n)}$ учитывают влияние ползучести и термонапряжений соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по параметру N. Для случая $N=0$ справедливость (29), (30) следует из (22), а остальные соотношения удовлетворяются тождественно. Пусть соотношения (28)–(31) справедливы и для некоторого $N=n$. Покажем их справедливость для $N=n+1$. Рассмотрим сначала формулу (28). Подставляя в формулу (21) соотношения (28)–(31), действительно приходим к виду (28), причем рекуррентные соотношения для входящих в нее коэффициентов имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
C^{\varepsilon\eta(n+1)}_{IJKL\mathbf{M}_n} &= \Big\langle \Psi_{IJSM_n} C^{\sigma S\eta(n)}_{SKL\mathbf{M}_{n-1}} + \Psi_{IJ3M_n} C^{\sigma T\eta(n)}_{KL\mathbf{M}_{n-1}} + \\
&\quad + \Phi_{IJPQM_n} C^{\varepsilon\eta(n)}_{PQKL\mathbf{M}_{n-1}} + C^{\eta\eta(n)}_{IJKL\mathbf{M}_n} \Big\rangle_\xi ;\\
C^{\varepsilon\varepsilon(n+1)}_{IJKL\mathbf{M}_{n+1}} &= \Big\langle \Psi_{IJSM_{n+1}} C^{\sigma S\varepsilon(n)}_{SKL\mathbf{M}_n} + \Psi_{IJ3M_{n+1}} C^{\sigma T\varepsilon(n)}_{KL\mathbf{M}_n} + \\
&\quad + \Phi_{IJPQM_{n+1}} C^{\varepsilon\varepsilon(n)}_{PQKL\mathbf{M}_n} + C^{\eta\varepsilon(n)}_{IJKL\mathbf{M}_{n+1}} \Big\rangle_\xi ;\\
P^{\varepsilon(n+1)}_{IJ} &= \Big\langle \Psi_{IJSK} \partial_K P^{\sigma S(n)}_S + \Psi_{IJ3K} \partial_K P^{\sigma T(n)} + \\
&\quad + \Phi_{IJKLM} \partial_M P^{\varepsilon(n)}_{KL} + P^{\eta(n)}_{IJ} \Big\rangle_\xi ;\\
\Xi^{\varepsilon c(n+1)}_{IJ} &= \Big\langle \Psi_{IJSK} \partial_K \Xi^{\sigma Sc(n)}_S + \Psi_{IJ3K} \partial_K \Xi^{\sigma Tc(n)} + \\
&\quad + \Phi_{IJKLM} \partial_M \Xi^{\varepsilon c(n)}_{KL} + \Xi^{\eta c(n)}_{IJ} \Big\rangle_\xi + \Phi^{c(n)}_{IJ};\\
\Xi^{\varepsilon\theta(n+1)}_{IJ} &= \Big\langle \Psi_{IJSK} \partial_K \Xi^{\sigma S\theta(n)}_S + \Psi_{IJ3K} \partial_K \Xi^{\sigma T\theta(n)} + \\
&\quad + \Phi_{IJKLM} \partial_M \Xi^{\varepsilon\theta(n)}_{KL} + \Xi^{\eta\theta(n)}_{IJ} \Big\rangle_\xi + \Phi^{\theta(n)}_{IJ}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Аналогично для формулы (29), подставляя (28)–(30) в (25), получим

