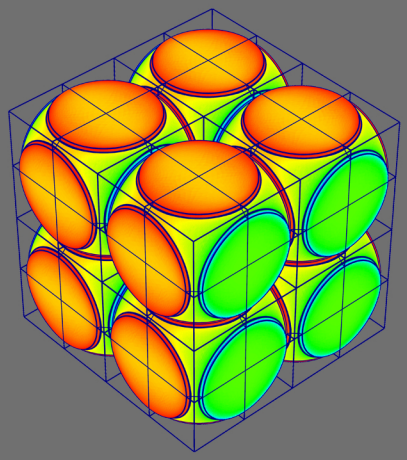
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композитов. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 1, с. 15–41.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/269/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
24.11.2026 19:18:34

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2022-1-1541

Микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композитов

© Ю.И. Димитриенко[1], С.В. Сборщиков[1],
А.Ю. Димитриенко[2], Ю.В. Юрин[1]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

В рамках деформационной теории пластичности при активном нагружении предложена модель определяющих соотношений упруго-пластических композитов, относящихся к классу трансверсально-изотропных материалов. Для построения нелинейных определяющих соотношений использована теория спектральных разложениях тензоров напряжений и деформаций, спектральное представление нелинейных тензорных функций для трансверсально-изотропных сред. Предложены конкретные модели функций пластичности, зависящие от спектральных инвариантов тензора деформации. Для определения констант модели предложен метод, в котором эти константы вычисляются на основе аппроксимации кривых деформирования, полученных прямым численным решением трехмерных задач на ячейке периодичности упруго-пластических композитов. Задачи на ячейке периодичности формулируются с помощью метода асимптотического осреднения периодических сред. Численное решение задач на ячейке периодичности осуществляется с помощью конечно-элементного метода в рамках программного обеспечения, разработанного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. приведен пример численного расчета констант модели композита с помощью предложенного метода для однонаправленно-армированного композита на основе углеродных волокон и матрицы из алюминиевого сплава. Приведены примеры верификация предложенной модели для различных траекторий нагружения композита в 6 мерном пространстве напряжений. Показано, что предложенная микроструктурная модель и алгоритм определения ее констант обеспечивают достаточно высокую точность прогнозирования упруго-пластического деформирования трансверсально-изотропных композитов.

Ключевые слова: *композиты, численное моделирование, деформационная теория пластичности, трансверсально-изотропные материалы, микроструктурная модель, метод асимптотического осреднения, метод конечного элемента, однонаправленно-армированные композиты, металлокомпозиты, диаграммы деформирования, инварианты*

Введение. Применение композиционных материалов на основе металлических матриц имеет большие перспективы в промышленности [1–7], особенно в технике, связанной с экстремальными воздействиями — высокими температурами, высоким давлением, высоким уровнем нагрузок. Возможность управления свойствами композитов на металлических матрицах

позволяет проектировать материалы с заданными свойствами, причем не только в традиционной линейной области, но и более сложной — нелинейной. В этой связи прогнозирование упруго-пластических свойств композиционных материалов является важной задачей механики композитов.

Различные подходы к расчетам свойств упруго-пластических композитов можно найти в большим числе работ, укажем лишь некоторые из них [5,7–9]. Наиболее перспективным на сегодняшний день, по видимому, является метод гомогенизации (метод асимптотического осреднения) [10–17], в рамках которого задача расчета упруго-пластических и других свойств композитов формулируется как специальная задача на ячейке периодичности (ЯП) в граничными условиями периодического типа. В цикле работ [18–22] разработаны численные методы решения этих задач на ЯП, основанные на конечно-элементных алгоритмах. Для линейных задач эти методы дают исчерпывающую информацию о прогнозируемых свойствах композитов, а для нелинейных задач не удается в явном виде получить необходимые эффективные свойства композитов. В работе [23] был предложен метод построения нелинейных определяющих соотношений композитов, основанный на применении теории нелинейных тензорных функций [24,25] в сочетании с методом гомогенизации. Модели нелинейных свойств композитов, построенные с помощью этого метода, были названы микроструктурными моделями нелинейных свойств композитов.

Настоящая работа является продолжением предшествующей работы [23], в которой была предложена микроструктурная модель деформационной теории пластичности для композитов специального типа, обладающих кубической симметрией [25] упруго-пластических свойств. Целью настоящей работы является продолжение этой работы и разработка микроструктурной модели деформационной пластичности для трансверсально-изотропных [25] композитов. К классу трансверсально-изотропных относятся широко применяемые композиционные материалы на основе однонаправленных волокон, а также слоистые композиты, у которых свойства в плоскости слоев не зависят от направления.

Тензорное представление определяющих соотношений для трансверсально-изотропных упруго-пластических сред. Рассмотрим композиционный материал, проявляющий упруго-пластические свойства при активном нагружении [26–28]. Полагаем, что деформирование этого композита происходит в области малых деформаций. Будем рассматривать деформационную теорию пластичности [26–30], в которой соотношение между тензорами напряжений σ_{ij} и малых деформаций ε_{kl} композита, рассматриваемо-

го как гомогенизированный материал [10,11], при активном нагружении можно записать в виде нелинейной тензорной функции

$$\sigma_{ij} = F_{ij}\left(\varepsilon_{kl}\right). \tag{1}$$

Будем рассматривать композиты, упруго-пластические свойства которых, определяемые внутренней микроструктурой, относятся к классу трансверсальной изотропии T_3. Ось трансверсальной изотропии полагаем направленной по направлению $O\mathbf{e}_i$. Компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{kl} записаны также в этой же системе координат $O\mathbf{e}_i$.

Запишем для тензоров напряжений и деформаций их спектральные представления [24,25,31] относительно класса симметрии T_3

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}\left(\sigma\right),\ \ \varepsilon_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}\left(\varepsilon\right), \tag{2}$$

где $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$ — обобщенные девиаторы тензора ε, которые в классе T_3 имеют вид

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},\ \ P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}\left(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}\right),$$

$$P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}\left(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}\right) + \varepsilon_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - \left(\varepsilon_{i3}\delta_{j3}+\varepsilon_{j3}\delta_{i3}\right), \tag{3}$$

$$P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = \varepsilon_{13}\left(\delta_{i1}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j1}\right) + \varepsilon_{23}\left(\delta_{i2}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j2}\right).$$

Обобщенные девиаторы $P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)$ тензора напряжений σ имеют аналогичный вид, с учетом замены $\varepsilon \to \sigma$. Для класса T_3 число $n=4$ в формуле (2).

Обобщенные девиаторы (3) являются линейными функциями от компонент σ_{ij} и ε_{kl}

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma) = \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}\sigma_{kl} \ \text{ и } \ P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon) = \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}\varepsilon_{kl},\ \ \alpha = 1,...,3, \tag{4}$$

где $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$ — ортопроекторы, характеризующие класс симметрии материала. Часть этих ортопроекторов является приводимыми, т.е. для них имеет место представление через тензоры $a_{ij}^{(\alpha)}$ второго ранга

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} = \frac{1}{a_\alpha^2}a_{ij}^{(\alpha)}a_{kl}^{(\alpha)},\ \ a_\alpha^2 = a_{ij}^{(\alpha)}a_{ij}^{(\alpha)},\ \ \alpha = 1,...,m,\ \ m<n. \tag{5}$$

Образуем также смешанные ортопроекторы

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2a_\alpha a_\beta}\left(a_{ij}^{(\alpha)}a_{kl}^{(\beta)} + a_{kl}^{(\alpha)}a_{ij}^{(\beta)}\right),\ \alpha,\beta = 1,...,m. \tag{6}$$

Очевидно, что $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\alpha)} = \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$. Для класса T_3 число $m = 2$, а тензоры $a_{ij}^{(\alpha)}$ и $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$ имеют вид [25]

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{i3}\delta_{j3},\ a_{ij}^{(2)} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2},\ a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2}, \tag{7}$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{2}\left(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}\right)\left(\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2}\right) +$$

$$+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} - \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{k3} + \delta_{ik}\delta_{l3}\right)\delta_{j3} - \frac{1}{2}\left(\delta_{jl}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{l3}\right)\delta_{i3}, \tag{8}$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{k3} + \delta_{ik}\delta_{l3}\right)\delta_{j3} + \frac{1}{2}\left(\delta_{jl}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{l3}\right)\delta_{i3} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}.$$

