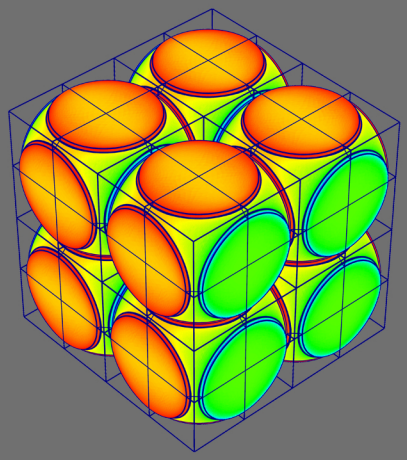
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Стратула Б.А. Математическое моделирование усталостного разрушения при высокочастотных изгибных колебаниях образцов из титановых сплавов. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 4, с. 45–57.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/263/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.24
17.11.2026 03:53:42

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-4557

Математическое моделирование усталостного разрушения при высокочастотных изгибных колебаниях образцов из титановых сплавов

© Б.А. Стратула

ИАП РАН, Москва, 123056, Россия

На основе мультирежимной двухкритериальной модели циклической повреждаемости описан единообразный численный метод расчета различных режимов усталостного разрушения от малоцикловой до сверхмногоцикловой усталости. Этот метод позволяет проводить сквозной расчет эволюции трещиноподобных зон усталостного разрушения в материале, а также оценивать долговечность образцов от зарождения трещины до макроразрушения. Проведены расчеты усталостного разрушения образцов из титанового сплава при длительном циклическом нагружении по схеме трехточечного изгиба с развитием «квазитрещин» в режимах от многоцикловой до сверхмногоцикловой усталости. Проведено сравнение численных и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: *сверхмногоцикловая усталость, повреждаемость, усталостное разрушение, высокочастотные колебания, титановый сплав*

Введение. В данной работе исследуется процесс развития усталостных повреждений с использованием теории циклической повреждаемости. В применении к задачам циклического нагружения и усталостного разрушения подход, основанный на теории повреждаемости, был применен в [1,2]. Мультирежимная модель развития усталостного разрушения с использованием эволюционного уравнения для функции повреждаемости была предложена в [3,4]. Однокритериальная версия этого уравнения была описана в [3]. Затем в [4] была предложена двухкритериальная кинетическая модель повреждаемости. Для определения коэффициентов кинетического уравнения повреждаемости использовались известные критерии многоосного усталостного разрушения: критерий Смита-Ватсона-Топпера (SWT) [5,6], в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального раскрытия, и критерий Карпинтери-Спаньоли-Вантадори (CSV) [7], в котором заложен механизм, связанный с развитием сдвиговых микротрещин.

При сложном напряженном состоянии в используемой модели возможна реализация любого из рассмотренных механизмов развития трещин.

Параметры модели определены для различных режимов усталостного разрушения от МЦУ, МНЦУ до СВМУ [9]. На основе этой комплексной модели в [3,4] был предложен численный метод расчета трещиноподобных зон вплоть до макроразрушения. В данной

работе модель повреждаемости и численная процедура используются для воспроизведения результатов МНЦУ и СВМУ испытаний на трехточечный изгиб [10,11] и соответствующих экспериментальных усталостных кривых.

Мультирежимная модель усталостного разрушения. Классические представления линейной механики циклического разрушения связывают условия развития усталостных трещин при увеличении числа циклов с амплитудами коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины на основе уравнения Парис и его модификаций [12,13].

Иной подход использует представления теории повреждаемости, заложенной в работах [14,15] и развитый в [1,16]. В приложении к задачам усталостного разрушения он применялся в [2–4,17–20].

В данной работе описывается мультирежимная модель развития усталостного разрушения, основанная на эволюционном уравнении для функции повреждаемости [3,4,19,20]. Предполагается, что процесс повреждения материала связан с деградацией (ослаблением) его модулей упругости за счет нарастания количества внутренних микродефектов. При этом реализуются два механизма — развития микротрещин нормального отрыва или микротрещин сдвига. Им соответствуют ассоциированные критерии многоосного усталостного разрушения при циклическом однородном нагружении. Усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами нормального отрыва соответствует критерий SWT [5,6], а усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами сдвига соответствует критерий CSV [7].