$$
\begin{aligned}
C^{\sigma S\eta(n+1)}_{IKL\mathbf{M}_n} &= -\Big\{ C_{IM_nk3} \Big(C^{-1}_{k3S3} C^{\sigma S\eta(n)}_{SKL\mathbf{M}_{n-1}} + C^{-1}_{k333} C^{\sigma T\eta(n)}_{KL\mathbf{M}_{n-1}} \Big) + \\
&\quad + \tilde{C}_{IM_nPQ} C^{\varepsilon\eta(n)}_{PQKL\mathbf{M}_{n-1}} \Big\}_\xi ;\\
C^{\sigma S\varepsilon(n+1)}_{IKL\mathbf{M}_{n+1}} &= -\Big\{ C_{IM_{n+1}k3} \Big(C^{-1}_{k3S3} C^{\sigma S\varepsilon(n)}_{SKL\mathbf{M}_n} + C^{-1}_{k333} C^{\sigma T\varepsilon(n)}_{KL\mathbf{M}_n} \Big) + \\
&\quad + \tilde{C}_{IM_{n+1}PQ} C^{\varepsilon\varepsilon(n)}_{PQKL\mathbf{M}_n} \Big\}_\xi ;\\
P^{\sigma S(n+1)}_I &= -\Big\{ C_{IJk3} \Big(C^{-1}_{k3S3} \partial_J P^{\sigma S(n)}_S + C^{-1}_{k333} \partial_J P^{\sigma T(n)} \Big) + \\
&\quad + \tilde{C}_{IJKL} \partial_J P^{\varepsilon(n)}_{KL} \Big\}_\xi ;
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$\Xi_I^{\sigma Sc(n)} = -\left\{C_{IJk3}\left(C_{k3S3}^{-1}\partial_J \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + C_{k333}^{-1}\partial_J \Xi^{\sigma Tc(n)}\right) + \tilde{C}_{IJKL}\partial_J \Xi_{KL}^{\varepsilon c(n)}\right\}_\xi + \\ + \left\{\tilde{C}_{IJKL}\partial_J \varepsilon_{KL}^{c(n)}\right\}_\xi ;$$

$$\Xi_I^{\sigma S\theta(n)} = -\left\{C_{IJk3}\left(C_{k3S3}^{-1}\partial_J \Xi_S^{\sigma S\theta(n)} + C_{k333}^{-1}\partial_J \Xi^{\sigma T\theta(n)}\right) + \tilde{C}_{IJKL}\partial_J \Xi_{KL}^{\varepsilon\theta(n)}\right\}_\xi + \\ + \left\{\tilde{C}_{IJKL}\partial_J \varepsilon_{KL}^{\theta}\right\}_\xi \delta_{n0}.$$

Далее для (30), подставляя (29) в (26), будем иметь

$$C_{KL\mathbf{M}_n}^{\sigma T\eta(n+1)} = -\left\{C_{M_n KL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)}\right\}_\xi, C_{KL\mathbf{M}_{n+1}}^{\sigma T\varepsilon(n+1)} = -\left\{C_{M_{n+1}KL\mathbf{M}_n}^{\sigma S\varepsilon(n)}\right\}_\xi ;$$
$$P^{\sigma T(n+1)} = -\left(p_-^0 + \Delta p^0(\xi + 1/2)\right)\delta_{3(n+1)} - \left\{\partial_M P_M^{\sigma S(n)}\right\}_\xi ; \quad (35)$$
$$\Xi^{\sigma Tc(n+1)} = -\left\{\partial_M \Xi_M^{\sigma Sc(n)}\right\}_\xi, \Xi^{\sigma T\theta(n+1)} = -\left\{\partial_M \Xi_M^{\sigma S\theta(n)}\right\}_\xi .$$

Для (31), подставляя (28)−(30) в формулу (27), получим

$$C_{IJKL\mathbf{M}_{n+1}}^{\eta\eta(n+1)} = -\Delta_{IJM_nM_{n+1}}\left\langle C_{33S3}^{-1}C_{SKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} + C_{3333}^{-1}C_{KL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} - \\ - C_{33s3}^{-1}C_{s3PQ}C_{PQKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)}\right\rangle_\xi ;$$

$$C_{IJKL\mathbf{M}_{n+2}}^{\eta\varepsilon(n+1)} = -\Delta_{IJM_{n+1}M_{n+2}}\left\langle C_{33S3}^{-1}C_{SKL\mathbf{M}_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} + C_{3333}^{-1}C_{KL\mathbf{M}_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} - \\ - C_{33s3}^{-1}C_{s3PQ}C_{PQKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)}\right\rangle_\xi ;$$

$$P_{IJ}^{\eta(n+1)} = -\left\langle C_{33S3}^{-1}\partial_{IJ}^2 P_S^{\sigma S(n)} + C_{3333}^{-1}\partial_{IJ}^2 P^{\sigma T(n)} - C_{33s3}^{-1}C_{s3PQ}\partial_{IJ}^2 P_{PQ}^{\varepsilon(n)}\right\rangle_\xi ; \quad (36)$$