Введем спектральные инварианты $Y_\alpha(\sigma)$ и $Y_\alpha(\varepsilon)$ [10,24] тензоров напряжений и деформаций для класса T_3: линейные спектральные инварианты

$$Y_\alpha(\sigma) = \frac{1}{a_\alpha}a_{ij}^{(\alpha)}\sigma_{ij},\ Y_\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{a_\alpha}a_{ij}^{(\alpha)}\varepsilon_{ij},\ \alpha = 1,2 \tag{9}$$

и квадратичные спектральные инварианты

$$Y_\alpha^2(\sigma) = P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma),\ Y_\alpha^2(\varepsilon) = P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon),\ \alpha = 3,4. \tag{10}$$

Явное выражение этих инвариантов $Y_\alpha(\varepsilon)$ имеет вид [10,24]

$$\begin{gathered} Y_1(\varepsilon) = \varepsilon_{33},\ Y_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\sqrt{2}}, \\ Y_3(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}\right)^2 + 4\varepsilon_{12}^2},\ Y_4(\varepsilon) = \sqrt{2\left(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right)}. \end{gathered} \tag{11}$$

Для инвариантов $Y_\alpha(\sigma)$ имеют место аналогичные формулы.

Предполагаем, что тензорная функция (1) для композита является квазилинейной [10,24], тогда эта функция может быть представлена в виде соотношений между обобщенными девиаторами [25]

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma) = \frac{\varphi_\alpha}{Y_\alpha(\varepsilon)}P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon),\ \alpha = 1,...,4, \tag{12}$$

где φ_α — скалярные функции от спектральных инвариантов $Y_\alpha(\varepsilon)$, которые представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{2} l_{\alpha\beta} Y_\beta(\varepsilon),\ \ \alpha = 1,2, \\ \varphi_\alpha &= l_{\alpha\alpha} Y_\alpha(\varepsilon),\ \ \alpha = 3,4, \end{aligned} \tag{13}$$

где $l_{\alpha\beta}$ — скалярные функции от $Y_\alpha(\varepsilon)$

$$l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}\left(Y_1(\varepsilon),...,Y_n(\varepsilon)\right),\ \alpha,\beta = 1,...,4. \tag{14}$$

Соотношения (12) с учетом (9) и (13) можно записать в виде укороченного спектрального представления

$$\begin{aligned} Y_\alpha(\sigma) &= \sum_{\beta=1}^{2} l_{\alpha\beta} Y_\beta(\varepsilon),\ \ \alpha = 1,2, \\ P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma) &= l_{\alpha\alpha} P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon),\ \ \alpha = 3,4. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (12) в первое выражение в (2), и учитывая (13), получаем полное спектральное представление определяющих соотношений (1) для трансверсально-изотропных квазилинейных тензорных функций

$$\sigma_{ij} = \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{l_{\alpha\beta}}{a_\alpha a_\beta} a_{ij}^{(\alpha)} a_{kl}^{(\beta)} \right) \varepsilon_{kl} + \left(\sum_{\alpha=3}^{4} l_{\alpha\alpha} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} \right) \varepsilon_{kl}. \tag{16}$$

Если ввести обозначение для тензора модулей нелинейной упругости

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} l_{\alpha\beta} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} + \sum_{\alpha=3}^{4} l_{\alpha\alpha} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}, \tag{17}$$

то соотношения (16) можно представить в квазилинейном виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \tag{18}$$

Упругие константы трансверсально-изотропных сред. Если в (14) положить все инварианты $Y_\alpha(\varepsilon)$ — равными нулю, то получим спектральные упругие константы $l_{\alpha\beta}^0$

$$l_{\alpha\beta}^0 = l_{\alpha\beta}(0,...,0), \tag{19}$$

при этом тензор модулей нелинейной упругости (17) превращается в тензор модулей упругости

$$C_{ijkl}^0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} l_{\alpha\beta}^0 \Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} + \sum_{\alpha=3}^{4} l_{\alpha\alpha}^0 \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}. \tag{20}$$

Спектральные упругие константы $l^0_{\alpha\beta}$ линейно-упругого трансверсально-изотропного тела вычисляются с помощью соотношений (17) через модули упругости C^0_{ijkl} следующим образом

$$l^0_{11} = C^0_{3333},\ l^0_{22} = 2\left(C^0_{1111} - C^0_{1212}\right),\ l^0_{12} = \sqrt{2}C^0_{1133},$$
$$l^0_{33} = 2C^0_{1212},\ l^0_{44} = 2C^0_{1313}. \qquad (21)$$

Обратным к C^0_{ijkl} является тензор упругих податливостей Π^0_{ijkl}, с помощью которого определяются эффективные технические упругие константы трансверсально-изотропного композита [31]

$$\bar{E}_\alpha = 1/\,\Pi^0_{\alpha\alpha\alpha\alpha},\ \bar{G}_{\alpha\beta} = 1/\,4\Pi^0_{\alpha\beta\alpha\beta},$$
$$\bar{\nu}_{\alpha\beta} = -\Pi^0_{\alpha\alpha\beta\beta}\,/\,\Pi^0_{\alpha\alpha\alpha\alpha},\ \alpha,\beta = 1,3,\ \alpha \neq \beta, \qquad (22)$$

где $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}_T$ — модуль упругости в поперечном направлении (в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ трансверсальной изотропии), $\bar{E}_3 = \bar{E}_L$ — модуль упругости в продольном направлении $O\mathbf{e}_3$, $\bar{G}_{12} = \bar{G}_T$ — модуль упругости при поперечном сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, $\bar{G}_{13} = \bar{G}_{23} = \bar{G}_L$ — модуль продольного сдвига, упругости в плоскости трансверсальной изотропии, $\bar{\nu}_{12} = \bar{\nu}_T$ — поперечный коэффициент Пуассона, $\bar{\nu}_{31} = \bar{\nu}_{32} = \bar{\nu}_L$ — продольный коэффициент Пуассона.

Модели функций пластичности для упруго-пластических трансверсально-изотропных сред. Введем более простую модель трансверсально-изотропного упруго-пластического композита, чем общая модель (14). В этой модели для функций (14) примем следующую структуру зависимости

$$l_{\alpha\alpha} = l_{\alpha\alpha}\left(Y_\alpha(\varepsilon)\right),\ l_{12} = l^0_{12},\ \alpha,\beta = 1,2,$$
$$l_{\alpha\alpha} = l_{\alpha\alpha}\left(Y_3(\varepsilon), Y_4(\varepsilon)\right),\ \alpha = 3,4. \qquad (23)$$

Для аналитической аппроксимации функций (23) применим модель А.А. Ильюшина [26,27], обобщенную на случай трансверсальной изотропии

$$l_{\alpha\alpha}\left(Y_\alpha(\varepsilon)\right) = l^0_{\alpha\alpha}\left(1 - \omega_\alpha\left(Y_\alpha(\varepsilon)\right)\right),\ \alpha,\beta = 1,2, \qquad (24)$$

$$l_{\alpha\alpha}\left(Y_3(\varepsilon), Y_4(\varepsilon)\right) = l^0_{\alpha\alpha}\left(1 - \omega_\alpha\left(Y_3(\varepsilon), Y_4(\varepsilon)\right)\right),\ \alpha = 3,4. \qquad (25)$$

