

Моделирование клеточными автоматами эффектов двойных стандартов и мягкой силы при конкуренции

© В.А. Боборов¹, Ю.И. Бродский²

¹МПГУ, Москва, 107140, Россия

²ФИЦ ИУ РАН, Москва, 119333, Россия

В среде клеточных автоматов рассматривается дискретный аналог классической модели конкуренции А. Лотки – В. Вольтерры. Известно, что в классической модели тип ее эволюции во времени определяется в первую очередь принадлежностью коэффициентов двойных стандартов тем или иным диапазонам их возможных значений. Показано, что такая же ситуация имеет место и для дискретной модели. Для классической модели имеет место эффект мягкой силы. При рассмотрении модели применительно к социальным системам, она превращается в кооперативную позиционную дифференциальную игру, ограничениями которой становится исходная система уравнений конкуренции А. Лотки – В. Вольтерры, а управлениями — коэффициенты двойных стандартов. Эффект мягкой силы состоит в том, что стороны склонны сравнивать конкурентное давление на них популяции соперника с конкурентным давлением внутри собственной популяции и могут принять меньшее давление соперника за благосклонное его к ним отношение, а большее — за враждебное проявление. Тогда как на самом деле — сравнение внешнего конкурентного давления с внутренним в данной игре не информативно — все зависит исключительно от коэффициентов двойных стандартов, которые в этой игре являются управлениями и поэтому не известны сопернику. Имитационные эксперименты с аналогом модели конкуренции, реализованным в среде клеточных автоматов, показывают, что в дискретной модели эффект мягкой силы также имеет место.

Ключевые слова: модель конкуренции, клеточные автоматы, двойные стандарты, мягкая сила, дифференциальная игра, имитационное моделирование

Введение. Данная работа посвящена двум проблемам: во-первых, поиску способов формализации описательных наук средствами информатики и математики, и во-вторых, изучению взаимосвязей, возникающих между системно-динамическими и агентными описаниями одной предметной области.

О первой из этих задач академик А.А. Дородницын писал [1]: «...я считаю задачу внедрения методов информатики в описательные науки одной из важнейших, быть может, самой важной проблемой близкого будущего!» И действительно, в настоящее время (являющееся тем самым близким будущим цитаты) мы видим немало интересных подходов к такой формализации. Несколько таких исследований приводятся в работах [2–7].

Предметом исследования данной работы будет межкультурное взаимодействие, изучаемое с помощью уравнений конкуренции, восходящих к работам А. Лотки и В. Вольтерры [8], с учетом того, что

при применении их к социальным системам, математическая модель превращается из обыкновенных дифференциальных уравнений в гораздо более сложный объект — дифференциальную игру. Анализ этой игры позволяет заключить, что тип поведения модели в первую очередь зависит от коэффициентов двойных стандартов, задающих разницу в силе конкуренции между «своими» и «чужими», а также выявить достаточно парадоксальный эффект «мягкой силы», суть которого состоит в том, что одна из популяций добивается вытеснения другой из системы, не вызывая при этом негативной реакции с ее стороны, т.к. конкурентное давление первой популяции на вторую оказывается меньшим, чем конкурентное давление внутри второй популяции, но, что принципиально, большим, чем внутри первой [6].

В данной работе рассматриваются агентные аналоги моделей работ [6, 12], реализованные клеточными автоматами. И здесь мы переходим ко второй из поставленных выше задач. Клеточные автоматы являются достаточно простой в реализации и поэтому весьма популярной средой агентного моделирования [9]. В этой среде реализуются модели из самых разных предметных областей, например, работы [10–13]. Еще в конце прошлого века А. Дьюдни подмечена аналогия между придуманной им клеточно-автоматной игрой *WaTog* [13] и непрерывной моделью «хищник-жертва» А. Лотки и В. Вольтерры [8]. Насколько можно расширить такую аналогию? — Дискретные и непрерывные модели различаются принципиально и аппарат исследования первых существенно слабее, нежели вторых.

В данной работе мы убедимся с помощью имитационного моделирования, что в клеточно-автоматной модели роль двойных стандартов та же, что и в непрерывной, а также в существовании в ней эффекта «мягкой силы».