$$\Xi_{IJ}^{\eta c(n+1)} = -\left\langle C_{33S3}^{-1}\partial_{IJ}^2 \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + C_{3333}^{-1}\partial_{IJ}^2 \Xi^{\sigma Tc(n)} - \\ - C_{33s3}^{-1}\left(C_{s3PQ}\partial_{IJ}^2 \Xi_{PQ}^{\varepsilon c(n)} + C_{s3pq}\partial_{IJ}^2 \varepsilon_{pq}^{c(n)}\right)\right\rangle_\xi ;$$

$$\Xi_{IJ}^{\eta\theta(n+1)} = -\left\langle C_{33S3}^{-1}\partial_{IJ}^2 \Xi_S^{\sigma S\theta(n)} + C_{3333}^{-1}\partial_{IJ}^2 \Xi^{\sigma T\theta(n)} - \\ - C_{33s3}^{-1}\left(C_{s3PQ}\partial_{IJ}^2 \Xi_{PQ}^{\varepsilon\theta(n)} + C_{s3pq}\partial_{IJ}^2 \varepsilon_{pq}^{\theta}\delta_{n0}\right)\right\rangle_\xi .$$

Теорема 1 доказана.

Из доказанной теоремы и соотношений (17), (18) вытекают аналогичные по форме представления для компонент $\sigma_{IJ}^{(n)}$, $\varepsilon_{i3}^{(n)}$ асимптотических разложений тензоров напряжений и деформаций:

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma\eta(n)} \partial_{\mathbf{M}_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKL\mathbf{M}_n}^{\sigma\varepsilon(n)} \partial_{\mathbf{M}_n}^{n} \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\sigma(n)} + \Xi_{IJ}^{\sigma c(n)} + \Xi_{IJ}^{\sigma\theta(n)}; \quad (37)$$

$$\varepsilon_{i3}^{(n)} = C_{iKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon S\eta(n)} \partial_{\mathbf{M}_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{iKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon S\varepsilon(n)} \partial_{\mathbf{M}_n}^{n} \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{i}^{\varepsilon S(n)} + \Xi_{i}^{\varepsilon Sc(n)} + \Xi_{i}^{\varepsilon S\theta(n)}, \quad (38)$$

где соответствующие коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
&C_{IJKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma\eta(n)} = C_{IJk3} C_{k3S3}^{-1} C_{SKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} + C_{IJk3} C_{k333}^{-1} C_{KL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} + \tilde{C}_{IJPQ} C_{PQKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)};\\
&C_{IJKL\mathbf{M}_n}^{\sigma\varepsilon(n)} = C_{IJk3} C_{k3S3}^{-1} C_{SKL\mathbf{M}_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} + C_{IJk3} C_{k333}^{-1} C_{KL\mathbf{M}_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} + \tilde{C}_{IJPQ} C_{PQKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)};\\
&P_{IJ}^{\sigma(n)} = C_{IJk3} C_{k3S3}^{-1} P_S^{\sigma S(n)} + C_{IJk3} C_{k333}^{-1} P^{\sigma T(n)} + \tilde{C}_{IJPQ} P_{PQ}^{\varepsilon(n)};\\
&\Xi_{IJ}^{\sigma c(n)} = C_{IJk3} C_{k3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + C_{IJk3} C_{k333}^{-1} \Xi^{\sigma Tc(n)} + \tilde{C}_{IJPQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon c(n)} - \tilde{C}_{IJPQ} \varepsilon_{PQ}^{c(n)};\\
&\Xi_{IJ}^{\sigma\theta(n)} = C_{IJk3} C_{k3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma S\theta(n)} + C_{IJk3} C_{k333}^{-1} \Xi^{\sigma T\theta(n)} + \tilde{C}_{IJPQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon\theta(n)} - \tilde{C}_{IJPQ} \varepsilon_{PQ}^{\theta} \delta_{n0},
\end{aligned} \quad (39)$$