Для 4-х функций пластичности ω_α примем следующие зависимости, по аналогии с функциями пластичности, введенными ранее для квази-изотропного композита [23]

$$\omega_\alpha\left(Y_\alpha(\varepsilon)\right)=\begin{cases}0, \text{ если } |Y_\alpha(\varepsilon)|<\varepsilon_{S\alpha}\\ \omega_\alpha^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S\alpha}}{|Y_\alpha(\varepsilon)|}\right)^{b_\alpha}, \text{ если } |Y_\alpha(\varepsilon)|\ge\varepsilon_{S\alpha}\end{cases},\ \alpha,\beta=1,2, \tag{26}$$

$$\omega_\alpha\left(Y_3(\varepsilon),Y_4(\varepsilon)\right)=\begin{cases}0, \text{ если } \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)<\varepsilon_{S\alpha}\\ \omega_\alpha^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)}\right)^{b_\alpha}, \text{ если } \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)\ge\varepsilon_{S\alpha}\end{cases},\ \alpha=3,4, \tag{27}$$

$$\tilde{Y}_3(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_3(\varepsilon)\right)^2+a_{S3}\left(Y_4(\varepsilon)\right)^2},$$

$$\tilde{Y}_4(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_4(\varepsilon)\right)^2+a_{S4}\left(Y_3(\varepsilon)\right)^2},$$

$$b_3=b_{30}+b_{31}\left(Y_4(\varepsilon)\right)^2+b_{32}Y_4(\varepsilon),\ b_4=b_{40}+b_{41}\left(Y_3(\varepsilon)\right)^2+b_{42}Y_3(\varepsilon).$$

Модель (26),(27) содержит следующие константы

$$\begin{gathered}\varepsilon_{S1},\ \omega_1^0,\ b_1,\ \alpha,\beta=1,2,\\ \varepsilon_{S\alpha},\ \omega_\alpha^0,\ b_{\alpha0},\ b_{\alpha1},\ a_{S\alpha},\ \alpha=3,4.\end{gathered} \tag{28}$$

В этой модели функции пластичности ω_1 и ω_2, описывающие пластические свойства при продольном и поперечном растяжении-сжатии, зависят только от одного соответствующего инварианта $Y_1(\varepsilon)$ или $Y_2(\varepsilon)$, а функции ω_2 и ω_3, описывающие пластические свойства при продольных сдвигах, а также при сдвигах и растяжениях-сжатиях в плоскости трансверсальной изотропии, полагаются зависящими только от пары инвариантов $Y_3(\varepsilon)$ и $Y_4(\varepsilon)$, и не зависят от $Y_1(\varepsilon)$ и $Y_2(\varepsilon)$.

Микроструктурная модель упруго-пластического квази-изотропного композита. Применим метод, предложенный в [23], согласно которому для определения констант (28) осуществляются численные эксперименты по расчету диаграмм деформирования композита при определенных путях нагружения, используя для этого решения задач L_{pq} на ячейке периодичности. Подробности методики решения этих задач изложены в [18,32,33].

Для упруго-пластических композитов постановка линеаризованной задач L_{pq} формулируется на ячейке периодичности V_ξ (*ЯП*) композита следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\sigma^{\{m\}}_{ij(pq)/j} = 0, \text{ в } V_\xi, \\
\sigma^{\{m\}}_{ij(pq)} = C^{\{m-1\}}_{ijkl}\varepsilon^{\{m\}}_{kl(pq)}, \text{ в } V_\xi \bigcup \Sigma_\xi, \\
2\varepsilon^{\{m\}}_{kl(pq)} = U^{\{m\}}_{k(pq)|l} + U^{\{m\}}_{l(pq)|k}, \text{ в } V_\xi \bigcup \Sigma_\xi, \\
\Sigma_S: \left[\sigma^{\{m\}}_{ij(pq)}\right] n_j = 0, \left[U^{\{m\}}_{k(pq)}\right] = 0, \\
\left[\left[U^{\{m\}}_{i(pq)}\right]\right]_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\{m\}}_{pq}\left(\delta_{ip}\delta_{q\alpha} + \delta_{iq}\delta_{p\alpha}\right), \left[\left[\sigma^{\{m\}}_{i\alpha(pq)}\right]\right]_\alpha = 0, \\
\left\langle U^{\{m\}}_{i(pq)} \right\rangle = 0.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Здесь $\sigma^{\{m\}}_{ij(pq)}$, $\varepsilon^{\{m\}}_{kl(pq)}$ и $U^{\{m\}}_{l(pq)}$ — компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений в этой задаче, m — номер итерации по циклу нелинейности определяющих соотношений, (pq) — индекс задачи по типу граничных условий, $\sigma^{\{m\}}_{ij(pq)/j} = \dfrac{\partial \sigma^{\{m\}}_{ij(pq)}}{\partial \xi_j}$ — производная по локальным координатам $\xi_j \in V_\xi$ в ЯП, $\left[U^{\{m\}}_{k(pq)}\right]$ — скачок на границе раздела Σ_S компонентов композита, $\left[\left[U^{\{m\}}_{i(pq)}\right]\right]_\alpha$ — скачок функций на противоположных граничных плоскостях V_ξ, ортогональных к направлению ξ_α, $\left\langle U^{\{m\}}_{i(pq)} \right\rangle = \int\limits_{V_\xi} U^{\{m\}}_{ij(pq)} dV_\xi$ — среднее значение по ЯП, $C^{\{m-1\}}_{ijkl}$ — нелинейный тензор модулей упругости компонентов композита, которые полагаются изотропными упруго-пластическими, соответствующими деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина [26,27,30]

$$
\begin{gathered}
C^{\{m\}}_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G^{\{m\}}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{\{m\}}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \\
G^{\{m\}} = G\left(1 - \omega(\varepsilon^{\{m\}}_u)\right), \\
\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varepsilon_u < \varepsilon_S \\ \omega^0\left(1 - \dfrac{\varepsilon_S}{\varepsilon_u}\right)^b, \text{ если } \varepsilon_u \geq \varepsilon_S \end{cases}.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Здесь K, $G^{\{m\}}$ — модуль объемного сжатия и модуль сдвига компонентов композита, ω^0, ε_S, b — константы модели пластичности, все эти величины в задаче (30) рассматриваются как разрывные функции от ξ_j.

С помощью решения задач L_{pq} (30) вычисляем тензор модулей нелинейной упругости композита на $m-$ой итерации

$$C_{ijpq}^{\{m\}} = \frac{\left\langle \sigma_{ij(pq)}^{\{m\}} \right\rangle}{\varepsilon_{pq}^{\{m\}}}. \tag{31}$$

Величины $\varepsilon_{pq}^{\{m\}}$ в задачах L_{pq} — заданы, они представляют собой средние деформации ε_{pq} по ЯП композита на $m-$ой итерации.

С помощью тензора $C_{ijpq}^{\{m\}}$ получаем искомое соотношение (14) для композита на $m-$ой итерации

$$\sigma_{ij}^{\{m\}} = C_{ijpq}^{\{m-1\}} \varepsilon_{pq}^{\{m\}},\ m = 1,2,... \tag{32}$$

Алгоритм конечно-элементного решения локальных задач L_{pq} предложен в работах [32,33]. Для численного решения локальных задач L_{pq} был использован программный комплекс SMCM, разработанный в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана [34–36]. Комплекс SMCM позволяет проводить полный цикл конечно-элементного моделирования: от создания типовых 3D геометрий микроструктур ЯП композитов, построения КЭ сеток, до непосредственного решения задач L_{pq} и визуализации результатов расчетов.

Алгоритм численного определения тензора модулей нелинейной упругости $C_{ijpq}^{\{m\}}$ с помощью процедуры решения задач L_{pq}, используемый для вычисления констант (28), составляет микроструктурную модель упруго-пластического трансверсально-изотропного композита.

Методика определения констант модели. Опишем алгоритм определения констант (28) с помощью **микроструктурной** модели трансверсально-изотропного композита. Рассмотрим несколько вариантов решения задач L_{pq}, в каждой из которых реализуется пропорциональное нагружение по некоторой траектории в пространстве напряжений

$$\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} t, \tag{33}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ — тензор, задающий направление, а t — параметр нагружения.

Рассмотрим следующие 6 траекторий нагружения (33):

1) межслоевой сдвиг,
2) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии,
3) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига,
4) межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии,
5) растяжение в продольном направлении,
6) растяжение в плоскости трансверсальной изотропии.