Эти и иные многоосные критерии (см. обзор [9]) получены обобщением закономерностей, установленных для одноосных нагружений и описываемых усталостными $S-N$ кривыми типа Веллера и соотношениями типа Баскина [21]. В [8] был предложен подход для экстраполяции многоосных критериев разрушения, построенных для режима МНЦУ, на правые ветви усталостных кривых в режиме СВМУ, и использующий опорные точки каждой из ветвей и обратную степенную зависимость от числа циклов N для выхода на асимптоту предела усталости.

Для выделения различных режимов усталостного разрушения используется схема мультирежимной (бимодальной) усталостной кривой с амплитудой σ_a при одноосном нагружении, представленная на рис. 1. Вплоть до значения $N_i \sim 10^2 - 10^3$ реализуется режим повторно-статического нагружения с амплитудой, мало отличающейся от статического предела прочности σ_B. Сами эти режимы на левой ветви усталостной кривой отделяются величиной амплитуды

нагружения, равной пределу текучести материала σ_T. Затем начинается зона смены механизмов разрушения и дальнейшее падение усталостной прочности, начиная с величин $N \sim 10^8$, до нового предельного значения $\tilde{\sigma}_u$ в соответствии с правой ветвью бимодальной усталостной $S-N$ кривой. Эта ветвь описывает режим СВМУ [22].

Граница повторно-статического диапазона $N_i \sim 10^2 - 10^3$ 10^3 довольно условна. Она уточняется в зависимости от прочностных и пластических характеристик материала.

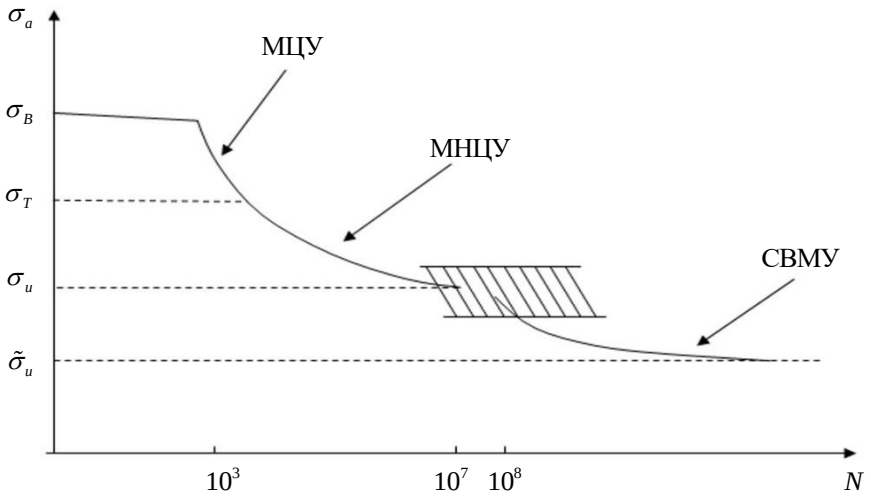


Рис. 1. Схема режимов усталостного разрушения на основе бимодальной усталостной кривой

Сформулируем аналитически мультирежимную модель развития повреждений при циклическом нагружении, все основные положения которой ранее были развиты в [3,4,19].

При ее изложении мы ограничимся рассмотрением только части левой ветви усталостной кривой в режиме МНЦУ (напряжения не превышают предела текучести) и, следовательно, задачу определения напряженного состояния в пределах цикла нагружения можно решать в упругой постановке.

В общем виде в результате обобщения соотношения Баскина [21] на случай многоосного нагружения для описания классической (левой) ветви усталостной кривой многоосный критерий в режиме МНЦУ выглядит следующим образом:

$$\sigma_{eq} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \tag{1}$$

где σ_{eq} — эквивалентное напряжение, обобщающее понятие

амплитуды при одноосном циклическом нагружении на случай многоосного нагружения, для выбранного критерия усталостного разрушения, а β_L — показатель, характеризующие степень ниспадания левой ветви бимодальной усталостной кривой.

Из условия перехода от повторно-статического режима к левой ветви усталостной кривой на уровне амплитуды напряжений для реверсивного цикла $\sigma_a = \sigma_B$ получается значение для коэффициента σ_L (для определенности выбрано значение $N_i = 10^3$):

$$\sigma_L = 10^{3\beta_L}\left(\sigma_B - \sigma_u\right).$$

В этих формулах σ_B — статический предел прочности материала, σ_u — классический предел усталости материала при реверсивном цикле (коэффициент асимметрии цикла $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = -1$).

С учетом подхода [8] для экстраполяции многоосных критериев разрушения на режим СВМУ путем замен $\sigma_B \to \sigma_u$, $\sigma_u \to \tilde{\sigma}_u$ получаются многоосные критерии усталостного разрушения в режиме СВМУ:

$$\sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_u + \sigma_V N^{-\beta_V}. \qquad (2)$$

Из условия перехода от левой ветви бимодальной усталостной кривой к правой ветви СВМУ на уровне амплитуды напряжений для реверсивного цикла $\sigma_a = \sigma_u$ при $N = 10^8$ получается значение коэффициента σ_V:

$$\sigma_V = 10^{8\beta_V}\left(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u\right),$$

где β_V — показатель, характеризующий степень ниспадания правой ветви бимодальной усталостной кривой.

Кинетическое уравнение для функции повреждаемости материала ψ, предложенное в [3,4,19], имеет вид:

$$\partial\psi \big/ \partial N = B\left(\sigma, \Delta\sigma\right)\psi^{\gamma} \big/ \left(1 - \psi^{1-\gamma}\right). \qquad (3)$$

Интегрирование при однородном напряженном состояния до величины $\psi = 1$, соответствующей полному разрушению материальной частицы, дает значения коэффициента B [3,4,19]:

- при $\sigma_u + \Delta\sigma_u < \sigma_{eq} < \sigma_B$ (режим МНЦУ, $\Delta\sigma_u = 10^{-5\beta_L}\left(\sigma_B - \sigma_u\right)$)

$$B = B_L = 10^{-3}\left[\left\langle \sigma_{eq} - \sigma_u \right\rangle \big/ \left(\sigma_B - \sigma_u\right)\right]^{1/\beta_L} \Big/ \left(1 - \gamma\right)/2;$$

- при $\tilde{\sigma}_u < \sigma_{eq} \le \sigma_u + \Delta\sigma_u$ (режим СВМУ)

$$B = B_L = 10^{-3}\left[\left\langle \sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u \right\rangle / \left(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u\right)\right]^{1/\beta_V} \Big/ \left(1-\gamma\right)/2;$$

- при $\sigma_{eq} \le \tilde{\sigma}_u$ усталостного разрушения не происходит, при $\sigma_{eq} \ge \sigma_B$ оно наступает мгновенно.

Значение коэффициента $0 < \gamma < 1$ определяется по результатам согласования расчетных и экспериментально построенных усталостных кривых, $\langle f \rangle = fH(f)$, $H(f)$ — функция Хэвисайда.

Выражения для эффективных напряжений σ_{eq} определяются выбранными критериями полного усталостного разрушения для двух типов повреждаемости, связанных с механизмами развития микротрещин нормального отрыва или сдвига.

Многоосный критерий SWT описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин нормального отрыва [5,6,19]:

$$\sqrt{\left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle \Delta\sigma_1 / 2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \tag{4}$$

где $\sigma_{1_{\max}}$ — максимальное значение главного (растягивающего) напряжения, $\Delta\sigma_1$ — его размах в цикле нагружения.

Следовательно, в этом случае:

$$\sigma_{eq} = \sigma^n = \sqrt{\left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle \Delta\sigma_1 / 2} = \left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle = \sigma_{1_{\max}} H\left(\sigma_{1_{\max}}\right).$$

Многоосный критерий CSV описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин сдвига [7,19]:

$$\sqrt{\left(\left\langle \Delta\sigma_n \right\rangle / 2\right)^2 + 3\left(\Delta\tau_n / 2\right)^2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \tag{5}$$

здесь $\Delta\tau_n$ — размах касательного напряжения на площадке, где оно достигает максимального значения (критической площадке), $\Delta\sigma_n$ — размах нормального напряжения на этой площадке.

В этом случае:

$$\sigma_{eq} = \sigma^\tau = \sqrt{\left(\left\langle \Delta\sigma_n \right\rangle / 2\right)^2 + 3\left(\Delta\tau_n / 2\right)^2},$$

$$\left\langle \Delta\sigma_n \right\rangle = \Delta\sigma_n H\left(\sigma_{n_{\max}}\right).$$

Предполагается, что начальное зарождение зоны повреждения в частице материала с ростом числа циклов нагружения, связанное с появлением отличного от нуля значения коэффициента B в

кинетическом уравнении, происходит при каком-то значении $\sigma_{eq} = \max\left(\sigma^n, \sigma^\tau\right)$ и определяет дальнейший тип повреждаемости в этой частице по механизму развития микротрещин нормального отрыва, если $\max\left(\sigma^n, \sigma^\tau\right) = \sigma^n$, или по механизму развития микротрещин сдвига, если $\max\left(\sigma^n, \sigma^\tau\right) = \sigma^\tau$.

Развитие повреждаемости в материальной частице приводит к эффективному уменьшению модулей упругости $\lambda(\psi)$ и $\mu(\psi)$, в общем случае по нелинейному закону, а в используемом варианте модели — по кусочно-линейному закону следующего вида:

- деградация материала при $\psi = \psi_*$

$$\lambda(\psi) = \lambda_0(1 - \kappa\psi), \quad \mu(\psi) = \mu_0(1 - \kappa\psi); \tag{6}$$

- полное разрушение при $\psi \le \psi_* \le 1$

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

Здесь $\psi_* \tilde{<} 1$ — критическое значение повреждаемости, при котором наступает состояние полного разрушения (рис. 2).

Алгоритм численного расчёта повреждаемости. Численный метод расчета зон повреждаемости заключается в пошаговом (по циклам нагружения) расчете упругого напряженного состояния образца материала или элемента конструкции, параллельно с численным решением нелинейного уравнения для повреждаемости (3) и корректировкой модулей упругости среды в областях, где функция повреждаемости отлична от нуля (6). Такие области становятся дополнительными концентраторами напряжений, а локализованные зоны полного разрушения в указанном выше смысле трактуются как квазитрещины. Выход квазитрещин на границы нагружаемого тела рассматривается как его окончательное макроразрушение.

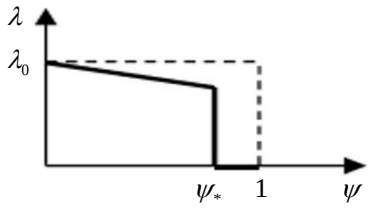


Рис. 2. Нелинейная зависимость модулей упругости от функции повреждаемости. Состояние полного разрушения достигается при $\psi_* \le \psi \le 1$

Для интегрирования уравнения (3) применялась аппроксимация функции повреждаемости в k – узле расчетной сетки при заданных дискретных значениях ψ_k^n в моменты N^n и искомых значениях ψ_k^{n+1} в моменты N^{n+1}.

Была применена схема аппроксимации нелинейного уравнения для повреждаемости, построенная на пошаговом аналитическом

интегрировании кинетического уравнения при фиксированном напряженном состоянии с предыдущего шага расчета по циклам нагружения:

$$\left[\psi^{1-\gamma}/(1-\gamma)-\psi^{2(1-\gamma)}/2/(1-\gamma)\right]\Big|_{\psi_k^n}^{\psi_k^{n+1}} = B^n\, N\Big|_{N^n}^{N^{n+1}},$$

где $k-$ номер узла расчетной сетки, $n-$ номер шага по числу циклов. Такой алгоритм соответствует явно-неявной схеме (явной по расчету поля напряжений и неявной по расчету функции повреждаемости).

Формула для функции повреждаемости на верхнем слое имеет вид:

$$\psi_k^{n+1} = \left(1-\sqrt{\left(1-\left(\psi_k^n\right)^{1-\gamma}\right)^2 - 2(1-\gamma)B^n\Delta N^n}\right)^{1/(1-\gamma)}, \qquad (7)$$

шаг расчета по числу циклов определяется следующим образом:

$$\Delta\tilde{N}_k^n = \left[\psi^{1-\gamma}/(1-\gamma)-\psi^{2(1-\gamma)}/2/(1-\gamma)\right]\Big|_{\psi_k^n}^{1} \Big/ B^n,$$
$$\Delta N^n = \min_k 0{,}5\Delta\tilde{N}_k^n. \qquad (8)$$

При численной реализации коэффициент Пуассона материала не меняется, а модуль упругости Юнга с ростом функции повреждаемости уменьшается по закону, в котором заложено его малое остаточное значение в состоянии полного разрушения, равное (для определенности) тысячной доле от начального значения:

$$E_k^{n+1} = E_0\left(1-\kappa\psi_k^{n+1}\right)\left(H\left(\psi_* - \psi_k^{n+1}\right)+0{,}001\right). \qquad (9)$$

Такой алгоритм позволяет вести сквозной расчет усталостного разрушения с образованием и распространением квазитрещин без их явного выделения и на фиксированной сетке.

Упругие расчеты цикла нагружения в квазистатическом режиме (МНЦУ) и в динамическом режиме (высокочастотные осцилляции, СВМУ) выполнялись с помощью пакетов программ АСТРА и ANSYS. Расчёт в динамическом режим, не смотря на возможность простого ввода коэффициента динамичности в квазистатику, позволяет так же оценить резонансные частоты образца, а так же дрейф этих частот по мере развития повреждаемости. Это может быть полезно при использовании подхода, изложенного в [23]. Пакет АСТРА разработан на основе безматричного варианта МКЭ и применялся для решения широкого круга задач механики сплошных сред [24,25].

Пакеты были дополнены кодом для расчета кинетики усталостной повреждаемости и изменения модулей упругости в соответствии с изложенным выше алгоритмом.

Результаты расчёта. Для определения влияния предложенной схемы на усталостное поведение образца была проведена серия численных экспериментов. Были проведены расчеты усталостного разрушения образцов при циклическом нагружении по схеме трехточечного изгиба с развитием трещиноподобных зон разрушения в режимах от МНЦУ до СВМУ. Аналитический расчет геометрических и частотных параметров этой схемы нагружения в упругом режиме приведен в [10].

Было проведено сравнение численных расчётов и результатов натурных экспериментов с титановым сплавом Ti-6Al-4V. Использованы экспериментальные результаты, полученные по методике [11] при частоте нагружения 20 кГц. Физические и прочностные свойства следующие: $\sigma_B = 900$ МПа, $\sigma_u = 245$ МПа, $\tilde{\sigma}_u = 185$ МПа, $\rho = 4500$ кг/м^3, $\nu = 0,37$, $\beta_L = 0,38$, $\beta_V = 0,33$. Для расчетов взяты значения параметров модели $\kappa = 0,5$, $\gamma = 0,5$, $\psi_* = 0,98$.

Размер бруса составляет $26 \times 6,5 \times 3$ мм. Расчетная сетка с высокочастотной схемой нагружения показана на рис. 3. Расстояние между узлами конечно-элементной сетки образца в центре составляет $0,4$ мм, а по краям — $0,8$ мм.

Поля напряжений при различных значениях числа циклов, а также развитие зон усталостного повреждения ("квазитрещины" нормального отрыва) показаны на рис. 4, 5 серым цветом. Расчеты показали, что после момента прохождения квазитрещины примерно половины пути до границы образца, дальнейший ее выход на границу происходит лавинообразно, и его можно считать моментом практического макроразрушения.

Аналогичными расчетами многих вариантов амплитуд циклического нагружения бруса при трехточечном изгибе были получены точки амплитудной усталостных кривых, полученных при испытаниях на трехточечный изгиб [11] Результаты численного моделирования показаны на рис. 6.

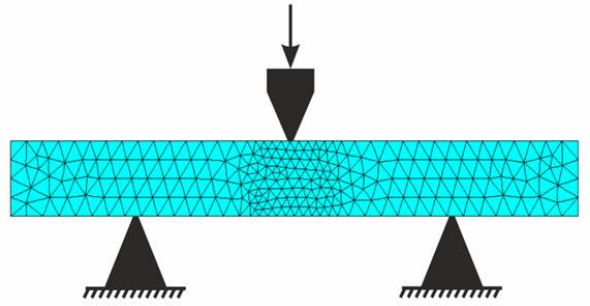
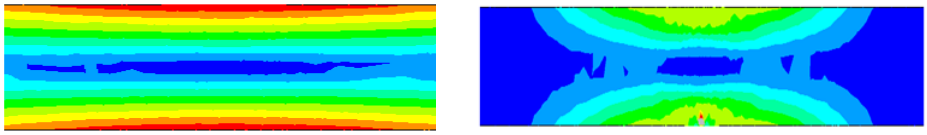
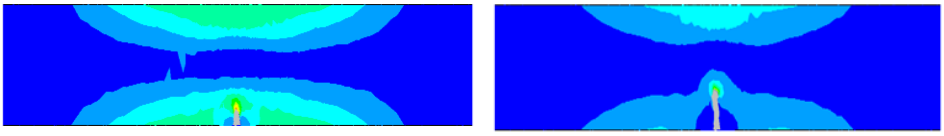


Рис. 3. Расчетная сетка и схема высокочастотного нагружения



а *б*

Рис. 4. Поле эффективных напряжений в начальный момент:
а — при зарождении квазитрещины; *б* — $3,249 \cdot 10^9$ циклов



а *б*

Рис. 5. Поле эффективных напряжений в момент развития квазитрещины:
а — $3,25 \cdot 10^9$ циклов от начала и $1,1 \cdot 10^6$ циклов от момента зарождения;
б — в момент разрушения образца, $1,3 \cdot 10^6$ циклов от момента зарождения

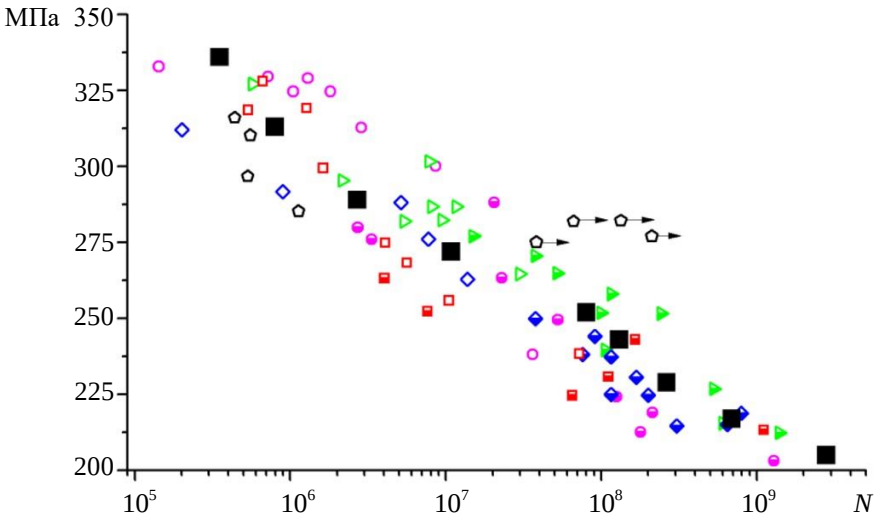


Рис. 6. Расчетная кривая усталости (черные прямоугольники)
и экспериментальные данные [11]

Экспериментальные результаты, полученные для титанового сплава с различными технологиями термической обработки, отмечены цветами на рис. 6. Влияние этих технологий обработки не учитывается в используемой модели. Полученная расчетная усталостная кривая хорошо коррелируют с усредненными экспериментальными данными.

Поскольку усталостные кривые, построенные по точкам разных цветов (т.е. по способам обработки исходных сплавов), хорошо разделяются, то их также не сложно воспроизвести. Для этого нужно немного уточнить параметры модели σ_B, σ_u, $\tilde{\sigma}_u$ в соответствии с

усталостными кривыми, разделенными по способам обработки сплава. Отметим также, что рассматриваемый диапазон циклических испытаний охватывает диапазон от $N \sim 10^5$ до $N \sim 10^9$ (режимы МНЦУ и СВМУ, соответственно), при этом численное моделирование усталостных экспериментов для трехточечного изгиба проводилось в рамках модели циклической повреждаемости с использованием единообразной численной процедуры.

Заключение. Сформулирована двухкритериальная кинетическая модель повреждаемости для описания развития процесса усталостного разрушения при циклическом нагружении. На её основе предлагается процедура расчета коэффициентов кинетического уравнения для различных режимов усталостного разрушения от малоцикловой до сверхмногоцикловой усталости.

Для численного решения уравнения повреждаемости и расчета развития трещиноподобных зон используется неявная схема. Оценивается долговечность образцов от зарождения усталостного разрушения до макроразрушения.

Проведены расчеты усталостного разрушения образцов при циклическом нагружении по схеме трехточечного изгиба с развитием трещиноподобных зон разрушения в режимах от МНЦУ до СВМУ. Проведено сравнение численных и экспериментальных результатов для образцов из титановых сплавов.

Данное исследование выполнено в рамках Госзадания ИАП РАН.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge, Cambridge University Press, 1994, 582 p.

[2] Marmi, A.K., Habraken, A.M., Duchene, L. Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti-6Al-4V alloy. *International Journal of Fatigue*, 2009, vol. 31, iss. 11–12, pp. 2031–2040.

[3] Никитин И.С., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений. *Прикладная математика и механика*, 2020, т. 84, № 5, с. 687–698.

[4] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. Complex model for fatigue damage development. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2312, art no. 050015.

[5] Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, 1970, vol. 5, no. 4, pp. 767–778.

[6] Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 91, pp. 337–351.

[7] Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion. *International Journal of Fatigue*, 2011, vol. 33, pp. 969–976.

[8] Burago N.G., Nikitin I.S. Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and very-high-cycle fatigue modes. *Computational Methods in Applied Sciences*, 2016, vol. 40, pp. 117–130.

[9] Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2011, № 6, с. 22–33.
[10] Xue H.Q., Tao H., Montembault F., Wang Q.Y., Bathias C. Development of a three-point bending fatigue testing methodology at 20 kHz frequency. *International Journal of Fatigue*, 2007, vol. 29, iss. 9–11, pp. 2085–2093.
[11] Wang B., Cheng L., Cui W., Chen X., Wang C., Li D. Effect of forging process on high cycle and very high cycle fatigue properties of TC4 titanium alloy under three-point bending. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2021, vol. 44, iss. 8, pp. 2054–2069.
[12] Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 1963, vol. 85, iss. 4, pp. 528–533.
[13] Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design: analysis, prediction, prevention*. New-York, Wiley Press, 1993, 654 p.
[14] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. *Известия АН СССР. Отделение технических наук*, 1958, № 8, с. 26–31.
[15] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. *Вопросы прочности материалов и конструкций АН СССР*, 1959, с. 5–7.
[16] Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 49, pp. 212–224.
[17] Plekhov O., Naimark O. et al. The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2016, vol. 10, pp. 414–423.
[18] Shlyannikov V.N. Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 214, pp. 449–463.
[19] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. On kinetic model of damage development. *Procedia Structural Integrity*, 2020, vol. 28, pp. 2032–2042.
[20] Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Study on the resonant torsion vibration in hourglass specimens under VHCF loading. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1945, art. no. 012043.
[21] Basquin O.H. The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American society for testing and material*, 1910, vol. 10, pp. 625–630.
[22] Шанявский А.А. *Моделирование усталостных разрушений металлов*. Уфа, Монография, 2007, 498 с.
[23] Завойчинская Э.Б. О методе оценки ресурса лопаточного аппарата газотурбинного двигателя при асимметричном циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 1, с. 45–63.
[24] Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2016, т. 56, № 6, с. 1082–1092.
[25] Бураго Н.Г., Никитин И.С. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2018, т.10, № 5, с. 645–666.

Статья поступила в редакцию 21.10.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Стратула Б.А. Математическое моделирование усталостного разрушения при высокочастотных изгибных колебаниях образцов из титановых сплавов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 45–57.