а также

$$\begin{aligned}
&C_{iKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon S\eta(n)} = C_{i3S3}^{-1} C_{SKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} + C_{i333}^{-1} C_{KL\mathbf{M}_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} - C_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKL\mathbf{M}_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)};\\
&C_{iKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon S\varepsilon(n)} = C_{i3S3}^{-1} C_{SKL\mathbf{M}_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} + C_{i333}^{-1} C_{KL\mathbf{M}_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} - C_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)};\\
&P_i^{\varepsilon S(n)} = C_{i3S3}^{-1} P_S^{\sigma S(n)} + C_{i333}^{-1} P^{\sigma T(n)} - C_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} P_{PQ}^{\varepsilon(n)};\\
&\Xi_i^{\varepsilon Sc(n)} = C_{i3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + C_{i333}^{-1} \Xi^{\sigma Tc(n)} - C_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon c(n)} + C_{i3s3}^{-1} C_{s3pq} \varepsilon_{pq}^{c(n)};\\
&\Xi_i^{\varepsilon S\theta(n)} = C_{i3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma S\theta(n)} + C_{i333}^{-1} \Xi^{\sigma T\theta(n)} - C_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon\theta(n)} + C_{i3s3}^{-1} C_{s3pq} \varepsilon_{pq}^{\theta} \delta_{n0}.
\end{aligned} \quad (40)$$

Кроме того, из теоремы 1 вытекает ***следствие***: пусть функции $p_{\pm}^{0}$ являются постоянными. Тогда для функций $P^{(n)}$ имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
&P_{IJ}^{\varepsilon(n)} = P_I^{\sigma S(n)} = P_{IJ}^{\eta(0)} = 0;\\
&P^{\sigma T(n)} = -\left(p_-^0 + \Delta p^0 (\xi + 1/2)\right)\delta_{3n};\\
&P_{IJ}^{\sigma(n)} = -C_{IJk3} C_{k333}^{-1} \left(p_-^0 + \Delta p^0 (\xi + 1/2)\right)\delta_{3n};\\
&P_i^{\varepsilon S(n)} = -C_{i333}^{-1} \left(p_-^0 + \Delta p^0 (\xi + 1/2)\right)\delta_{3n}.
\end{aligned} \quad (41)$$

Доказательство получаем по индукции, используя формулы (32)–(36) и (39), (40).

Из теоремы 1 также вытекает теорема для пластины с четным тензором модулей упругости.

Теорема 2. *Пусть тензор модулей упругости пластины является четной тензорнозначной функцией локальной переменной* ξ (*т. е.* ${}^4\mathbf{C}(-\xi) = {}^4\mathbf{C}(\xi)$). *Тогда* $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, *коэффициенты* $C^{(2n)}$ *в соотношениях (28)–(31) и (37), (38) также являются четными функциями, а коэффициенты* $C^{(2n+1)}$ *являются нечетными функциями локальной переменной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и для теоремы 1, проведем доказательство на основе метода математической индукции. Для $N=0$ четность $C^{(0)}$ следует из формул (32). Пусть утверждение справедливо и для некоторого $N=n$. Для доказательства теоремы для случая $N=n+1$ следует заметить, что операторы $\langle\cdot\rangle_\xi$ и $\{\cdot\}_\xi$ меняют чётность функции и в рекуррентные соотношения (33)–(36), кроме коэффициентов $C^{(n)}$, входят только четные функции Ψ_{IJKs}, Φ_{IJKLM}, $\tilde{C}_{IJKL}$, C^{-1}_{i3j3}, C_{ijkl}. Теорема 2 доказана.

Осредненные уравнения равновесия. Подставив формулу (24) в асимптотическое разложение (13), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n <\partial_J\sigma_{iJ}^{(n)}> = \Delta\overline{p}\delta_{i3}, \tag{42}$$

где $\Delta\overline{p}=\kappa^2\Delta p^0$. Введя компоненты усилий $T_{IJ}=\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n <\sigma_{IJ}^{(n)}>$ и перерезывающих сил $Q_I=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n <\sigma_{I3}^{(n)}>$, соотношение (39) можно записать в виде

$$\partial_J T_{IJ}=0; \tag{43}$$

$$\partial_J Q_J=\Delta\overline{p}. \tag{44}$$

Далее, умножив уравнение равновесия в локальной задаче (15) на ξ и проинтегрировав по толщине пластины с учетом соотношения $\left\langle\xi\partial_\xi\sigma_{I3}^{(n)}\right\rangle=-\left\langle\sigma_{I3}^{(n)}\right\rangle$ (которое получается интегрированием по частям с учетом силовых граничных условий задачи (15)), будем иметь $\partial_J\left\langle\xi\sigma_{IJ}^{(n-1)}\right\rangle=\left\langle\sigma_{3I}^{(n)}\right\rangle$.