Межслоевой сдвиг. В этом случае рассматривается задача L_{13}, в которой

$$\sigma_{13} = \dot{\sigma}_{13} t, \text{ остальные } \sigma_{ij} = 0. \tag{34}$$

В этом случае инварианты (9),(10) и девиаторы (3) имеют вид

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma) = 0,\ Y_2(\sigma) = 0,\ Y_3(\sigma) = 0,\ Y_4(\sigma) = \sqrt{2}\left|\sigma_{13}\right|, \\ P_{ij}^{(1)}(\sigma) = 0,\ P_{ij}^{(2)}(\sigma) = 0,\ P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0, \\ P_{ij}^{(4)}(\sigma) = \sigma_{13}\left(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}\right). \end{gathered} \tag{35}$$

Тогда из укороченного спектрального представления (15) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = 0, \tag{36}$$

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0,\ P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = \varepsilon_{13}\left(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}\right), \tag{37}$$

$$\sigma_{13} = l_{44}\varepsilon_{13}. \tag{38}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов следует, что

$$\begin{gathered} \varepsilon_{13} \neq 0, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0, \\ Y_4(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{13}\right|. \end{gathered} \tag{39}$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно — это (38). Функция l_{44} в этом соотношении имеет вид (25), (27). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\sigma_{13} = F_4(\varepsilon_{13}), \tag{40}$$

$$F_4(\varepsilon_{13}) \equiv \begin{cases} 2G_{13}\varepsilon_{13}, \text{ если } \sqrt{2}\left|\varepsilon_{13}\right| < \varepsilon_{S4} \\ 2G_{13}\left(1 - \omega_4^0\left(1 - \dfrac{\varepsilon_{S4}}{\sqrt{2}\left|\varepsilon_{13}\right|}\right)^{b_{40}}\right)\varepsilon_{13}, \text{ если } \sqrt{2}\left|\varepsilon_{13}\right| \geq \varepsilon_{S4} \end{cases}. \tag{41}$$

Построим диаграмму деформирования $\sigma_{13} = F_4^{(Э)}(\varepsilon_{13})$ при межслойном сдвиге композита, полученную прямым численным решением локальной задачи на ЯП L_{13} с помощью соотношения (32). Тогда, сравнивая эту кривую $\sigma_{13} = F_4^{(Э)}(\varepsilon_{13})$ с аппроксимационной функцией (32), находим все константы $\bar{G}_{13}$, ε_{S40}, ω_4^0, b_{40} из условия минимизации относительного отклонения этих кривых

$$\sum \left(1 - \frac{F_4(\varepsilon_{13})}{F_4^{(Э)}(\varepsilon_{13})} \right)^2 \to \min. \tag{42}$$

Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии. В этом случае рассматривается задача L_{12}, в которой

$$\sigma_{12} = \dot{\sigma}_{12} t, \text{ остальные } \sigma_{ij} = 0. \tag{43}$$

Инварианты (9), (10) и девиаторы (3) имеют вид

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma) = Y_2(\sigma) = Y_4(\sigma) = 0, \; Y_3(\sigma) = \sqrt{2}\left|\sigma_{12}\right|, \\ P_{ij}^{(1)}(\sigma) = P_{ij}^{(2)}(\sigma) = P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0, \\ P_{ij}^{(3)}(\sigma) = \sigma_{12}\left(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}\right). \end{gathered} \tag{44}$$

Тогда из укороченного спектрального представления (15) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = 0, \tag{45}$$

$$\begin{gathered} P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0, \\ P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = \varepsilon_{12}\left(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}\right), \end{gathered} \tag{46}$$

$$\sigma_{12} = l_{33}\varepsilon_{12}. \tag{47}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов, следует, что

$$\begin{gathered} \varepsilon_{12} \neq 0, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0, \\ Y_3(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right|. \end{gathered} \tag{48}$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно — это (47). Функция l_{33} в этом соотношении имеет вид (25) и (27). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\sigma_{12} = F_3(\varepsilon_{12}), \tag{49}$$

$$F_3(\varepsilon_{12}) \equiv \begin{cases} 2G_{12}\varepsilon_{12}, \text{ если } \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right| < \varepsilon_{S3} \\ 2G_{12}\left(1-\omega_3^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S3}}{\sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right|}\right)^{b_{30}}\right)\varepsilon_{12}, \text{ если } \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right| \geq \varepsilon_{S3} \end{cases}. \quad (50)$$

Пусть имеется кривая деформирования $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12})$ при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, полученная прямым численным решением локальной задачи L_{12}. Тогда из сравнения этой кривой $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12})$ с функцией (49) находим константы

$$G_{12},\ \varepsilon_{S3},\ \omega_3^0,\ b_{30} \quad (51)$$

из условия из условия минимизации относительного отклонения этих кривых.

Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига. Рассмотрим нагружение по ломанной линии: вначале до момента времени t_1 осуществляется нагружение в плоскости межслойного сдвига, а затем достигнутое напряжение сдвига фиксируется $\sigma_{13\max}$ и к нему добавляется сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии:

$$0 \leq t \leq t_1 :\ \sigma_{13} = \dot{\sigma}_{13} t,\ \text{остальные}\ \sigma_{ij} = 0, \quad (52)$$

$$\begin{gathered} t_1 \leq t \leq t_{\max} :\ \sigma_{13} = \sigma_{13\max} = \dot{\sigma}_{13} t_1,\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_{12} = \dot{\sigma}_{12}(t - t_1). \end{gathered} \quad (53)$$

Тогда, согласно формулам (40) и (49), получаем

$$0 \leq t \leq t_1 :\ \sigma_{13} = F_4(\varepsilon_{13}), \quad (54)$$

$$t_1 \leq t \leq t_{\max} :\ \sigma_{12} = \tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \varepsilon_{12}),$$

$$\tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \varepsilon_{12}) \equiv \begin{cases} 2G_{12}\varepsilon_{12}, \text{ если } \tilde{Y}_3(\varepsilon) < \varepsilon_{S3} \\ 2G_{12}\left(1-\omega_3^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S3}}{\tilde{Y}_3(\varepsilon)}\right)^{b_3}\right)\varepsilon_{12}, \text{ если } \tilde{Y}_3(\varepsilon) > \varepsilon_{S3} \end{cases}. \quad (55)$$

Здесь учтено, что при данном нагружении

$$\begin{gathered} \tilde{Y}_3(\varepsilon) = \sqrt{2\left(\varepsilon_{12}\right)^2 + 2a_{S3}\left(\varepsilon_{13\max}\right)^2}, \\ b_3 = b_{30} + 2b_{31}\varepsilon_{13\max}^2 + \sqrt{2}b_{32}\left|\varepsilon_{13\max}\right|. \end{gathered} \quad (56)$$

Максимальная деформация сдвига $\varepsilon_{13\max}$ вычисляется по заданному максимальному напряжению сдвига $\sigma_{13\max}$ из уравнения

$$\sigma_{13\max} = F_4(\varepsilon_{13\max}). \tag{57}$$

Пусть имеется кривая деформирования $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{13\max}, \varepsilon_{12})$, полученная прямым численным решением локальных задач на ЯП L_{13} при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, после предварительного чистого сдвига до значения $\varepsilon_{13\max}$. Тогда из условия минимального отклонения функций $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{13\max}, \varepsilon_{12})$ и $\sigma_{12} = \tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \varepsilon_{12})$ находим константы

$$a_{S3},\ b_{31},\ b_{32}. \tag{58}$$

Межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии. Рассмотрим нагружение по ломанной линии в другом порядке: вначале до момента времени t_1 осуществляется нагружение в плоскости трансверсальной изотропии, а затем достигнутое напряжение сдвига фиксируется $\sigma_{13\max}$ и к нему добавляется межслойный сдвига

$$0 \le t \le t_1 :\ \sigma_{12} = \dot{\sigma}_{12} t,\ \text{остальные}\ \sigma_{ij} = 0, \tag{59}$$

$$\begin{gathered} t_1 \le t \le t_{\max} :\ \sigma_{12} = \sigma_{12\max} = \dot{\sigma}_{12} t_1,\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_{13} = \dot{\sigma}_{13}(t - t_1). \end{gathered} \tag{60}$$