В то время как анализ непрерывных моделей может производиться в первую очередь аналитически, в качестве основного подхода для анализа рассматриваемой дискретной модели выбрано проведение имитационных экспериментов для различных значений параметров модели. Для этих целей была использована программная реализация клеточно-автоматной модели многомерной конкуренции, реализованная на языке C++.

Многомерная модель конкуренции. В работе [14] рассматривалась n – мерная модель конкуренции:

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^n m_{i,j} \frac{x_j}{x_j^*} \right), \quad m_{k,k} = 1, i = \overline{1..n}.$$

Здесь n — это число популяций; x_i — численность i – ой популяции; α_i — мальтузианский коэффициент i – ой популяции, т.е.

параметр, отражающий степень чувствительности этой популяции к изменениям в окружающей среде; x_i^* — ёмкость среды относительно i -ой популяции, т.е. предельная численность, которой эта популяция достигает в ситуации, когда остаётся единственной популяцией системы и не испытывает конкурентного давления со стороны других популяций.

Наконец, $(m_{i,j})$ — матрица конкуренции размера $n \times n$, состоящая из коэффициентов двойных стандартов и отражающая отношения между популяциями. Более точно, значение $m_{i,j}$ показывает, во сколько раз конкуренция популяции j с популяцией i сильнее, чем конкуренция внутри самой популяции j ; главная диагональ матрицы, таким образом, заполняется единицами. Значения коэффициента выше единицы означают нетерпимость, а ниже — толерантность.

В работе [6] исследовано поведение системы для двумерного случая (т.е. для двух популяций), а именно, определено, что оно существенным образом зависит (за исключением ряда частных маловероятных случаев) только от попадания коэффициентов двойных стандартов $m_{i,j}$ в один из диапазонов:

1. $(-\infty; 0)$ — сверхтолерантность;
2. $[0; 1)$ — толерантность;
3. 1 — отношение без предубеждений и предпочтений;
4. $(1, \infty)$ — нетерпимость.

При этом возникают четыре ключевых случая.

Первый — взаимная толерантность — происходит, когда коэффициенты двойных стандартов для обеих популяций оказываются меньшими единицы. В этой ситуации, траектория системы на фазовой плоскости в пределе приходит в устойчивый узел с ненулевыми координатами, что означает, что данные популяции могут сосуществовать на бесконечности.

Второй — обоюдная нетерпимость — ситуация, когда оба коэффициента больше единицы. Здесь траектория в основном случае ведёт к одной из точек $(x_1^*, 0)$, $(0, x_2^*)$, что означает выживание в пределе лишь одной из популяций.

Третий случай наступает, когда один из коэффициентов выше единицы, а второй ниже. В этой ситуации у толерантной популяции отсутствуют шансы выживания и система в пределе приходит к выживанию другой популяции, заполняющей всю ёмкость среды.

Наконец, четвёртый случай — отношение без предубеждений и предпочтений — случай равенства обоих коэффициентов единице.

В этом случае обе популяции сохраняют ненулевую численность на бесконечности.

Как видно из приведённого выше, результат моделирования определяется по большому счёту исходя только лишь из значений коэффициентов двойных стандартов, а другие параметры (например, ёмкость среды) играют второстепенную роль. Именно за счёт этого возникает эффект «мягкой силы».

Суть «мягкой силы» состоит в том, что при взаимодействии нескольких культур (в рассмотренном случае — двух) представители одной культуры могут оказывать влияние на представителей других культур с целью добровольного вовлечения последних в действия, выгодные для первой культуры.

Для рассмотренной модели, о мягкой силе становится возможным говорить, когда вместо системы дифференциальных уравнений рассматривается позиционная дифференциальная игра с управлениями в виде мальтузианских коэффициентов, ёмкостей сред и коэффициентов двойных стандартов для каждой из популяций, а выигрышами считаются итоговые численности популяций.

В этой ситуации одна из популяций может занизить видимую степень воздействия на популяцию-конкурента, при том, что фактическое воздействие окажется существенным.

В самом деле, рассмотрим ситуацию с точки зрения представителя одной из популяций, например, под номером 1. Ему для наблюдения могут быть доступны, например, величины

$$\frac{x_1}{x_1^*} \text{ и } m_{2,1} \frac{x_2}{x_2^*}$$

— то есть сила давления со стороны собственной популяции и второй популяции соответственно.

Кажется естественным, что эти величины можно сравнить с целью определения, какая из популяций является более «опасной»: а именно, большее значение величины соответствует большей кажущейся опасности. Таким образом, когда видимое давление со стороны второй популяции будет ниже давления со стороны собственной, первой популяции, представителем первой популяции может быть сделан вывод о том, что вторая популяция не является опасной.

При этом понятно, что этот вывод будет неверным: ведь, как подчёркнуто ранее, соотношение этих величин не связано с результатом моделирования, который определяется на основе одних лишь коэффициентов двойных стандартов. При этом сами эти коэффициенты связаны с внутренним взаимодействием в популяции и потому могут не наблюдаться представителями других популяций явно, что скрывает от них истинное положение дел.

Исходя из сказанного выше, одна популяция может применить «мягкую силу» по отношению к другой: для этого ей достаточно таким образом изменить свои ёмкость и коэффициент двойных стандартов, чтобы, во-первых, коэффициент двойных стандартов оказался выше единицы, а, во-вторых, видимое конкурентное давление на вторую популяцию оказалось меньшим, чем видимое давление внутри самой второй популяции. Если при этом другая популяция действительно окажется «убеждённой» в том, что первая популяция не опасна и будет к ней толерантна, то есть установит свой коэффициент двойных стандартов меньше единицы, это позволит первой популяции со временем вытеснить конкурента и заполнить всю ёмкость среды, максимизировав таким образом свой выигрыш.

Клеточно-автоматная модель многомерной конкуренции. Агентный аналог рассмотренной модели был предложен в работе [11]. Дадим описание этой модели, добавив небольшую модификацию: а именно, введём для каждой популяции дополнительный параметр P_j — силу конкурентного давления j -ой популяции.

Поле клеточного автомата имеет квадратную, тороидально замкнутую форму. Каждая клетка либо содержит особь одного из видов, либо остаётся пустой.

На каждом шаге моделирования, для каждой особи:

1) вычисляется конкурентное давление K на клетку, в которой находится данная особь (некоторого вида i). В данном случае, под этим понимается сумма произведений коэффициента двойных стандартов $m_{i,j}$ (отношений к обрабатываемой в данный момент особи) на P_j , где j пробегает всех особей, находящихся в окрестности Мура; если оно оказывается больше либо равным, чем K_i , то особь умирает (и последующие правила к ней не применяются); здесь K_i обозначает устойчивость к конкуренции для i -ой популяции — параметр модели, описывающий минимальный уровень конкурентного воздействия, выдержать который особь не способна;

2) если рядом (в смысле окрестности фон Неймана) с клеткой особи есть хотя бы одна свободная клетка, то особь переходит в случайную соседнюю свободную клетку (её старая клетка становится пустой);

3) возраст особи увеличивается на единицу. Если особь достигает брачного возраста, её возраст обнуляется — и, если на шаге 1 она перемещалась, то в покинутой клетке создаётся потомок — особь того же вида с нулевым возрастом.

Для данной модели можно рассмотреть и соответствующую ей позиционную игру: выигрышами здесь так же являются предельные

численности популяций, а управлениями — столбец матрицы двойных стандартов и значение силы конкурентного давления P_j .

Параметрами модели, таким образом, являются:

1. число популяций;
2. начальные численности популяций;
3. вектор брачных возрастов популяций;
4. матрица коэффициентов двойных стандартов;
5. вектор устойчивостей к конкуренции;
6. вектор сил конкурентного давления.

Размер поля зафиксируем равным 25×25 .

Рассмотрим возможности применения эффекта мягкой силы в рамках описанной модели.

В качестве «интуитивной оценки опасности» в данном случае будем рассматривать величину $D_{i,j}$ — видимое давление популяции j на популяцию i , вычисляемое по следующей формуле:

$$D_{i,j} = P_j \cdot m_{i,j}.$$

Проведём эксперимент со следующим набором параметров: возьмём две популяции с начальными численностями 20, брачным возрастом, равным 3 (для обеих популяций), устойчивости к конкуренции равной 3 (для обеих популяций), вектором сил конкурентного давления $(0,5;1)$ и матрицей коэффициентов двойных стандартов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

При рассмотренных значениях, значение $D_{2,1}$ видимого давления первой популяции на вторую оказывается равным $1,5 \cdot 0,5 = 0,75$, а значение $D_{2,2}$ внутреннего видимого давления внутри второй популяции равняется $1 \cdot 1 = 1$. Таким образом, представителям второй популяции может показаться, что первая популяция не представляет для них существенной угрозы. Более того, даже величина $D_{1,2} = 0,9$ оказывается меньшей, чем $D_{2,1}$, что означает, что видимое давление второй популяции на первую выше, чем видимо давление первой на вторую.

Результаты численного эксперимента. На рис. 1 в левой части представлено поле клеточного автомата и величины сил конкурентного давления, а в правой — графики численности двух популяций в различные моменты времени t (в условных единицах) и коэффициенты двойных стандартов, 1,5 — конкуренция с «чужими»

в 1,5 раза больше, чем со «своими», 0,9 — конкуренция с «чужими» составляет 90% внутривидовой конкуренции.

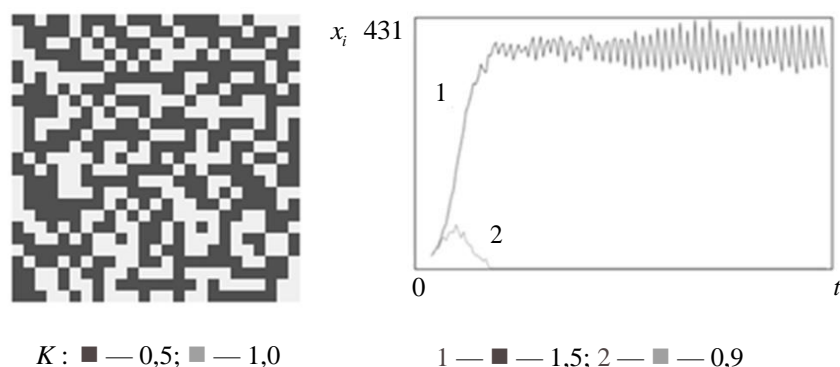


Рис. 1. Демонстрация эффекта мягкой силы

Как видно из эксперимента, первая популяция (x_1) без труда вытесняет вторую (x_2), как этого и можно было ожидать исходя из анализа непрерывной модели, т.к. коэффициенты двойных стандартов явно говорят «в пользу» первой популяции.

Рассмотрим результаты еще нескольких экспериментов.

На всех рисунках слева — игровое поле в конечный момент игры, когда уже осталась только одна популяция. Темные клетки заняты ее представителями, светлые — пустые. Пустые клетки остаются на поле из-за внутривидовой конкуренции.

Справа — графики численностей популяций. По оси абсцисс — время (в шагах моделирования). По оси ординат — численности популяций в штуках. Графики могут начинаться с положительного времени из-за особенности реализации имитационной программы: поле графика рассматривается как некое окно, на правой стороне которого все время появляются новые текущие численности популяций. Постепенно график продвигается справа налево, сколько помещается в окне. Поэтому, если прекратить эксперимент до того, как начальные численности популяций доберутся до левой стороны окна (например, из-за того, что одна из популяций уже исчезла и больше ничего интересного не произойдет), — создается впечатление, что эксперимент начинался с положительного времени (что несущественно, т.к. начало отсчета времени всегда относительно).

На рис. 2 приведены результаты эксперимента, в котором начальные численности обеих популяций равны 20, устойчивость к конкуренции — 2 для обеих популяций, а брачный возраст первой популяции вдвое больше, чем у второй: 4 против 2 (сила конкурентного давления и таблица двойных стандартов показаны на рис. 2).

Данный эксперимент демонстрирует, что даже более быстрый темп размножения не является гарантией выживания для второй популяции. Несмотря на то, что первая популяция размножается медленнее, а её видимое давление на вторую популяцию меньше видимого давления внутри второй популяции, именно первая популяция со временем вытесняет вторую — пусть даже в начале вторая популяция и обладает кратковременным преимуществом по численности. Это демонстрирует возможность применения «мягкой силы» даже в случае неблагоприятного значения параметра брачного возраста.

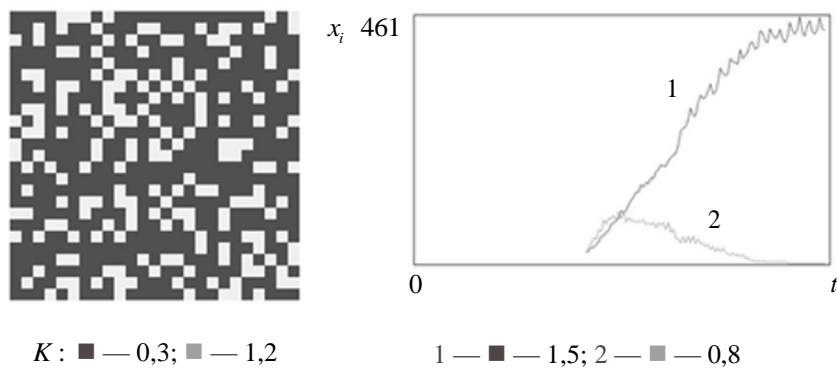


Рис. 2. Замедленное размножение первой популяции

На рис. 3 изображены результаты моделирования при начальных численностях популяций, равных 20, брачном возрасте равном 3 для обеих популяций; устойчивость к конкуренции при этом для первой популяции равна 2, а для второй — 3. Как видно из результатов, более высокая устойчивость к конкуренции так же не является залогом выживания. Со временем, первая популяция вновь вытесняет вторую (и, при этом, её видимое давление на вторую популяцию оказывается меньшим видимого давления внутри второй популяции).

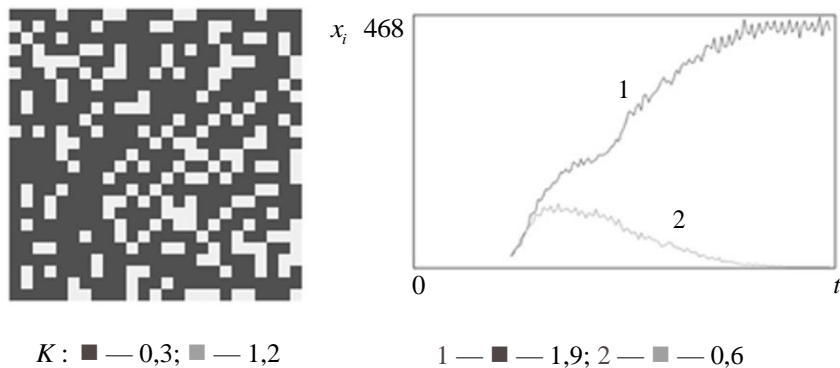


Рис. 3. Увеличенная стойкость у второй популяции

На рис. 4 приведены результаты эксперимента, в котором брачные возрасты обеих популяций равны 3, устойчивость к конкуренции для обеих популяций равна 3, а начальные численности различаются: 200 у второй популяции и 20 у первой. Несмотря на десятикратное начальное отставание в численности, первой популяции удаётся вытеснить вторую за совсем небольшой временной промежуток. При этом её видимое давление по-прежнему остаётся сравнительно небольшим.

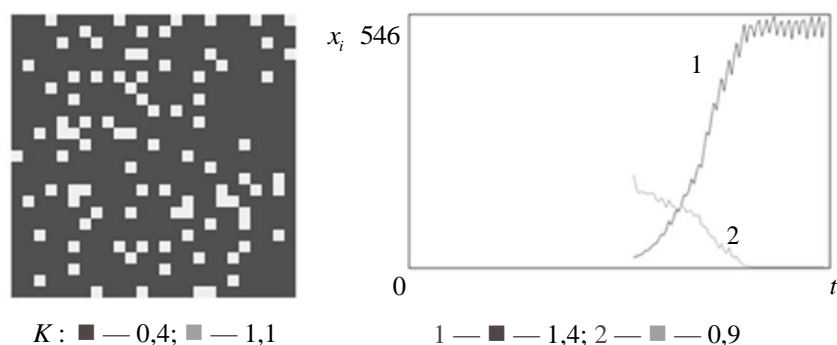


Рис. 4. Увеличенная начальная численность второй популяции

На рис. 5 показано, что тем не менее, для построенной агентной модели нельзя получать однозначный вывод о результате моделирования на основе матрицы коэффициентов двойных стандартов, как это удавалось сделать в случае системного-динамического описания. Приведённый на рис. 5 эксперимент повторяет условия эксперимента с рис. 3, за исключением коэффициентов двойных стандартов (уменьшены нетерпимость первой популяции и толерантность второй, а конкурентное давление первой на вторую по-прежнему в четыре раза ниже внутреннего давления во второй популяции). Здесь, несмотря на благоприятные для первой популяции коэффициенты двойных стандартов, в итоге выживают представители второй популяции (поэтому «живые» клетки на рабочем поле серые, а не черные как на предыдущих рисунках).

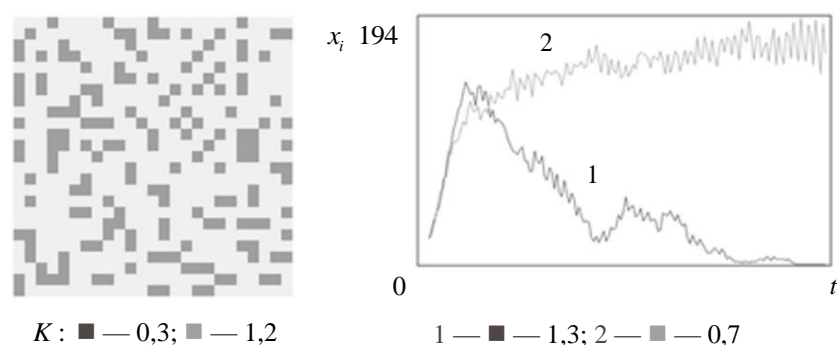


Рис. 5. Увеличенная стойкость второй популяции; изменена матрица коэффициентов двойных стандартов

Наконец, на рис. 6 представлены результаты эксперимента для случая трёх популяций. Для всех трёх популяций были выбраны одинаковые значения начальных численностей — по 20, брачного возраста — по 3 и устойчивости к конкуренции — по 3. В данном примере, вторая и третья популяции наблюдают высокое видимое давление не только внутри своей популяции, но и по отношению друг к другу. Несмотря на это, реальную опасность для них представляет именно первая популяция: в итоге именно она вытесняет и вторую, и третью популяции и целиком захватывает все игровое поле (внутренняя конкуренция оставляет пустые клетки). Графики вымирающих популяций практически совпадают. Отметим, что в трехмерном случае под графиком динамики популяций показана вся матрица конкуренции. Из-за особенностей имитационной программы она транспонирована по сравнению с аналогичной матрицей из работы [14].

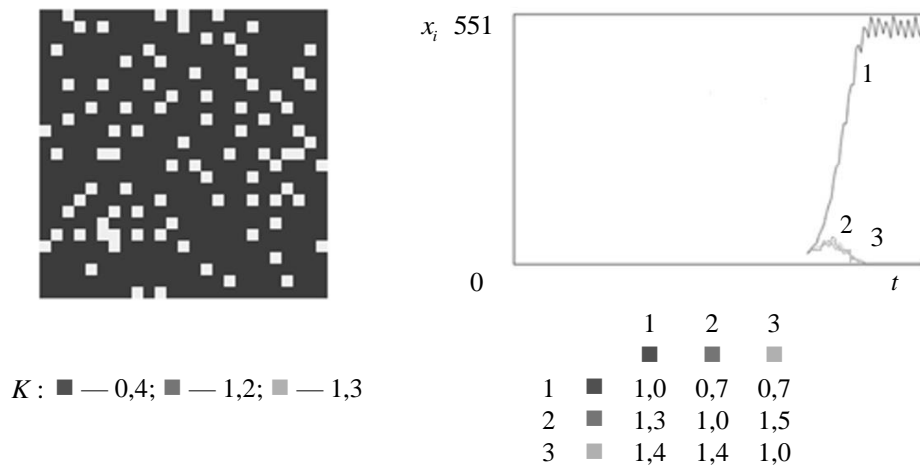


Рис. 6. Эксперимент с тремя популяциями

Выводы. В работе рассмотрены системно-динамическое и агентное описание модели конкуренции, осуществлена попытка переноса прогнозов поведения непрерывной модели на дискретную модель. Проведённые имитационные эксперименты как показывают возможность применения прогнозов, полученных в одной модели, к другой, так и демонстрируют наличие ограничений при подобных переходах.

Показана возможность применения «мягкой силы» в клеточно-автоматной модели конкуренции, в том числе в случае отличающихся для различных популяций значений параметров модели, а также в многомерном случае (при количестве популяций, большем 2-х). Тем не менее, в пятом эксперименте (рис. 5) произошла «осечка», почему? Следует отметить, что даже игра WaToг [13] оказывается гораздо

более капризной, по сравнению с непрерывной моделью «хищник-жертва». В отличие от последней, она выходит на колебания далеко не при любых положительных начальных условиях и значениях параметров. Если параметры и начальные условия подобраны плохо — вполне возможны ситуации, когда все акулы умирают с голоду, а рыбы занимают все рабочее поле. Или наоборот — акулы съедают всех рыб, после чего погибают от голода сами.

Нечто подобное происходит и в нашем пятом эксперименте. Нетерпимость нетерпимой стороны и толерантность толерантной не слишком ярко выражены, в то время как сила внутреннего конкурентного давления толерантной стороны существенно (в 4 раза) превышает давление на нее нетерпимой стороны. Дискретная модель не справляется с такими значениями параметров, как это бывает и в игре WaTog. Тем не менее, в достаточно широком диапазоне более сбалансированных параметров модели (эксперименты 1–4 и 6) эффект «мягкой силы» имеет место.

Работа выполнена в рамках проекта АААА-А20-120122190034-9.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дородницын А.А. Избранные научные труды. Т. 2. Москва, ВЦ РАН, 1997, 352 с.
- [2] Петров И.Б. О возможности моделирования социально-исторических процессов. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических систем*, 2019, т. 34, № 1, с. 5–17.
- [3] Петров И.Б. Инварианты и закономерности в неравновесной динамически развивающейся социальной системе. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических систем*, 2020, т. 35, № 1, с. 5–53.
- [4] Петров И.Б. О принципах построения математических моделей для описания динамических процессов в больших социальных группах. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических систем*, 2021, т. 36, № 1, с. 5–25.
- [5] Димитриенко Ю.И., Димитриенко О.Ю. Модель многомерной деформируемой сплошной среды для прогнозирования динамики больших массивов индивидуальных данных. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, №1, с. 105–122.
- [6] Бродский Ю.И. Математическое моделирование межкультурных отношений. *Сборник трудов международной научной конференции Стены и Мосты VII. Междисциплинарность: что от историка требует, что дает и чего лишает?* Москва, РГГУ, 2019, с. 44–55.
- [7] Белотелов Н.В. Имитационная модель процессов миграции в странах с учетом уровня образования. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 91–99.
- [8] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование*. Москва, Наука, 1976, 287 с.
- [9] Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2019, т. 11, № 1, с. 9–57.

- [10] Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Влияние точечных дефектов структуры клеточно-автоматного вычислителя на решение 2D скалярного волнового уравнения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 3–19.
- [11] Баранов Р.А., Бродский Ю.И. Игра клеточных автоматов для многомерных уравнений конкуренции. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов*, 2018, № 1, с. 121–129.
- [12] Бобров В.А., Бродский Ю.И. Фактор конкуренции в модели хищник-жертва, реализованной клеточными автоматами. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов*, 2018, № 1, с. 130–141.
- [13] Дьюдни А. Акулы и рыбы ведут экологическую войну на тороидальной планете Аква-Гор. *В мире науки*, 1984, № 2, с.79–84.
- [14] Бродский Ю.И. Колебания в многомерных нечетных конкурентных системах. *Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов*, 2010, № 1, с. 7–24.

Статья поступила в редакцию 09.09.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бобров В.А., Бродский Ю.И. Моделирование клеточными автоматами эффектов двойных стандартов и мягкой силы при конкуренции. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 121–134.

Бобров Владимир Андреевич — аспирант МПГУ. e-mail: bobrov1505@yandex.ru

Бродский Юрий Игоревич — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН. e-mail: yury_brodsky@mail.ru

Modeling of the effects of double standards and soft power in competition by cellular automata

© V.A. Bobrov¹, Yu.I. Brodsky²

¹Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russia

²FRC CSC RAS, Moscow, 119333, Russia

We consider a discrete analog of the classical A. Lotka – V. Volterra competition model in the environment of cellular automata. In the classical model, we know that the type of its evolution over time primarily depends on the coefficients of double standards affiliation to certain ranges of their possible values. The paper shows that the same situation holds for the discrete model either. We can see there is a soft power effect for the classical model. The classic competition model turns into a cooperative positional differential game, the limitations of which are the original system of competition equations by A. Lotka – V. Volterra. The controls are the coefficients of double standards when considering it concerning social systems. The effect of soft power is that the parties tend to compare the competitive pressure on them by the rival population with the one within the domestic population and may take the less stress of the opponent for his favorable attitude towards them, and more extensive — for the hostile manifestation. Whereas comparing the external competitive pressure with the internal pressure in this game does not give us any information — everything depends exclusively on the coefficients of double standards, which are controls and therefore are unavailable to the opponents in this game. Simulation experiments with the discrete analog of the competition model implemented in the cellular automata environment show that the effect of soft power also takes place in this case.

Keywords: *competition model, cellular automata, double standards, soft power, differential game, simulation*

REFERENCES

- [1] Dorodnitsyn A.A. *Izbrannye nauchnye trudy. T. 2.* [Selected scientific works. Vol. 2]. Moscow, VC RAS Publ., 1997, 352 p.
- [2] Petrov I.B. O vozmozhnosti modelirovaniya social'no-istoricheskikh processov [On the possibility of modeling socio-historical processes]. *Modelirovanie, dekompozitsiya i optimizatsiya slozhnykh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2019, vol. 34, no. 1, pp. 5–17.
- [3] Petrov I.B. Invarianty i zakonomernosti v neravnovesnoj dinamicheski razvivayushchey social'noj sisteme [Invariants and regularities in a nonequilibrium dynamically developing social system]. *Modelirovanie, dekompozitsiya i optimizatsiya slozhnykh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2020, vol. 35, no. 1, pp. 5–53.
- [4] Petrov I.B. O principah postroeniya matematicheskikh modelej dlya opisaniya dinamicheskikh processov v bol'shih social'nykh gruppah [On the principles of constructing mathematical models to describe dynamic processes in large social groups]. *Modelirovanie, dekompozitsiya i optimizatsiya slozhnykh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2021, vol. 36, no. 1, pp. 5–25.
- [5] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko O.Y. A model of multidimensional deformable continuum for forecasting the dynamics of large scale array of individual data. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 105–122.
- [6] Brodskii Yu.I. Mathematic modeling for intercultural relations. *Proceedings of the International Scientific Conference Walls and Bridges VII. Interdisciplinarity: what does the historian require, what does he give and what does he deprive?* Moscow, RSUH Publ., 2019, pp. 44–55.
- [7] Belotelov N.V. Simulation model of migration processes in countries taking into account the level of education. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 4, pp. 91–99.
- [8] Volterra V. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie.* Paris, GauthierVillars, 1931, 240 p.
- [9] Matyushkin I.V., Zapletina M.A. Cellular automata review based on modern domestic publications. *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 9–57.
- [10] Matyushkin I.V., Zapletina M.A. Influence of point defects in the structure of a cellular-automaton calculator on the solution of a 2D scalar wave equation. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 3, pp. 3–19.
- [11] Baranov R.A., Brodsky Yu.I. Igra kletochnykh avtomatov dlya mnogomernykh uravnenij konkurencii [A game of cellular automata for multidimensional competition equations]. *Modelirovanie, dekompozitsiya i optimizatsiya slozhnykh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2018, no. 1, pp. 121–129.
- [12] Bobrov V.A., Brodsky Yu.I. Faktor konkurencii v modeli hicschnik-zhertva realizovannoi kletochnymi avtomatami [Competition factor in the predator-prey model implemented by cellular automata]. *Modelirovanie, dekompozitsiya i optimizatsiya slozhnykh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2018, no. 1, pp. 130–141.
- [13] Dewdney A. Sharks and fish Wage an ecological War on the toroidal planet Wa-Tor. *Scientific American*, 1984, no. 12, pp. 14–22.

- [14] Brodsky Yu.I. *Kolebanija v mnogomernych nechetnyh konkurentnyh sistemach*. [Oscillations in multidimensional odd competitive systems]. *Modelirovanie, dekompoziciya i optimizaciya slozhnyh dinamicheskikh processov* [Modeling, Decomposition and optimization of complex dynamic processes], 2010, no. 1, pp. 7–24.

Bobrov V.A., postgraduate Ph.D. student of Moscow Pedagogical State University.
e-mail: bobrov1505@yandex.ru

Brodsky Yu.I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), leading researcher of the FRC CSC RAS.
e-mail: yury_brodsky@mail.ru