Тогда, вводя компоненты моментов $M_{IJ}=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\left\langle\xi\sigma_{IJ}^{(n-1)}\right\rangle$, из последнего соотношения $\partial_J M_{IJ}=Q_I$. Дифференцируя это соотношение по q_I и суммируя полученные соотношения, из (44) получим

$$\partial^2_{IJ}M_{IJ}=\Delta\overline{p}. \tag{45}$$

Уравнения (43)−(45) составляют осредненные уравнения равновесия пластины.

Осредненные определяющие соотношения. Ограничиваясь в асимптотических разложениях для усилий и моментов главными членами и используя соотношения (32)–(36) и (39), приходим к следующим выражениям:

$$T_{IJ} = C^{T\varepsilon(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + C^{T\eta(1)}_{IJKL}\eta^{(0)}_{KL} + C^{T\varepsilon(1)}_{IJKLM}\partial_M\varepsilon^{(0)}_{KL} + \Xi^{Tc}_{IJ} + \Xi^{T\theta}_{IJ}; \qquad (46)$$

$$M_{IJ} = C^{M\varepsilon(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + C^{M\eta(1)}_{IJKL}\eta^{(0)}_{KL} + C^{M\varepsilon(1)}_{IJKLM}\partial_M\varepsilon^{(0)}_{KL} + \Xi^{Mc}_{IJ} + \Xi^{M\theta}_{IJ}. \qquad (47)$$

Здесь введены следующие функции, не зависящие от локальной координаты ξ:

$$C^{T\varepsilon(0)}_{IJKL} = \left\langle \tilde{C}_{IJKL} \right\rangle; C^{T\eta(1)}_{IJKL} = \kappa\left\langle \xi\tilde{C}_{IJKL} \right\rangle;$$

$$C^{T\varepsilon(1)}_{IJKLM} = \kappa\left\langle -C_{IJk3}C^{-1}_{k3S3}\left\{\tilde{C}_{SMKL}\right\}_\xi + \tilde{C}_{IJPQ}\left\langle \Phi_{PQKLM}\right\rangle_\xi \right\rangle; \qquad (48)$$

$$\Xi^{Tc(n)}_{IJ} = \left\langle \Xi^{\sigma c(0)}_{IJ} + \kappa\Xi^{\sigma c(1)}_{IJ}\right\rangle, \Xi^{T\theta(n)}_{IJ} = \left\langle \Xi^{\sigma\theta(0)}_{IJ} + \kappa\Xi^{\sigma\theta(1)}_{IJ}\right\rangle;$$

$$C^{M\varepsilon(0)}_{IJKL} = \kappa\left\langle \xi\tilde{C}_{IJKL} \right\rangle, C^{M\eta(1)}_{IJKL} = \kappa^2\left\langle \xi^2\tilde{C}_{IJKL} \right\rangle;$$

$$C^{M\varepsilon(1)}_{IJKLM} = \kappa^2\left\langle -\xi C_{IJk3}C^{-1}_{k3S3}\left\{\tilde{C}_{SMKL}\right\}_\xi + \xi\tilde{C}_{IJPQ}\left\langle \Phi_{PQKLM}\right\rangle_\xi \right\rangle; \qquad (49)$$

$$\Xi^{Mc}_{IJ} = \left\langle \kappa\xi\Xi^{\sigma c(0)}_{IJ} + \kappa^2\xi\Xi^{\sigma c(1)}_{IJ}\right\rangle, \Xi^{M\theta}_{IJ} = \left\langle \kappa\xi\Xi^{\sigma\theta(0)}_{IJ} + \kappa^2\xi\Xi^{\sigma\theta(1)}_{IJ}\right\rangle.$$

З а м е ч а н и е. Из теоремы 2 и последних соотношений вытекает, что для пластин с симметричным тензором модулей упругости коэффициенты $C^{T\eta(1)}_{IJKL}$, $C^{T\varepsilon(1)}_{IJKLM}$, $C^{M\varepsilon(0)}_{IJKL}$ обращаются в нуль.