Тогда, согласно формулам (40) и (49), получаем

$$0 \le t \le t_1 :\ \sigma_{12} = F_3(\varepsilon_{12}), \tag{61}$$

$$t_1 \le t \le t_{\max} :\ \sigma_{13} = \tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \varepsilon_{13}),$$

$$\tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \varepsilon_{13}) \equiv \begin{cases} 2G_{13}\varepsilon_{13},\ \text{если}\ \tilde{Y}_4(\varepsilon) < \varepsilon_{S4} \\ 2G_{13}\left(1 - \omega_4^0\left(1 - \dfrac{\varepsilon_{S4}}{\tilde{Y}_4(\varepsilon)}\right)^{b_4}\right)\varepsilon_{13},\ \text{если}\ \tilde{Y}_4(\varepsilon) > \varepsilon_{S4} \end{cases}. \tag{62}$$

Здесь учтено, что при данном нагружении

$$\begin{gathered} \tilde{Y}_4(\varepsilon) = \sqrt{2\left(\varepsilon_{13}\right)^2 + 2a_{S4}\left(\varepsilon_{12\max}\right)^2}, \\ b_4 = b_{40} + 2b_{41}\varepsilon_{12\max}^2 + \sqrt{2}b_{42}\left|\varepsilon_{12\max}\right|. \end{gathered} \tag{63}$$

Максимальная деформация сдвига $\varepsilon_{12\max}$ вычисляется по заданному максимальному напряжению сдвига $\sigma_{12\max}$ из уравнения

$$\sigma_{12\max} = F_3(\varepsilon_{12\max}). \tag{64}$$

Пусть имеется кривая деформирования $\sigma_{13} = F_4^{(Э)}(\varepsilon_{12\max}, \varepsilon_{13})$, полученная прямым численным решением локальных задач на ЯП L_{13} при межслойном сдвиге после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии до значения $\varepsilon_{12\max}$. Тогда из условия минимального отклонения функций $\sigma_{13} = F_4^{(Э)}(\varepsilon_{12\max}, \varepsilon_{13})$ и $\sigma_{13} = \tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \varepsilon_{13})$ находим константы

$$a_{S4},\ b_{41},\ b_{42}. \tag{65}$$

Растяжение в продольном направлении. В этом случае рассматривается задача L_{33}, в которой

$$\varepsilon_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} t,\ \text{остальные}\ \varepsilon_{ij} = 0. \tag{66}$$

В этом случае инварианты (9),(10) и девиаторы (3) имеют вид

$$\begin{gathered} Y_1(\varepsilon) = \varepsilon_{33},\ Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = Y_4(\varepsilon) = 0, \\ P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},\ P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{67}$$

Тогда из укороченного спектрального представления (15) получаем, что

$$Y_3(\sigma) = 0,\ Y_4(\sigma) = 0, \tag{68}$$

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = \sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},\ P_{ij}^{(2)}(\sigma) \neq 0,\ P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0,\ P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0, \tag{69}$$

$$\sigma_{33} = l_{11}\varepsilon_{33},\ Y_2(\sigma) = l_{12}\varepsilon_{33}. \tag{70}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов следует, что

$$\sigma_{33} \neq 0,\ \sigma_{11} = \sigma_{22} \neq 0,\ \text{остальные}\ \sigma_{ij} = 0.$$

Отличных от нуля определяющих соотношения в этом случае два — это (70). С учетом (24) и (26) для функции l_{11} получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\sigma_{33} = F_1(\varepsilon_{33}), \tag{71}$$

$$F_1(\varepsilon_{33}) \equiv \begin{cases} l_{11}^0 \varepsilon_{33},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{33}\right| < \varepsilon_{S1} \\ l_{11}^0 \left(1 - \omega_1^0 \left(1 - \dfrac{\varepsilon_{S1}}{\left|\varepsilon_{33}\right|}\right)^{b_1}\right)\varepsilon_{12},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{33}\right| \geq \varepsilon_{S1} \end{cases}. \tag{72}$$

Построим экспериментальную диаграмму деформирования $\sigma_{33} = F_1^{(Э)}(\varepsilon_{33})$ при продольном растяжении, полученную прямым численным решением локальной задачи L_{33}. Тогда из условия

минимизации относительного отклонения функций $\sigma_{33} = F_1^{(Э)}(\varepsilon_{33})$ и $\sigma_{33} = F_1(\varepsilon_{33})$ находим константы

$$l_{11}^0,\ \varepsilon_{S1},\ \omega_1^0,\ b_1.$$

Растяжение в плоскости трансверсальной изотропии. В этом случае рассматриваются задачи L_{11} и L_{22}, в которой

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_0 \equiv \dot{\sigma}_0 t,\ \text{остальные}\ \sigma_{ij} = 0. \tag{73}$$

В этом случае из (3), (9) и (10) имеем

$$\begin{gathered} Y_2(\sigma) = \sqrt{2}\sigma_0,\ Y_1(\sigma) = Y_3(\sigma) = Y_4(\sigma) = 0, \\ P_{ij}^{(1)}(\sigma) = 0,\ P_{ij}^{(2)}(\sigma) = \sigma_0\left(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}\right), \\ P_{ij}^{(3)}(\sigma) = P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0. \end{gathered} \tag{74}$$

Тогда из (15) получаем, что

$$Y_3(\varepsilon) = Y_4(\varepsilon) = 0,\ P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0, \tag{75}$$

$$0 = l_{11}Y_1(\varepsilon) + l_{12}^0 Y_2(\varepsilon),\ \sqrt{2}\sigma_0 = l_{12}^0 Y_1(\varepsilon) + l_{22}Y_2(\varepsilon). \tag{76}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов следует, что

$$\varepsilon_{33} \neq 0,\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_0 \neq 0,\ \text{остальные}\ \varepsilon_{ij} = 0, \tag{77}$$

$$Y_1(\varepsilon) = -\frac{l_{12}^0}{l_{11}} Y_2(\varepsilon),\ Y_2(\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon_0. \tag{78}$$

Из второго соотношения (76) и (78), получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\sigma_0 = \tilde{l}_{22}\varepsilon_0,\ \tilde{l}_{22} \equiv l_{22} - \frac{(l_{12}^0)^2}{l_{11}}, \tag{79}$$

здесь l_{22} — зависит от ε_0 согласно (26), а l_{11} — от σ_0 и ε_0. Разрешим это уравнение (79) относительно σ_0: $\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0)$ и построим диаграмму деформирования $\sigma_0 = F_2^{(Э)}(\varepsilon_0)$ при продольном растяжении, полученную прямым численным решением локальных задач L_{11} и L_{22}. Тогда из условия минимизации относительного отклонения функций $\sigma_0 = F_2^{(Э)}(\varepsilon_0)$ и $\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0)$ находим константы

$$l_{22}^0,\ \varepsilon_{S2},\ \omega_2^0,\ b_2.$$

Результаты численного моделирования. В качестве примера применения разработанной модели был рассмотрен однонаправленно-армированный (1D) композиционный материал на основе алюминиевой матрицы и углеродных волокон (рис. 1). Матрица считалась упруго-пластической, а волокна — чисто упругими. Для матрицы были приняты следующие константы модели деформационной теории пластичности (30)

$$E_m = 70 \text{ ГПа};\ \nu_m = 0{,}35;\ \varepsilon_{Sm} = 0{,}0042;\ \omega_m^0 = 0{,}96;\ b_m = 2{,}34.$$

Характеристики волокон были выбраны следующими

$$E_f = 350 \text{ ГПа};\ \nu_f = 0{,}2.$$

Концентрация волокон в композите составляла 70 %.