Стратула Борис Андреевич — младший научный сотрудник, ИАП РАН. e-mail: stratula@matway.net

Mathematical modeling of fatigue failure during high-frequency bending vibrations of titanium alloy specimens

© B.A. Stratula

ICAD RAS, Moscow, 123056, Russia

A unified numerical method for different fatigue fracture modes from low-cycle to very-high-cycle fatigue is described on the basis of a multi-mode two-criterion model of cyclic damage. This method allows for a through calculation of the evolution of crack-like fatigue fracture zones in a material, as well as an assessment of the durability of specimens from crack nucleation to macrofracture. Fatigue fracture calculations of titanium alloy specimens under prolonged cyclic loading under three-point bending scheme with development of "quasi-cracks" in modes from multi-cycle to super-multi-cycle fatigue have been carried out. Numerical and experimental results are compared to each other.

Keywords: *very-high-cycle fatigue, damage, fatigue fracture, high frequency vibrations, titanium alloy*

REFERENCES

[1] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge, Cambridge University Press, 1994, 582 p.

[2] Marmi, A.K., Habraken, A.M., Duchene, L. Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti-6Al-4V alloy. *International Journal of Fatigue*, 2009, vol. 31, iss. 11–12, pp. 2031–2040.

[3] Nikitin I.S., Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin A.D. Multimode model for fatigue damage development. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 8, pp. 1432–1440

[4] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. Complex model for fatigue damage development. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2312, art no. 050015.

[5] Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, 1970, vol. 5, no. 4, pp. 767–778.

[6] Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 91, pp. 337–351.

[7] Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion. *International Journal of Fatigue*, 2011, vol. 33, pp. 969–976.

[8] Burago N.G., Nikitin I.S. Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and very-high-cycle fatigue modes. *Computational Methods in Applied Sciences*, 2016, vol. 40, pp. 117–130.

[9] Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 828–838.

[10] Xue H.Q., Tao H., Montembault F., Wang Q.Y., Bathias C. Development of a three-point bending fatigue testing methodology at 20 kHz frequency. *International Journal of Fatigue*, 2007, vol. 29, iss. 9–11, pp. 2085–2093.

[11] Wang B., Cheng L., Cui W., Chen X., Wang C., Li D. Effect of forging process on high cycle and very high cycle fatigue properties of TC4 titanium alloy under three-point bending. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2021, vol. 44, iss. 8, pp. 2054–2069.
[12] Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 1963, vol. 85, iss. 4, pp. 528–533.
[13] Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design: analysis, prediction, prevention*. New-York, Wiley Press, 1993, 654 p.
[14] Kachanov L.M. O vremeni razrusheniya v usloviyah polzuchesti [About the time of destruction in creep conditions]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskih nauk* [Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences], 1958, no. 8, pp. 26–31.
[15] Worknov Yu.N. O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniya [On the mechanism of long-term destruction]. *Voprosy prochnosti materialov i konstrukcij* AN SSSR [Issues of strength of materials and structures of the USSR Academy of Sciences], 1959, p. 5–7.
[16] Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 49, pp. 212–224.
[17] Plekhov O., Naimark O. et al. The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2016, vol. 10, pp. 414–423.
[18] Shlyannikov V.N. Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 214, pp. 449–463.
[19] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. On kinetic model of damage development. *Procedia Structural Integrity*, 2020, vol. 28, pp. 2032–2042.
[20] Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Study on the resonant torsion vibration in hourglass specimens under VHCF loading. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1945, art. no. 012043.
[21] Basquin O.H. The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American society for testing and material*, 1910, vol. 10, pp. 625–630.
[22] Shanyavsky A.A. *Modeling of fatigue cracking of metals*. Ufa, Monograph Publ., 2007, 498 p.
[23] Zavoichinskaya E.B. On the method of gas turbine blade resource estimation at asymmetric cyclic loading. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, no. 1, pp. 45–63.
[24] Burago N.G., Nikitin I.S., Yakushev V.L. Hybrid numerical method with adaptive overlapping meshes for solving nonstationary problems in continuum mechanics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1065–1074.
[25] Burago N.G., Nikitin I.S. Algorithms of through calculation for damage processes. *Computer Research and Modeling*, 2018, vol.10, no. 5, pp. 645–666.

Stratula B.A., Junior Researcher, ICAD RAS. e-mail: stratula@matway.net