Осредненная система уравнений. Подставляя соотношения (46), (47) в осредненные уравнения (43), (45), получим осредненную систему уравнений для нахождения трех неизвестных функций $u^{(0)}_i(q_I)$ от двух координат:

$$\begin{cases} C^{T\varepsilon(0)}_{IJKL}\partial^2_{LJ}u^{(0)}_K - C^{T\eta(1)}_{IJKL}\partial^3_{KLJ}u^{(0)}_3 + C^{T\varepsilon(1)}_{IJKLM}\partial^3_{LMJ}u^{(0)}_K + \partial_J\Xi^{Tc}_{IJ} + \partial_J\Xi^{T\theta}_{IJ} = 0; \\ C^{M\varepsilon(0)}_{IJKL}\partial^3_{LJI}u^{(0)}_K - C^{M\eta(1)}_{IJKL}\partial^4_{KLJI}u^{(0)}_3 + C^{M\varepsilon(1)}_{IJKLM}\partial^4_{LMJI}u^{(0)}_K + \partial^2_{IJ}\Xi^{Mc}_{IJ} + \partial^2_{IJ}\Xi^{M\theta}_{IJ} = \Delta\bar{p}. \end{cases} \qquad (50)$$

Добавляя к этой системе уравнений граничные условия на контуре $\partial\Sigma$ срединной поверхности, получим постановку осредненной (глобальной) задачи для нахождения трех перемещений $u^{(0)}_i$, заданных на этой срединной поверхности Σ пластины.

Построение решения трехмерной задачи термоползучести с помощью рекуррентных соотношений для решений локальных и глобальной задач. С помощью разработанной теории алгоритм построения асимптотического решения общей трехмерной задачи термоползучести (1) может быть представлен следующим образом.

1. В результате решения глобальной задачи (система (50) с граничными условиями) находим перемещения нулевого приближения $u_i^{(0)}(q_I)$.

2. Вычисляем кривизны $\eta_{IJ}^{(0)} = -\partial_{IJ}^2 u_3^{(0)}$ и деформации срединной поверхности: $2\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \partial_J u_I^{(0)} + \partial_I u_J^{(0)}$.

3. По рекуррентным формулам (32)–(34) вычисляем компоненты тензоров $C_{IJKL\mathbf{M}_n}^{\varepsilon\eta(n+1)}$, $C_{IJKL\mathbf{M}_{n+1}}^{\varepsilon\varepsilon(n+1)}$, $P_{IJ}^{\varepsilon(n+1)}$, $\Xi_{IJ}^{\varepsilon c(n+1)}$, $\Xi_{IJ}^{\varepsilon\theta(n+1)}$ и $C_{IKL\mathbf{M}_n}^{\sigma S\eta(n+1)}$, $C_{IKL\mathbf{M}_{n+1}}^{\sigma S\varepsilon(n+1)}$, $P_I^{\sigma S(n+1)}$, $\Xi_I^{\sigma Sc(n)}$, $\Xi_I^{\sigma S\theta(n)}$.

4. С помощью соотношений (28)–(31) вычисляем деформации $\varepsilon_{IJ}^{(n)}$, кривизны $\eta_{IJ}^{(n)}$ для $n = 1, 2, ...$ и напряжения $\sigma_{I3}^{(n)}$, $\sigma_{33}^{(n)}$ для $n = 0, 1, 2, ...$

5. По формулам (37) вычисляем напряжения $\sigma_{IJ}^{(n)}$ для $n = 0, 1, 2, ...$

Таким образом, с помощью этого алгоритма могут быть вычислены все члены асимптотических разложений перемещений (4) и напряжений (8), причем для нахождения членов этого ряда необходимо решить только осредненную задачу теории пластин (50), все дальнейшие действия по приведенному алгоритму — это аналитические формулы для нахождения соответствующих коэффициентов и членов ряда.