С помощью решения локальных задач L_{pq} были получены следующие значения эффективных упругих характеристики 1D композита

$$\bar{E}_L = 266{,}49 \text{ ГПа};\ \bar{E}_T = 183{,}34 \text{ ГПа};$$
$$\bar{\nu}_L = 0{,}2381;\ \bar{\nu}_T = 0{,}3713;\ \bar{G}_L = 79{,}44 \text{ ГПа}.$$

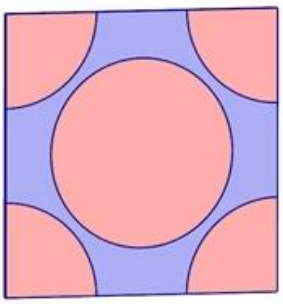
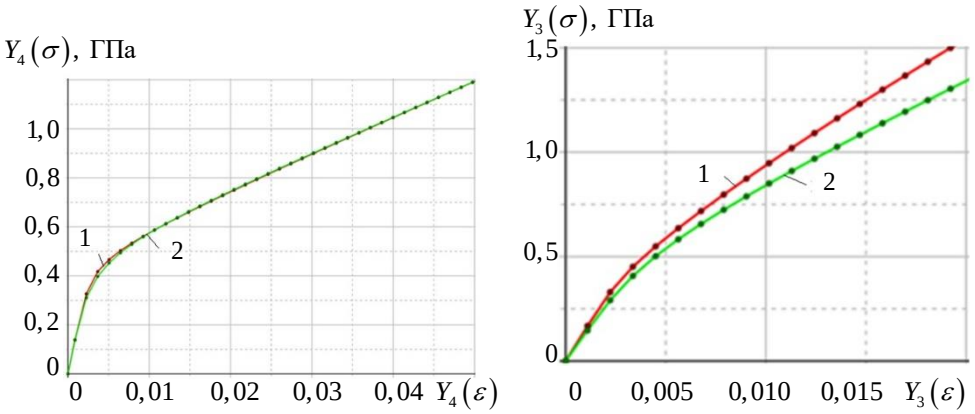


Рис. 1. ЯП 1D композита

На рис. 2 показаны диаграммы деформирования композита для траекторий нагружения 1) и 2), представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon)\right)$ и $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$. Одна из диаграмм на этих рисунках получена прямым решением соответствующей задачи L_{pq}, а вторая — путем аппроксимации этой кривой с помощью разработанной модели упруго-пластического композита по формулам (40) и (49). В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{S40} = 0,0008717;\ \omega_4^0 = 0,9097;\ b_{40} = 3,878;$$
$$\varepsilon_{S30} = 0,0010966;\ \omega_3^0 = 0,659;\ b_3 = 4,957.$$



а *б*

Рис. 2. Диаграммы деформирования для 1D композита, полученные для траекторий нагружения 1) и 2):
1 — прямое решение задач L_{pq}; 2 — аппроксимация по формулам (40) и (49);
а — $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon)\right)$; *б* — $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$

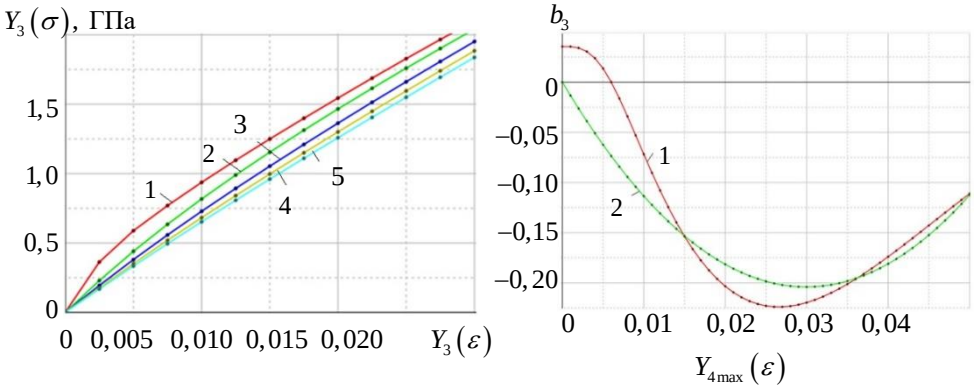
На рис. 3*а* показаны диаграммы деформирования 1D композита по траектории нагружения 3), представленные в виде зависимости инвариантов $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon), Y_{4\max}(\varepsilon)\right)$ при различных фиксированных значениях инварианта $Y_{4\max}(\varepsilon)$, достигнутых на первом участке траектории 3). Для каждой из таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения (55) с различными значениями параметра b_2. В результате была построения функция зависимости $b_2\left(Y_{4\max}(\varepsilon)\right)$, где $Y_{4\max}(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{13\max}\right|$. График этой функции показан на рис. 3*б*. Для аналитической аппроксимации этой функции применялась модель (56). При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{S3} = 1{,}5827;\ b_{31} = 227{,}65;\ b_{32} = -13{,}633.$$

На рис. 4*а* показаны диаграммы деформирования композита при траектории нагружения 4), представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon), Y_{3\max}(\varepsilon)\right)$ при различных фиксированных значениях инварианта $Y_{3\max}(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12\max}\right|$, достигнутых на первом участке траектории 4), соответственно. Для каждой таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения (63) с различными значениями параметра b_4. В результате была построена функция зависимости $b_4\left(Y_{3\max}(\varepsilon)\right)$ и найдены константы

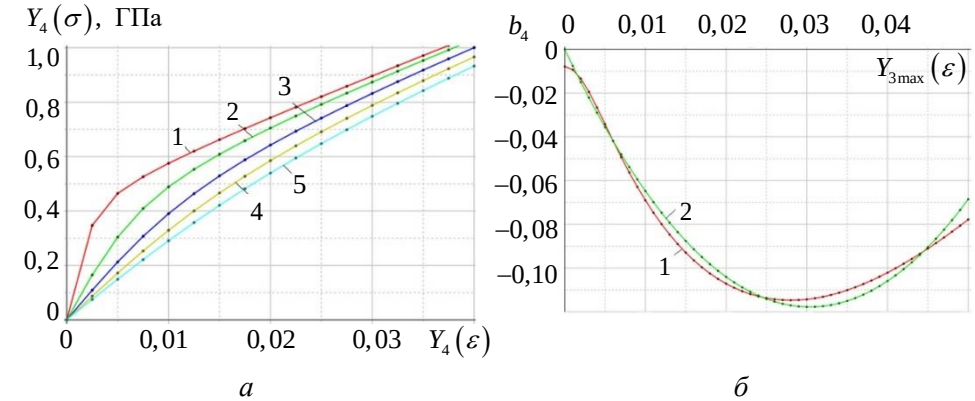
аппроксимации b_{41}, b_{42}. График этой функции показан на рис. 4*б*. При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{S4} = 0{,}6318;\ b_{41} = 127{,}62;\ b_{42} = -7{,}75581.$$



а *б*

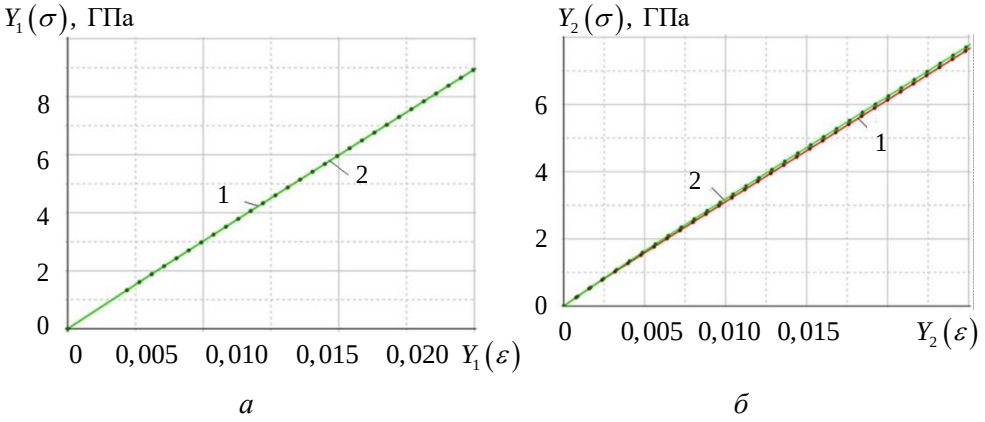
Рис. 3. Траектория нагружения 3):
а — диаграммы деформирования 1D композита, полученные по траектории нагружения 3) с помощью прямого решения задач L_{pq}
для различных значений $Y_{4\max}(\varepsilon)$:
1 — 0 ; 2 — 0,01; 3 — 0,02 ; 4 — 0,03 ; 5 — 0,04 ;
б — зависимости параметра b_3 от $Y_{4\max}(\varepsilon)$:
1 — прямое решение задач L_{pq} ; 2 — аппроксимации (56)