Следовательно, с помощью разработанной асимптотической теории тонких пластин может быть вычислено точное в математическом смысле напряженно-деформированное состояние пластин со всеми шестью компонентами тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.

Выводы. Предложена теория термоползучести многослойных тонких пластин, основанная на анализе общих уравнений трехмерной нелинейной теории термоползучести с помощью построения асимптотических разложений по малому параметру, представляющему отношение толщины пластины к характерной длине, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Сформулированы локальные задачи для нахождения всех шести компонент тензора напряжений во всех слоях пластины, с точным учетом всех граничных условий. Выведены глобальные (осредненные по определенным правилам) уравнения теории термоползучести пластин; показано, что эти уравнения близки по структуре к уравнениям теории пластин Кирхгофа – Лява, но отличаются от них наличием производных 3-го порядка от продольных перемещений. Показано, что предложенная теория позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига, для чего необходимо численно решить локальные задачи до третьего приближения включительно и глобальные уравнения теории термоползучести пластин.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуреева Н.А. Восьмиугольный объемный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейсснера. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2007, № 5, с. 23−28.

[2] Попов Б.Г. *Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 294 с.

[3] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[4] Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, т. 4, № 2, с. 128–139.

[5] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.

[6] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.

[7] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London: World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[8] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.

[9] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

[10] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[11] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 1, с. 36−57.

[12] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105.

[13] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры,* 2014, № 1, т. 6, с. 32−48.

[14] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[15] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1: Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

Статья поступила в редакцию 01.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 25 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Юрин Юрий Викторович родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 8 научных работ в области вычислительной математики и механики. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The suggested thermocreep theory for thin multilayer plates is based on analysis of general three dimensional nonlinear theory of thermalcreep by constructing asymptotic expansions in terms of a small parameter being the ratio of a plate thickness and a characteristic length. Here we do not introduce any hypotheses on a distribution character for displacements and stresses through the thickness. Local problems were formulated for finding stresses in all structural elements of a plate. It was shown that the global (averaged by the certain rules) equations of the plate theory were similar to equations of the Kirchhoff–Love plate theory, but they differed by a presence of the three-order derivatives of longitudinal displacements. The method developed allows to calculate all six components of the stress tensor including transverse normal stresses and stresses of interlayer shear. For this purposes one needs to solve global equations of thermal creep theory for plates, and the rest calculations are reduced to analytical formulae use.

Keywords: *asymptotic theory, asymptotic expansions, thin multilayer plates, theory of thermocreep, local problems.*

REFERENCES

[1] Gureeva N.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2007, no. 5, pp. 23–28.

[2] Popov B.G. *Raschet mnogosloynikh konstruktsiy variatsionno-matrichnymi metodami* [Calculation of multilayer structures by variational-matrix methods]. Moscow, BMSTU Publ., 1993, 294 p.

[3] Sheshenin S.V. *Izv. RAN. MTT — Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body,* 2006, no. 6, pp. 71–79.

[4] Sheshenin S.V., Khodos O.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy — Computational Continuum Mechanics,* 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139.
[5] Kohn R.V., Vogelyus M. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
[6] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Dokl. AN SSSR — Reports of Acad. Sci. USSR,* 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.
[7] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization.* Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
[8] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.
[9] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Science*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
[10] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html
[11] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
[12] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-telhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Joural*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105.
[13] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoriev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, no. 1, vol. 6, pp. 32–48.
[14] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh* [Continuum mechanics. In 4 vols.]. *Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[15] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh* [Continuum mechanics. In 4 vols.]. *Vol. 1. Tenzornyi analiz* [Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 367 p.

Dimitrienko Yu.I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of the Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University; Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 250 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A. (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph. D. (Phys. & Math.), associated professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, of Bauman Moscow State Technical University; Author of over 15 publications in the field of continuum mechanics, trybology, mathematical modeling and composite mechanics. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Yurin Yu.V. (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A postgraduate at the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman MSTU. Author of 8 publications in the field of computational mathematics and mechanics. e-mail: yvyurin@yandex.ru