а *б*

Рис. 4. Траектория нагружения 4):
а — диаграммы деформирования 1D композита, полученные по траектории нагружения 4) с помощью прямого решения задач L_{pq}
для различных значений $Y_{3\max}(\varepsilon)$:
1 — 0 ; 2 — 0,01; 3 — 0,02 ; 4 — 0,03 ; 5 — 0,04 ;
б — зависимости параметра b_4 от $Y_{3\max}(\varepsilon)$:
1 — прямое решение задач L_{pq} ; 2 — аппроксимации (56)

Поскольку наполнитель композита является упругим, а матрица — не обладает пластичностью при объемном сжатии, то композит также не проявляет значительных пластических свойств при растяжении в продольном и поперечном по направлениях, поэтому диаграммы $Y_1(\sigma) = \bar{F}_3\left(Y_1(\varepsilon)\right)$ (рис. 5*а*) и $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2\left(Y_2(\varepsilon)\right)$ (рис. 5*б*), полученные для траекторий 5) и 6) близки к линейным до больших значений напряжений (рис. 5).

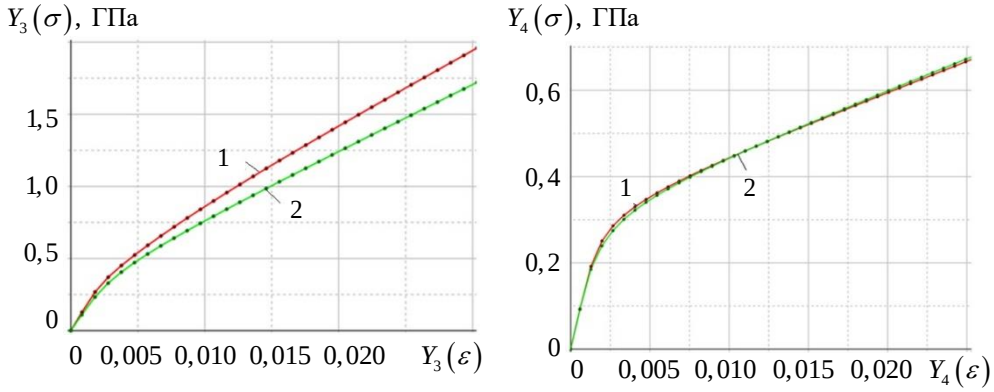


а *б*

Рис. 5. Диаграммы деформирования для 1D композита, полученные для траекторий нагружения 5) и 6):
1 — прямое решение задач L_{pq}; 2 — аппроксимация по формулам (71) и (79);
а — $Y_1(\sigma) = \bar{F}_3\left(Y_1(\varepsilon)\right)$; *б* — $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2\left(Y_2(\varepsilon)\right)$

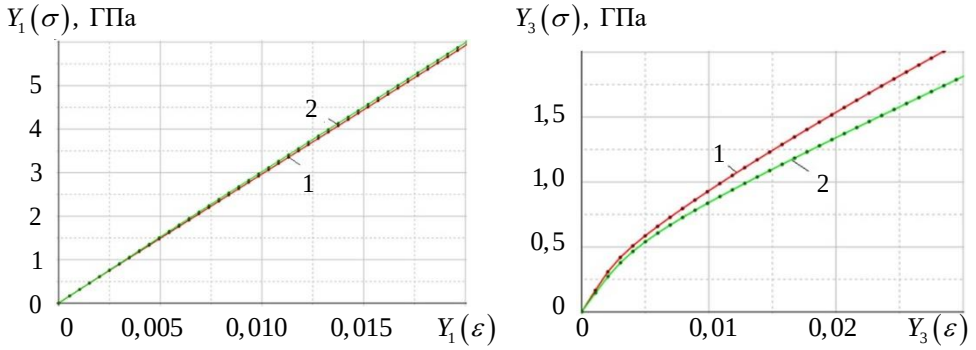
Далее были проведены проверочные расчёты по различным траекториям нагружения (33), которые не использовались в алгоритме определения констант модели. Эти траектории представляли собой лучи в 6-мерном пространстве напряжений и задавались столбцом значений $\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}$ тензора $\dot{\sigma}_{ij}$.

На рис. 6 показаны диаграммы деформирования $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$ и $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon)\right)$, полученные прямым решением задач L_{pq} и с помощью микроструктурной модели, для траектории нагружения $\{\dot{\sigma}\} = \{0,1,-1,1,0,1\}$, составленной из 3-х видов нагружения: растяжения–сжатия в плоскости трансверсально изотропии с нулевым 2-м инвариантом $Y_2(\sigma) = 0$, сдвига в плоскости трансверсальной изотропии и межслойного сдвига. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 11,62 % — для диаграммы $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$ и 0,952 % — для диаграммы $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon)\right)$.



а *б*

Рис. 6. Диаграммы деформирования для 1D композита, полученные по траектории нагружения $\{\dot{\sigma}\} = \{0,1,-1,1,0,1\}$:
1 — прямое решение задач L_{pq}; 2 — микроструктурная модель;
а — $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$; *б* — $Y_4(\sigma) = F_4\left(Y_4(\varepsilon)\right)$



а *б*

Рис. 6. Диаграммы деформирования для 1D композита, полученные по траектории нагружения $\{\dot{\sigma}\} = \{1,1,-1,0,0,1\}$:
1 — прямое решение задач L_{pq}; 2 — микроструктурная модель;
а — $Y_1(\sigma) = F_1\left(Y_1(\varepsilon)\right)$; *б* — $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$

На рис. 7 показаны диаграммы деформирования $Y_1(\sigma) = F_1\left(Y_1(\varepsilon)\right)$ и $Y_3(\sigma) = F_3\left(Y_3(\varepsilon)\right)$, полученные прямым решением задач L_{pq} и с помощью микроструктурной модели, для траектории нагруженииия $\{\dot{\sigma}\} = \{1,1,-1,0,0,1\}$. Эта траектория представляет собой комбинацию 3-х видов нагружения: растяжения в продольном направлении, растяжения–сжатия в плоскости трансверсальной изотропии с нулевым 2-м инвариантом $Y_2(\sigma) = 0$ и

межслойного сдвига. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 1,328 % — для первой из указанных диаграмм деформирования, и 11,723 % — для второй диаграммы деформирования.

Заключение. Предложена микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композиционных материалов. Теория основана на спектральном представлении определяющих соотношений теории анизотропной пластичности, примененной для класса трансверсальной изотропии, а также — на методе асимптотического осреднения, с использованием конечно-элементного метода решения задач на ячейках периодичности. Представлен пример численного расчета констант модели для однонаправленно композиционного материала на алюминиевой матрице, для которого вычислены все константы модели. Проведенные верификационные расчеты диаграмм пластичности при различных путях нагружения показали, что предложенная модель обеспечивает хорошую точность прогнозирования упруго-пластических свойств композита.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kandpal B.C., Kumar J., Singh H. Fabrication and characterisation of Al2O3/aluminium alloy 6061 composites fabricated by Stir casting. *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, iss. 2, pp. 2783–2792.

[2] Kainer K.U. *Metal Matrix Composites: Custom-made Materials for Automotive and Aerospace Engineering*. Wiley, 2006, 330 p.

[3] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni-based matrix composites – III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp.195–204.

[4] Rawal S. Metal-matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 14–17.

[5] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.

[6] Ковтунов А.И., Мямин С.В., Семистенова Т.В. *Слоистые композиционные материалы: электронное учебное пособие.* Тольятти, Изд-во ТГУ, 2017, 75 с.

[7] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[8] Былим А.В., Сараев Л.А., Сахабиев В.А. Особенности упругопластического деформирования двухкомпонентных композитов. *Вестник СамГУ*, 1998, № 4, с. 113–119.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[11] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[12] Санчес–Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[13] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asympotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[14] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.

[15] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer-Verlag, 2002, 276 p.

[16] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[17] Эглит М.Э. Новые модели, возникающие при осредненном описании микронеоднородных сред. *Труды МИАН*, 1998, т. 223, с. 102–111.

[18] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[19] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2, с. 3–22.

[21] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых периодических композитов на основе теории пластического течения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 15–37.

[23] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

[24] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.

[25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[26] Ильюшин А.А. *Пластичность.* Упруго-пластические деформации. Москва, URSS, 2018, 392 с.

[27] Ильюшин А.А., Ленский В.В. *Сопротивление материалов*. Москва, Физматлит, 1959, 372 с.

[28] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций*. Москва, URSS, 2019, 344 с.

[29] Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. Москва, Физматлит, 2008, 176 с.

[30] Горшков А.Г., Старовой Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций.* Москва, Физматлит, 2005, 576 с.

[31] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[32] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[33] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, №2, с. 95–108.

[34] Свидетельство № 2019666176 *Программа NonlinearEl_Disp_Manipula для прогнозирования диаграмм нелинейно-упругого деформирования дисперсно-армированных композитов при малых деформациях на основе конечно-элементного решения 3D локальных задач микромеханики*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2019665098; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019 — [1].

[35] Свидетельство № 2019666172 *Программа StrengthCom SMCM для конечно-элементного расчета прочностных характеристик композитных материалов со сложной структурой с учетом накопления микроповреждений и кинетики мезоскопических дефектов*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана – № 2019665109; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019. – [1].

[36] Свидетельство № 2018614767 *Программа MultiScale_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2018677684; заявл. 21.02.2018; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17.04.2018. — [1].

Статья поступила в редакцию 14.11.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 1, с. 15–41.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Сборщиков Сергей Васильевич — научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: servasbor@gmail.com

Димитриенко Александр Юрьевич — магистрант МГУ им.М.В. Ломоносова. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Modeling microstructural model of the plasticity deformation theory for transversally isotropic composites

© Yu.I. Dimitrienko[1], S.V. Sborschikov[1], A.Yu. Dimitrienko[2], Yu.V. Yurin[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

Within the framework of the deformation theory of plasticity under active loading, a model of constitutive relations for elastic-plastic composites belonging to the class of transversally isotropic materials is proposed. The theory of spectral expansions of stress and strain tensors and the spectral representation of nonlinear tensor functions for transversely isotropic media are used to develop a nonlinear constitutive relations. Specific models of plasticity functions are proposed, depending on the spectral invariants of the strain tensor. To determine the model constants, a method is proposed in which these constants are calculated based on the approximation of deformation curves obtained by direct numerical solution of three-dimensional problems on the periodicity cell of elastic-plastic composites. Problems on the periodicity cell are formulated using the method of asymptotic averaging of periodic media. The numerical solution of problems on the periodicity cell is carried out using the finite element method within the framework of software developed at the Scientific and Educational Center "Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Systems" of Bauman Moscow State Technical University. An example of numerical calculation of the constants of a composite model using the proposed method for a unidirectionally reinforced composite based on carbon fibers and an aluminum alloy matrix is given. Examples of verification of the proposed model for different loading trajectories of the composite in a 6-dimensional stress space are given. It is shown that the proposed microstructural model and the algorithm for determining its constants provide a sufficiently high accuracy in predicting the elastic-plastic deformation of transversely isotropic composites.

***Keywords**: composites, numerical modeling, deformation theory of plasticity, transversally isotropic materials, microstructural model, asymptotic averaging method, finite element method, unidirectionally reinforced composites, metal composites, strain diagrams, invariants*

REFERENCES

[1] Kandpal B.C., Kumar J., Singh H. Fabrication and characterisation of Al2O3/aluminium alloy 6061 composites fabricated by Stir casting. *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, iss. 2, pp. 2783–2792.

[2] Kainer K.U. *Metal Matrix Composites: Custom-made Materials for Automotive and Aerospace Engineering*. Wiley, 2006, 330 p.
[3] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni-based matrix composites – III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp.195–204.
[4] Rawal S. Metal-matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 14–17.
[5] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.
[6] Kovtunov A.I., Mamin S.V., Semistenova T.V. *Sloistyye kompozitsionnyye materialy: elektronnoye uchebnoye posobiye. [Layered composite materials: electronic textbook]*. Togliatti, TSU Publ., 2017, 75 p.
[7] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.
[8] Bilim A.V., Saraev L.A., Sahabiev V.A.The persicularities of two–component composite materials elastic–plastic deformation. *Vestnik of Samara University*, 1998, no. 4, pp. 113–119.
[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.
[10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.
[11] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.
[12] Sanches–Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.
[13] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asympotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.
[14] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.
[15] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures. Springer-Verlag, 2002, 276 p.
[16] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.
[17] Eglit M.E. New Models Arising in the Averaged Description of Microinhomogeneous Media. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1998, vol. 223, pp. 94–104.
[18] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
[19] Dimitrienko Y.I., Sborschikov S.V, Yurin Y.V. Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, № 4, pp. 3–26.

[20] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I. Modeling the elastic–plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 3–22.

[21] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of elastic–plastic composites with an allowance for fault probability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.

[22] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Cherkasova M.S. Modeling the deformation of layered periodic composites based on the theory of plastic flow. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 2, pp. 15–37.

[23] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Dimitrienko A.Yu., Yurin Yu.V. Modeling microstructural model of the plasticity defor-mation theory for quasi-isotropic composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 17–44.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Higher School Publ., 2001, 576 p.

[25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[26] Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Elastic-plastic deformations]. Moscow, URSS, 2018, 392 p.

[27] Ilyushin A.A., Lensky V.V. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, 372 p.

[28] Moskvitin V.V. *Ciklicheskie nagruzheniya elementov konstrukcij* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS, 2019, 344 p.

[29] Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proporcional'nye i nepro-porcional'nye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and disproportionate loads]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 176 p.

[30] Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistyh vyazkoupru-goplasticheskih elementov konstrukcij* [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 576 p.

[31] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[32] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[33] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. Finite Element Method of Calculation of Efficient Characteristics of Composites with Periodical Structure. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[34] Certificate no. 2019666176 *Programma NonlinearEl_Disp_Manipula dlya prognozirovaniya diagramm nelinejno-uprugogo deformirovaniya dispersno-armirovannyh kompozitov pri malyh deformaciyah na osnove konechno-elementnogo resheniya 3D lokal'nyh zadach mikromekhaniki: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The program NonlinearEl_Disp_Manipula for predicting diagrams of nonlinear elastic deformation of dispersed-reinforced composites under small deformations based on the finite element solution of 3D local problems of micromechanics: certificate of ofic. registration of a computer program] / Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, S.V. Sobshchikov, I.O. Bogdanov; applicant and copyright holder:

BMSTU — no. 2019665098; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

[35] Certificate no. 2019666172 *Programma StrengthCom SMCM dlya konechno-elementnogo rascheta prochnostnyh harakteristik kompozitnyh materialov so slozhnoj strukturoj s uchetom nakopleniya mikro-povrezhdenij i kinetiki mezoskopicheskih defektov: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The StrengthCom SMCM program for finite element calculation of strength characteristics of composite materials with a complex structure, taking into account the accumulation of micro-damage and the kinetics of mesoscopic defects]: certificate of ofic. registration of a computer program / Yu. I. Dimitrienko, E. A. Gubareva, Yu. V. Yurin, S. V. Sobshchikov, I. O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2019665109; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

[36] Certificate no. 2018614767 *Programma MultiScale_SMCM dlya mnogomasshtabnogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstrukcij iz kompozicionnyh materialov, na osnove metoda mnogourovnevoj asimptoticheskoj gomogenizacii i konechno-elementnogo resheniya trekhmernyh zadach teorii uprugosti* [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of three-dimensional problems of elasticity theory]: certificate of ofic. registration of computer programs/ Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2018677684; application 21.02.2018; registered in the register of computer programs 17.04.2018 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Sborschikov S.V., researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: servasbor@gmail.com

Dimitrienko A.Yu., magistrant of Lomonosov Moscow State University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru