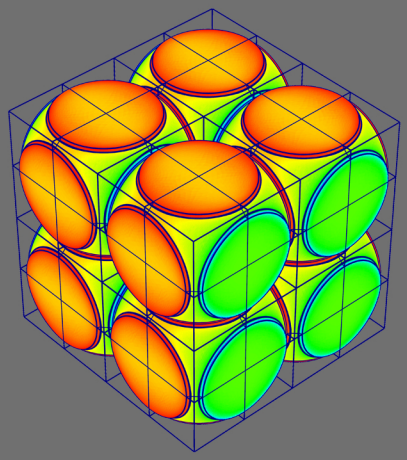
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 4, с. 17–44.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/262/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 15:03:53

УДК 539.36 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-1744

Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов

© Ю.И. Димитриенко[1], С.В. Сборщиков[1],
А.Ю. Димитриенко[2], Ю.В. Юрин[1]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Предложена модель определяющих соотношений упруго-пластических композитов, обладающих кубической симметрией свойств. К этому классу относится значительно число композиционных материалов: дисперсно-армированные композиты, у которых имеется упорядоченная, а не хаотическая система армирования, а также некоторые типы пространственно-армированных композитов. Для построения модели нелинейных определяющих соотношений использован тензорно-симметрийный подход, основанный на спектральных разложениях тензоров напряжений и деформаций, а также спектральном представлении нелинейных тензорных соотношений между этими тензорами. Рассмотрена деформационная теория пластичности, для которой использован тензорно-симметрийный подход, а также предложены конкретные модели для функций пластичности, зависящих от спектральных инвариантов тензора деформации. Для определения констант модели предложен метод, в котором эти константы вычисляются на основе аппроксимации кривых деформирования, полученных прямым численным решением трехмерных задач на ячейке периодичности упруго-пластических композитов. Эти задачи возникают в методе асимптотического осреднения периодических сред. Для решения задач на ячейке периодичности использован конечно-элементный метод и специальное программное обеспечение, реализующее решения задач на ячейках периодичности, разработанное в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Рассмотрен пример расчета констант модели композита с помощью предложенного метода для дисперсно-армированного композита на основе металлической матрицы. А также проведена верификация предложенной модели для различных путей многоосного нагружения композита при прямом численном моделировании. Показано, что предложенная микроструктурная модель и алгоритм определения ее констант обеспечивают достаточно высокую точность прогнозирования упруго-пластического деформирования композита.

Ключевые слова: *композиты, численное моделирование, деформационная теория пластичности, квази-изотропные материалы, микроструктурная модель, метод асимптотического осреднения, метод конечного элемента, дисперсно-армированные композиты, металлокомпозиты, диаграммы деформирования, инварианты*

Введение. Композиционные материалы на основе металлических матриц (металлокомпозиты) имеют большие перспективы для ряда отраслей промышленности [1–7], например, для перспективного двигателестроения, для автомобилестроения, для судостроения и

других. В настоящее время созданы технологии разработки металлокомпозитов для практически всех известных структур армирования: дисперсно-армированных, однонаправленных, тканевых, слоистых, брейдинговых, пространственно-армированных. Большие достоинствами обладают дисперсно-армированные металлокомпозиты, например, на основе алюминиевой или титановой матрицы, наполненные керамическими частицами SiC, BN и другими. При относительной простоте технологии изготовления у этих композитов значительно более высокие жесткостные свойства, чем у неармированных матриц, сравнимые со высокомодульными сталями, но значительно более легкие. Прочность у этих композитов также находится на достаточно высоком уровне, превышающем прочность, например, многих полимерных композитов (ПКМ). Кроме того, металлокомпозиты с успехом могут длительно эксплуатироваться при значительно более высоких температурах, чем ПКМ. Металлокомпозиты, как правило проявляют значительные пластические свойства, что также, обычно, является положительным эффектом, поскольку эти свойства препятствуют внезапному хрупкому разрушению, характерному для многих высокомодульных материалов, например, керамики.

Моделированию упруго-пластических свойств металло-композитов посвящено значительное количество работ [7–10]. В основном эти модели основаны на феноменологическом описании изотропных или анизотропных свойств металлокомпозитов. В некторых работах используется структурный подход к построению определяющих соотношений для упруго–пластических композитов, однако, при этом используются, как правило, относительно простые, приближенные структурные модели композитов.

В более современных работах [11–19] по моделированию металлокомпозитов используется один из наиболее эффективных современных математических методов моделирования структурно-неоднородных сред — метод асимптотического осреднения [11,20–22]. Однако, ввиду значительной сложности этого метода, как правило, результат моделирования с помощью этого метода сводится к построению диаграмм деформирования при простых видах нагружения: при растяжениях и сдвигах. Для решения задач расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из металлокомпозитов необходимы модели деформирования, применимые для произвольных видов и процессов нагружения.

Целью настоящей работы является разработка микро-структурной модели определяющих соотношений упруго-пластических композитов, основанной на методе асимптотического осреднения и относящейся к классу деформационных теорий [23–27], т.е. связывающих конечные значения напряжений и деформаций,

в отличие от теорий течения [28,29], связывающих приращения пластических деформаций с напряжениями. Модель основана на спектральной теории представления тензорных соотношений [11,30,31] и предназначена для так называемых квази-изотропных композитных сред, обладающих классом кубической симметрии [31]. К этому классу относятся, например, некоторые типы дисперсно-армированных сред (с регулярной структурой расположения дисперсного наполнителя), а также некоторые виды пространственно-армированных композитов.

Спектральное представление определяющих соотношений для квазиизотропных упруго-пластических сред. Рассмотрим композиционный материал, проявляющий упруго-пластические свойства при активном нагружении [23,25]. Полагаем, что деформирование этого композита происходит в области малых деформаций. Тогда в рамках деформационной теории пластичности соотношение между тензорами напряжений σ_{ij} и малых деформаций ε_{kl} композита, рассматриваемого как гомогенизированный материал [11,15], можно записать в виде тензорной нелинейной функции:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}). \tag{1}$$

Пусть микроструктура композита и его механическое свойства обладают свойством квазиизотропии [31], т.е. относятся к классу кубической симметрии K с главными осями симметрии, совпадающими с осями декартовой системы координат $O\mathbf{e}_i$, в которой записаны компоненты σ_{ij} и ε_{kl} тензоров напряжений σ и деформаций ε. Тогда для этих тензоров можно рассмотреть спектральные представления [32] относительно класса симметрии K

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma),\ \varepsilon_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon), \tag{2}$$

где $P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)$ и $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$ — *обобщенные девиаторы* тензоров σ и ε, которые в классе K имеют вид

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{3} I_1(\sigma)\delta_{ij},\ P_{ij}^{(2)}(\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\sigma_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3} I_1(\sigma)\delta_{ij},$$

$$P_{ij}^{(3)}(\sigma) = \sigma_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\sigma_{\alpha\alpha},\ P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = \frac{1}{3} I_1(\varepsilon)\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3} I_1(\varepsilon)\delta_{ij},\ P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = \varepsilon_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha},$$

здесь $I_1(\sigma)=\sigma_{kk}$ и $I_1(\varepsilon)=\varepsilon_{kk}$ —первые главные инварианты тензоров напряжений и деформации.

Обобщенные девиаторы (3) являются линейными функциями от компонент σ_{ij} и ε_{kl}

$$P^{(\alpha)}_{ij}(\sigma)=\Gamma^{(\alpha)}_{ijkl}\sigma_{kl} \text{ и } P^{(\alpha)}_{ij}(\varepsilon)=\Gamma^{(\alpha)}_{ijkl}\varepsilon_{kl},\ \alpha=1,...,3, \tag{4}$$

где $\Gamma^{(\alpha)}_{ijkl}$ — постоянные тензоры (*ортопроекторы*), характеризующие класс кубической симметрии K

$$\begin{gathered}\Gamma^{(1)}_{ijkl}=\frac{1}{a_1^2}a^{(1)}_{ij}a^{(1)}_{kl},\ a^{(1)}_{ij}=\delta_{ij},\ a_1=\sqrt{3},\\ \Gamma^{(2)}_{ijkl}=\sum_{\alpha=1}^{3}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl},\\ \Gamma^{(3)}_{ijkl}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})-\sum_{\alpha=1}^{3}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha}.\end{gathered} \tag{5}$$

Введем спектральные инварианты $Y_\alpha(\sigma)$ и $Y_\alpha(\varepsilon)$ [32] тензоров напряжений и деформаций для класса кубической симметрии K

$$\begin{gathered}Y_1(\sigma)=\frac{1}{a_1}a^{(1)}_{ij}\sigma_{ij},\\ Y_1(\varepsilon)=\frac{1}{a_1}a^{(1)}_{ij}\varepsilon_{ij},\end{gathered} \tag{6}$$

$$Y^2_\alpha(\sigma)=P^{(\alpha)}_{ij}(\sigma)P^{(\alpha)}_{ij}(\sigma),\ Y^2_\alpha(\varepsilon)=P^{(\alpha)}_{ij}(\varepsilon)P^{(\alpha)}_{ij}(\varepsilon),\ \alpha=2,3. \tag{7}$$

Инварианты $Y_1(\sigma)$ и $Y_1(\varepsilon)$ — *линейные спектральные инварианты*, а (7) — спектральные *квадратичные инварианты.* Явное выражение этих инвариантов имеет вид

$$\begin{gathered}Y_1(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}),\\ Y_2(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2},\\ Y_3(\varepsilon)=\sqrt{2(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2)}.\end{gathered} \tag{8}$$

Предполагаем, что тензорная функция (1) для композита является квазилинейной [31,32], тогда, как было показано в [32], эта функция может быть представлена в виде соотношений между обобщенными девиаторами

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma)=\frac{\varphi_1}{\sqrt{3}}\delta_{ij},$$
$$P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)=\frac{\varphi_\alpha}{Y_\alpha(\varepsilon)}P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon),\ \alpha=2,3, \tag{9}$$

где φ_α — скалярные функции от спектральных инвариантов $Y_\alpha(\varepsilon)$

$$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha(Y_1(\varepsilon),...,Y_3(\varepsilon)),\ \alpha=1,...,3. \tag{10}$$

Введем новые функции $l_{\alpha\alpha}$ от инвариантов с помощью следующих соотношений

$$\varphi_\alpha=l_{\alpha\alpha}Y_\alpha(\varepsilon),\ \alpha=1,...,3,$$
$$l_{\alpha\alpha}=l_{\alpha\alpha}(Y_1(\varepsilon),...,Y_3(\varepsilon)). \tag{11}$$

Тогда соотношения (9) с учетом (3) можно записать в виде укороченного спектрального представления

$$Y_1(\sigma)=l_{11}Y_1(\varepsilon),$$
$$P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)=l_{\alpha\alpha}P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon),\ \alpha=2,3. \tag{12}$$

Подставляя (12) в первое выражение в (2), получаем полное спектральное представление определяющих соотношений (1) для квазилинейных функций с кубической симметрией

$$\sigma_{ij}=l_{11}Y_1(\varepsilon)\delta_{ij}+l_{22}P_{ij}^{(2)}(\varepsilon)+l_{33}P_{ij}^{(3)}(\varepsilon). \tag{13}$$

Если подставить в (13) выражения (4), то получим квазилинейное представление определяющих соотношений (1)

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{14}$$

где C_{ijkl} — компоненты *тензора модулей нелинейной упругости*

$$C_{ijkl}=\sum_{\alpha=1}^{3}l_{\alpha\alpha}\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}. \tag{15}$$

Подставляя (5) в (15), получаем явное выражение для компонент тензора модулей нелинейной упругости

$$C_{1111}=C_{2222}=C_{3333}=\frac{1}{3}(l_{11}+2l_{22}),$$
$$C_{1122}=C_{1133}=C_{2233}=\frac{1}{3}(l_{11}-l_{22}), \tag{16}$$
$$2C_{1212}=2C_{1313}=2C_{2323}=l_{33}.$$

В нелинейном случае каждую функцию l_{11}, l_{22}, l_{33} представим в виде обобщенной модели, по аналогии с функциями А.А. Ильюшина [23-25] для изотропных сред

$$l_{11} = l_{11}^0(1-\omega_1),\ l_{22} = l_{22}^0(1-\omega_2),\ l_{33} = l_{33}^0(1-\omega_3), \tag{17}$$

$$l_{11}^0 = 3\bar{K} = \frac{\bar{E}}{1-2\bar{\nu}},\ l_{22}^0 = \frac{\bar{E}}{1+\bar{\nu}},\ l_{33}^0 = 2\bar{G}, \tag{18}$$

где $\bar{K}$ — модуль объемного сжатия, $\bar{\nu}$ — коэффициент Пуассона, $\bar{G}$ — модуль сдвига композита — для квазизотропных сред все являющиеся независимыми, а

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(Y_1(\varepsilon),...,Y_3(\varepsilon)),\ \alpha = 1,...,3 \tag{19}$$

— 3 функции пластичности, являющиеся функциями от 3-х инвариантов (8).

Система уравнений (14), (15), (18) и (19) образует спектральные определяющие соотношения для упруго-пластических квази-изотропных сред при активном нагружении.

Модели функций пластичности для упруго-пластических квази-изотропных сред. В общем случае аналитическая аппроксимация 3-х функций (19) от 3-х аргументов является достаточно громоздким и не всегда эффективным методом реализации соотношений упруго-пластичности. Поэтому рассмотрим более простую модель, в которой функции (19) выбираются в виде некоторых аналитических зависимостей: функцию пластичности ω_1, описывающую пластические свойства при объемном растяжении-сжатии, полагаем зависящей только от первого (объемного) инварианта $Y_1(\varepsilon)$, а функции ω_2 и ω_3, описывающие пластические свойства при сдвигах и растяжениях-сжатиях по одному или 2 направлениям, будем полагать зависящими только от инвариантов $Y_2(\varepsilon)$ и $Y_3(\varepsilon)$, и не зависящими от $Y_1(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&\omega_1(Y_1(\varepsilon)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad Y_1(\varepsilon) < \varepsilon_{S10}, \\ \omega_1^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S10}}{|Y_1(\varepsilon)|}\right)^{b_1}, & \text{если} \quad Y_1(\varepsilon) \ge \varepsilon_{S10}, \end{cases} \\
&\omega_\alpha(Y_2(\varepsilon), Y_3(\varepsilon)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon) < \varepsilon_{S\alpha}, \\ \omega_\alpha^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)}\right)^{b_\alpha}, & \text{если} \quad \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon) \ge \varepsilon_{S\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 2,3
\end{aligned} \tag{20}$$

здесь обозначены функции от $Y_2(\varepsilon)$ и $Y_3(\varepsilon)$

$$\tilde{Y}_2(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_2(\varepsilon)\right)^2+a_{S2}\left(Y_3(\varepsilon)\right)^{q_2}},\ \tilde{Y}_3(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_3(\varepsilon)\right)^2+a_{S3}\left(Y_2(\varepsilon)\right)^{q_3}},$$
$$b_2=b_{20}+b_{21}Y_3(\varepsilon)+b_{22}\left(Y_3(\varepsilon)\right)^2,\ b_3=b_{30}+b_{31}Y_2(\varepsilon)+b_{32}\left(Y_2(\varepsilon)\right)^2. \quad (21)$$

В этих соотношениях

$$\begin{gathered}\bar{K},\ \bar{\nu},\ \bar{G},\\ \varepsilon_{S1},\ \omega_1^0,\ b_1,\\ \varepsilon_{S2},\ \omega_2^0,\ b_{20},\ b_{21},\ b_{22},\ q_2,\ a_{S2},\\ \varepsilon_{S3},\ \omega_3^0,\ b_{30},\ b_{31},\ b_{32},\ q_3,\ a_{S3}\end{gathered} \quad (22)$$

— константы модели.

Заметим, что при $a_{S3}=a_{S2}=1$ и $q_2=q_3=2$ получаем $\tilde{Y}_2(\varepsilon)=\tilde{Y}_3(\varepsilon)=\varepsilon_u$, где ε_u — интенсивность тензора деформации

$$\varepsilon_u=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+6(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2)}. \quad (23)$$

Микроструктурная модель упруго-пластического квазиизотропного композита. Для определения констант (22) разработанной модели необходимы экспериментальные данные об упруго-пластических свойствах композита, однако это сопряжено со значительными сложностями, поскольку реализация экспериментов является технически трудным процессом, кроме того, при изменении концентрации компонентов композита такие эксперименты необходимо проводить каждый раз заново. Рассмотрим другой способ нахождения констант (22), в котором вместо реальных экспериментов осуществляются расчеты диаграмм деформирования композита при определенных путях нагружения, используя для этого метод асимптотического осреднения, разработанный для различных типов композитов [33–34], в том числе для упруго-пластических [15–19].

В основе этого метода для упруго-пластических композитов лежит решение так называемых задач L_{pq} линеаризованной теории упругости на 1/8 ячейке периодичности V_ξ (ЯП) композита

$$\begin{gathered}\sigma_{ij(pq)/j}^{\{m\}}=0 \text{ в } V_\xi,\\ \sigma_{ij(pq)}^{\{m\}}=C_{ijkl}^{\{m-1\}}\varepsilon_{kl(pq)}^{\{m\}} \text{ в } V_\xi\bigcup\Sigma_\xi,\\ 2\varepsilon_{kl(pq)}^{\{m\}}=U_{k(pq)|l}^{\{m\}}+U_{l(pq)|k}^{\{m\}} \text{ в } V_\xi\bigcup\Sigma_\xi,\\ \Sigma_S:\ \left[\sigma_{ij(pq)}^{\{m\}}\right]n_j=0,\ \left[U_{k(pq)}^{\{m\}}\right]=0.\end{gathered} \quad (24)$$

Здесь $\sigma_{ij(pq)}^{\{m\}}$, $\varepsilon_{kl(pq)}^{\{m\}}$ и $U_{l(pq)}^{\{m\}}$ — компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений в этой задаче, m — номер итерации по циклу нелинейности определяющих соотношений, (pq) — индекс задачи по типу граничных условий, $\sigma_{ij(pq)/j}^{\{m\}} = \dfrac{\partial \sigma_{ij(pq)}^{\{m\}}}{\partial \xi_j}$ — производная по локальным координатам $\xi_j \in V_\xi$ в ЯП, $\left[U_{k(pq)}^{\{m\}}\right]$ — скачок на границе раздела $\sum_S$ компонентов композита, $C_{ijkl}^{\{m-1\}}$ — нелинейный тензор модулей упругости компонентов композита, которые полагаются изотропными упруго-пластическими, соответствующими деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина[23,25,27]

$$C_{ijkl}^{\{m\}} = (K - \frac{2}{3}G^{\{m\}})\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{\{m\}}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right),$$
$$G^{\{m\}} = G(1-\omega(\varepsilon_u^{\{m\}})), \qquad (25)$$
$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varepsilon_u < \varepsilon_S, \\ \omega^0(1-\dfrac{\varepsilon_S}{\varepsilon_u})^b, & \text{если} \quad \varepsilon_u \ge \varepsilon_S. \end{cases}$$

Здесь $K, G^{\{m\}}$ — модуль объемного сжатия и модуль сдвига компонентов композита, $\omega^0, \varepsilon_S, b$ — константы модели пластичности, все эти величины в задаче (24) рассматриваются как разрывные функции от ξ_j.

Граничные условия в задачах (24) L_{pp} на поверхностях 1/8 ЯП имеют следующий вид [33,35]:

$$\text{на } \Sigma'_p = \{\xi_p = 0{,}5\}: U_{p(pp)}^{\{m\}} = 0{,}5\overline{\varepsilon}_{pp}^{\{m\}},\ \sigma_{ip(pp)}^{\{m\}} = 0,\ i \ne p, \qquad (26)$$
$$\text{на } \Sigma_p = \{\xi_p = 0\}: U_{p(pp)}^{\{m\}} = 0,\ \sigma_{ip(pp)}^{\{m\}} = 0. \qquad (27)$$

На остальных гранях заданы условия, аналогичные (27).

Для задач L_{pq} ($p \ne q$) заданы следующие граничные условия:

$$\text{на } \Sigma'_p \text{ и } \Sigma_p \ U_{i(pq)}^{\{m\}} = 0,\ \sigma_{pp(pq)}^{\{m\}} = 0,\ U_{q(pq)}^{\{m\}} = 0,\ i \ne q \ne p \ne i, \qquad (28)$$
$$\text{на } \Sigma'_q: U_{q(pq)}^{\{m\}} = \frac{1}{4}\overline{\varepsilon}_{pq}^{\{m\}},\ \sigma_{qq(pq)}^{\{m\}} = 0,\ U_{i(pq)}^{\{m\}} = 0. \qquad (29)$$

На остальных гранях заданы условия, аналогичные (28).

Величины $\varepsilon_{pq}^{\{m\}}$ в задачах L_{pq} — заданы, они представляют собой средние деформации ε_{pq} по ЯП композита на $m-$ой итерации

$$C_{ijpq}^{\{m\}} = \frac{\left\langle \sigma_{ij(pq)}^{\{m\}} \right\rangle}{\varepsilon_{pq}^{\{m\}}}, \tag{30}$$

$$\left\langle \sigma_{ij(pq)}^{(m)} \right\rangle = \int_{V_\xi} \sigma_{ij(pq)}^{(m)} dV_\xi \,. \tag{31}$$

С помощью решения задач L_{pq} (24)-(29) вычисляем *тензор модулей нелинейной упругости* композита на $m-$ой итерации

С помощью тензора $C_{ijpq}^{\{m\}}$ получаем искомое соотношение (14) для композита на $m-$ой итерации

$$\sigma_{ij}^{\{m\}} = C_{ijpq}^{\{m-1\}} \varepsilon_{pq}^{\{m\}}, \; m = 1, 2, \ldots . \tag{32}$$

Алгоритм конечно-элементного решения локальных задач L_{pq} предложен в работах [33–35]. В этих работах получены результаты решения этих задач для некоторых типовых структур ЯП. Для численного решения локальных задач L_{pq} был использован программный комплекс SMCM, разработанный в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана [36,37]. Комплекс SMCM позволяет проводить полный цикл конечно-элементного моделирования : от создания типовых 3D геометрий микроструктур ЯП композитов, построения КЭ сеток, до непосредственного решения задач L_{pq} и визуализации результатов расчетов

Алгоритм численного определения *тензора модулей нелинейной упругости* $C_{ijpq}^{\{m\}}$ с помощью процедуры решения задач L_{pq}, используемый для вычисления констант (22), составляет микроструктурную модель упруго-пластического квази-изотропного композита.

Методика определения констант модели. Опишем алгоритм определения констант (22) с помощью микроструктурной модели упруго-пластического квази-изотропного композита. Рассмотрим несколько вариантов решения задач L_{pq}, в каждой из которых реализуется пропорциональное нагружение по некоторой траектории в пространстве напряжений

$$\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} t \tag{33}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ — тензор, задающий направление, а t — параметр нагружения.

Рассмотрим следующие 5 траекторий нагружения (33):

1) линейное сдвиговое нагружение,

2) линейное объемное сжатие (растяжение),

3) линейное трехоосное растяжение с нулевым первым инвариантом,

4) растяжение с нулевым первым инвариантом и со сдвигом (по ломаной),

5) сдвиговое с растяжением с нулевым первым инвариантом (по ломаной).

Линейное сдвиговое нагружение. В этом случае рассматривается задача L_{12}, в которой

$$\sigma_{12} = \dot{\sigma}_{12} t \text{, остальные } \sigma_{ij} = 0 . \tag{34}$$

В этом случае инварианты (8) и девиаторы (3) имеют вид

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma) = 0,\ Y_2(\sigma) = 0,\ Y_3(\sigma) = \sqrt{2}\left|\sigma_{12}\right|, \\ P^{(1)}_{ij}(\sigma) = 0,\ P^{(2)}_{ij}(\sigma) = 0,\ P^{(3)}_{ij}(\sigma) = \sigma_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}). \end{gathered} \tag{35}$$

Тогда из укороченного спектрального представления (12) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = 0 , \tag{36}$$

$$P^{(2)}_{ij}(\varepsilon) = 0 , \tag{37}$$

$$\sigma_{12} = l_{33}\varepsilon_{12} . \tag{38}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов следует, что

$$\begin{gathered} \varepsilon_{12} \neq 0 \text{, остальные } \varepsilon_{ij} = 0 , \\ Y_2(\varepsilon) = 0 ,\ Y_3(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right| . \end{gathered} \tag{39}$$

Определяющее соотношение (13) в этом случае принимает вид (38). Функция l_{33} в этом соотношении для случая чистого сдвига имеет вид (17), (20). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$Y_3(\varepsilon) = \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right|, \tag{40}$$

$$F_3(\varepsilon_{12}) \equiv \begin{cases} 2G\varepsilon_{12}, & \text{если} \quad \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right| < \varepsilon_{S3}, \\ 2G(1-\omega_3^0(1-\dfrac{\varepsilon_{S3}}{\sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right|})^{b_{30}})\varepsilon_{12}, & \text{если} \quad \sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right| \geq \varepsilon_{S3}. \end{cases} \tag{41}$$

Построим экспериментальную диаграмму деформирования

$\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12})$ при чистом сдвиге композита, полученную прямым численным решением локальной задачи на ЯП L_{12} с помощью соотношения (32). Тогда, сравнивая эту кривую $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12})$ с аппроксимационной функцией (40) находим все константы G, ε_{S30}, ω_3^0, b_{30} из условия минимизации относительного отклонения этих кривых

$$\sum \left(1 - \frac{F_3(\varepsilon_{12})}{F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12})}\right)^2 \to \min . \tag{42}$$

Линейное объемное сжатие (растяжение) В этом случае рассматривается совместное решение задач L_{11}, L_{22} и L_{33}, в которых

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0 \equiv \dot{\sigma}_0 t \text{ , остальные } \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \tag{43}$$

где $\dot{\sigma}_0$ — заданная скорость нагружения.

В этом случае

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma) = \sigma_0,\ Y_2(\sigma) = 0,\ Y_3(\sigma) = 0, \\ P_{ij}^{(1)} = \frac{\sigma_0}{3}\delta_{ij},\ P_{ij}^{(2)}(\sigma) = 0,\ P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0. \end{gathered} \tag{44}$$

Тогда из укороченного спектрального представления (12) получаем, что

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma) = l_{11} Y_1(\varepsilon),\ P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = \frac{I_1(\varepsilon)}{3}\delta_{ij}, \\ P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = 0,\ P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов следует, что при объемном сжатии отличны от тождественного нуля только нормальные компоненты тензора деформации, и они равны между собой

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_0,\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ Y_2(\varepsilon) = 0,\ Y_3(\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно — это (45). Функция l_{11} в этом соотношении имеет вид (17), (20). Тогда получаем для объемного сжатия следующую диаграмму деформирования

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0), \tag{47}$$

$$F_1(\varepsilon_0)=\begin{cases} 3K\varepsilon_0, & \text{если} \quad |\varepsilon_0|<\varepsilon_{S1}, \\ 3K(1-\omega_1^0(1-\dfrac{\varepsilon_{S1}}{|\varepsilon_0|})^{b_1})\varepsilon_0, & \text{если} \quad |\varepsilon_0|\ge\varepsilon_{S1}. \end{cases} \tag{48}$$

Построим экспериментальную кривую деформирования $\sigma_0 = F_1^{(Э)}(\varepsilon_0)$ композита при объемном сжатии, полученную прямым численным решением задач L_{11}, L_{22} и L_{33}. Тогда из сравнения этой кривой $\sigma_0 = F_1^{(Э)}(\varepsilon_0)$ с аппроксимационной функцией (47) $\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0)$ находим константы K, ε_{S10}, ω_1^0, b_1.

Линейное трехосное деформирование с нулевым первым инвариантом. В этом случае также рассматривается совместное решение задач L_{11}, L_{22} и L_{33}, в которых реализуется следующее деформированное состояние

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_0\equiv\dot{\varepsilon}_0 t\,,\ \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\,,\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0\,. \tag{49}$$

В этом случае

$$\begin{gathered} Y_1(\varepsilon)=0,\ Y_2(\varepsilon)=|\varepsilon_0|,\ Y_3(\varepsilon)=0, \\ P_{ij}^{(1)}(\varepsilon)=0,\ P_{ij}^{(3)}(\varepsilon)=0,\ P_{ij}^{(2)}(\varepsilon)=\varepsilon_0(\delta_{i1}\delta_{j1}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}). \end{gathered} \tag{50}$$

Из укороченного спектрального представления (12) получаем, что

$$\begin{gathered} Y_1(\sigma)=0, \\ P_{ij}^{(1)}(\sigma)=0\,,\ P_{ij}^{(3)}(\sigma)=0\,, \\ P_{ij}^{(2)}(\sigma)=l_{22}P_{ij}^{(2)}(\varepsilon)\,. \end{gathered} \tag{51}$$

Из этих соотношений и определения (3) девиаторов получаем следующие соотношения

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=-\frac{1}{2}\sigma_{11}\ ,\ \sigma_{11}\equiv\sigma_0\,, \tag{52}$$

$$\sigma_0=l_{22}\varepsilon_0\,, \tag{53}$$

$$Y_2(\sigma)=|\sigma_0|,\ Y_3(\sigma)=0\,. \tag{54}$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно — это (53). Подставляя в это соотношение функцию l_{22} (17),

(20), получаем следующую диаграмму деформирования для данного пути нагружения

$$\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0), \tag{55}$$

$$F_2(\varepsilon_0) = \begin{cases} l_{22}^0 \varepsilon_0, & \text{если} \quad |\varepsilon_0| < \varepsilon_{S2}, \\ l_{22}^0 (1 - \omega_2^0 (1 - \dfrac{\varepsilon_{S2}}{|\varepsilon_0|})^{b_{20}}) \varepsilon_0, & \text{если} \quad |\varepsilon_0| \geq \varepsilon_{S2}. \end{cases} \tag{56}$$

Построим экспериментальную кривую деформирования $\sigma_0 = F_2^{(Э)}(\varepsilon_0)$ композита, полученную прямым численным решением локальных задач на ЯП L_{11}, L_{22} и L_{33} при деформировании (49). Тогда из сравнения этой кривой $\sigma_0 = F_2^{(Э)}(\varepsilon_0)$ с аппроксимационной функцией (55) $\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0)$ находим константы модели l_{22}^0, ε_{S2}, ω_2^0, b_{20}.

Растяжение с нулевым первым инвариантом с предварительным сдвигом (по ломаной). Все расчеты по траекториям 1, 2 и 3 полагаем предварительно проведенными и соответствующие константы (22) модели полагаем вычисленными.

Рассмотрим нагружение по ломаной линии: вначале до момента времени t_1 осуществляется чисто сдвиговое нагружение, как по траектории 1, а затем достигнутое напряжение сдвига фиксируется $\sigma_{12\max}$ и к нему добавляется трехосное деформирование с нулевым первым инвариантом, как по траектории 3:

$0 \leq t \leq t_1$:

$$\varepsilon_{12} = \dot{\varepsilon}_{12} t, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0, \tag{57}$$

$t_1 \leq t \leq t_{\max}$:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12\max} = \dot{\varepsilon}_{12} t_1, \ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \equiv \dot{\varepsilon}_0 (t - t_1), \ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0. \end{gathered} \tag{58}$$

Тогда, согласно формулам, полученным для траекторий 1 и 3, получаем:

- при $0 \leq t \leq t_1$:

$$Y_3(\sigma) = 2G(1 - \omega_3) Y_3(\varepsilon), \ Y_1(\sigma) = 0, \ Y_2(\sigma) = 0, \tag{59}$$

где:

$$Y_3(\sigma)=\sqrt{2}\left|\sigma_{12}\right|,\ Y_3(\varepsilon)=\sqrt{2}\left|\varepsilon_{12}\right|,$$

$$\omega_3=\begin{cases}0, & \text{если} \quad \tilde{Y}_3(\varepsilon)<\varepsilon_{S3},\\ \omega_3^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S3}}{Y_3(\varepsilon)}\right)^{b_{30}}, & \text{если} \quad \tilde{Y}_3(\varepsilon)\ge\varepsilon_{S3};\end{cases} \tag{60}$$

- при $t_1\le t\le t_{\max}$

$$Y_2(\sigma)=l_{22}^0(1-\omega_2)Y_2(\varepsilon),\ Y_3(\sigma)=2G(1-\omega_3)Y_{3\max}(\varepsilon), \tag{61}$$

где

$$\omega_\alpha=\begin{cases}0, & \text{если} \quad \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)<\varepsilon_{S\alpha},\\ \omega_\alpha^0\left(1-\dfrac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)}\right)^{b_\alpha}, & \text{если} \quad \tilde{Y}_\alpha(\varepsilon)\ge\varepsilon_{S\alpha},\end{cases} \tag{62}$$

$$\tilde{Y}_2(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_2(\varepsilon)\right)^2+a_{S2}\left(Y_{3\max}(\varepsilon)\right)^{q_2}},$$

$$\tilde{Y}_3(\varepsilon)=\sqrt{\left(Y_{3\max}(\varepsilon)\right)^2+a_{S3}\left(Y_2(\varepsilon)\right)^{q_3}},$$

$$b_2=b_{20}+b_{21}Y_{3\max}(\varepsilon)+b_{22}\left(Y_{3\max}(\varepsilon)\right)^2,\ b_3=b_{30}+b_{31}Y_2(\varepsilon)+b_{32}\left(Y_2(\varepsilon)\right)^2,$$

$$Y_2(\sigma)=\left|\sigma_{11}\right|,\quad Y_2(\varepsilon)=\left|\varepsilon_{11}\right|,\quad Y_3(\sigma)=\sqrt{2}\left|\sigma_{12}\right|,\quad Y_{3\max}(\varepsilon)=\sqrt{2}\left|\varepsilon_{12\max}\right|.$$

Построим экспериментальная кривую деформирования $\sigma_{11}=F_2^{(Э)}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12\max})$, полученную прямым численным решением локальных задач на ЯП L_{11}, L_{22}, L_{33} при трехосном растяжении с нулевым первым инвариантом, после предварительного решения задачи и L_{12} о чистом сдвиге до значения $\varepsilon_{12\max}$. Тогда из сравнения этой кривой $\sigma_{11}=F_2^{(Э)}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12\max})$ с аппроксимационной функцией $\sigma_{11}=F_2(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12\max})$, которую получаем из (61), (62)

$$F_2(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12\max})=l_{22}^0(1-\omega_2), \tag{63}$$

находим константы модели a_{S2}, b_{21}, b_{22}.

Сдвиговое нагружение с предварительным растяжением с нулевым первым инвариантом (по ломаной). Рассмотрим нагружение по ломаной линии, как в предыдущем разделе, но в другом порядке: вначале до момента времени t_1 осуществляется трехосное растяжение с нулевым первым инвариантом, как по траектории 3, затем достигнутое напряжение $\sigma_{11\max}$ фиксируется и к нему добавляется чисто сдвиговое нагружение, как по траектории 1:

- $0 \le t \le t_1$:

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \equiv \dot{\sigma}_0 t\,,\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{1}{2}\sigma_0\,,\quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0\,, \tag{64}$$

- $t_1 \le t \le t_{\max}$:

$$\begin{gathered}\sigma_{12} = \dot{\sigma}_{12}(t - t_1),\ \sigma_{11} = \sigma_{11\max} \equiv \dot{\sigma}_0 t_1,\\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{1}{2}\sigma_{11\max},\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.\end{gathered} \tag{65}$$

Тогда, согласно формулам, полученным для траекторий 1 и 3, получаем:

- $0 \le t \le t_1$:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = l_{22}^0 \varepsilon_{11},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{11}\right| < \varepsilon_{S2},\\ \sigma_{11} = l_{22}^0 (1 - \omega_2^0 (1 - \frac{\varepsilon_{S2}}{\left|\varepsilon_{11}\right|})^{b_{20}})\varepsilon_{11},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{11}\right| > \varepsilon_{S2},\end{gathered} \tag{66}$$

- $t_1 \le t \le t_{\max}$:

$$\sigma_{12} = F_3\,(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11\max})\,, \tag{67}$$

где

$$\begin{gathered}F_3\,(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11\max}) \equiv \begin{cases} 2G\varepsilon_{12}, & \text{если} \quad \tilde{Y}_3(\varepsilon) < \varepsilon_{S3},\\ 2G(1 - \omega_3^0 (1 - \frac{\varepsilon_{S3}}{\tilde{Y}_3(\varepsilon)})^{b_3})\varepsilon_{12}, & \text{если} \quad \tilde{Y}_3(\varepsilon) \ge \varepsilon_{S3}, \end{cases}\\ \tilde{Y}_3(\varepsilon) = \sqrt{2\left(\varepsilon_{12}\right)^2 + a_{S3}\left(\varepsilon_{11\max}\right)^{q_3}}\,,\\ b_3 = b_{30} + b_{31}\left(Y_{2\max}(\varepsilon)\right)^2 + b_{32} Y_{2\max}(\varepsilon)\,.\end{gathered} \tag{68}$$

Максимальная деформация $\varepsilon_{11\max}$ вычисляется по заданному максимальному напряжению сдвига $\sigma_{11\max}$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11\max} = \frac{\sigma_{11\max}}{l_{22}^0},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{11\max}\right| < \varepsilon_{S2},\\ \sigma_{11\max} = l_{22}^0 (1 - \omega_2^0 (1 - \frac{\varepsilon_{S2}}{\left|\varepsilon_{11\max}\right|})^{b_{20}})\varepsilon_{11\max},\ \text{если}\ \left|\varepsilon_{11}\right| > \varepsilon_{S2}.\end{gathered} \tag{69}$$

Построим экспериментальную кривую деформирования $\sigma_{12} = F_3^{(\text{Э})}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11\max})$ композита, полученную прямым численным

решением локальной задачи L_{12} о чистом сдвиге после предварительного решения задач L_{11}, L_{22}, L_{33} о трехосном растяжением с нулевым первым инвариантом до значения $\varepsilon_{11\max}$. Тогда из сравнения этой кривой $\sigma_{12} = F_3^{(Э)}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11\max})$ с аппроксимационной функцией (67) находим оставшиеся константы a_{S3}, b_{31}, b_{32}.

Результаты численного моделирования. Для анализа реализуемости разработанной модели был рассмотрен пример дисперсно-армированного композиционного материала (ДАКМ) с частицами сферической формы (рис. 1). В качестве матрицы был выбран алюминиевый сплав со следующими константами модели деформационной теории пластичности (25)

$$E_m = 70 \text{ ГПа}, \ \nu_m = 0{,}35, \ \varepsilon_{Sm} = 0{,}0042, \ \omega_m^0 = 0{,}96, \ b_m = 2{,}34.$$

В качестве дисперсного наполнителя композита были выбраны частицы SiC, которые полагались упругими с характеристиками

$$E_f = 350 \text{ ГПа}, \ \nu_f = 0{,}2.$$

Концентрация наполнителя в композите составляла 30%. С помощью решения локальных задач L_{pq} были получены следующие значения эффективных упругих характеристики композита, как квази-изотропного материала

$$E = 105{,}12 \text{ ГПа}, \ \nu = 0{,}3212, \quad G = 41{,}57 \text{ ГПа}.$$

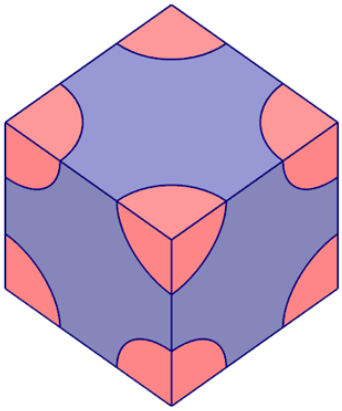
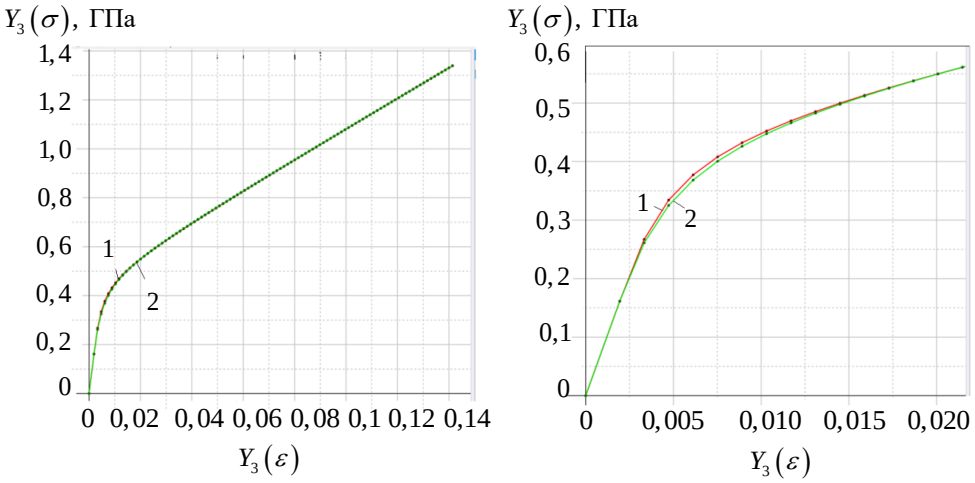


Рис. 1. ЯП дисперсно-армированного КМ с частицами сферической формы

На рис. 2 показана диаграммы деформирования композита при траектории № 1 нагружения, представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon))$. Одна диаграмма на этом рисунке получена прямым решением задачи L_{12}, а вторая —

путем аппроксимации этой кривой с помощью разработанной модели квазиизотропного композита по формуле (40). При этом были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{S30} = 0{,}0019398\,,\ \omega_3^0 = 0{,}9258\,,\ b_{30} = 3{,}1726\,.$$



а *б*

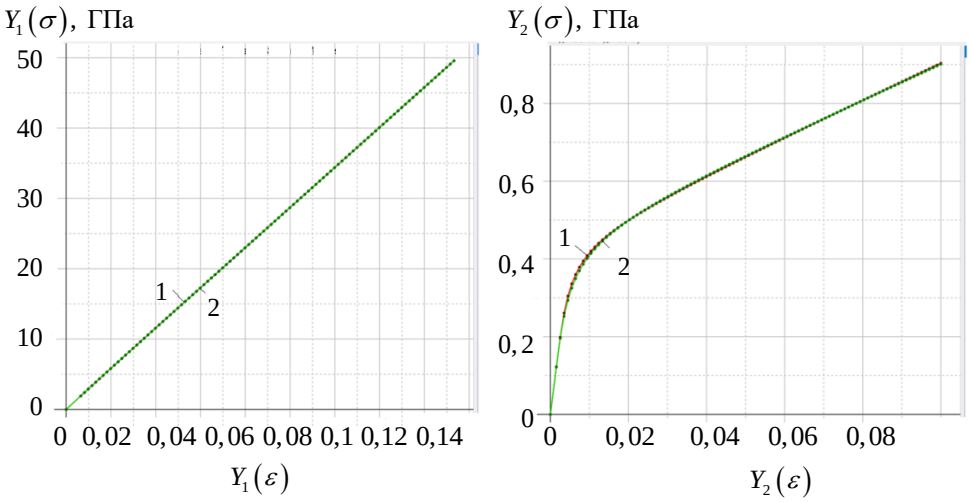
Рис. 2. Диаграммы деформирования $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon))$ для ДАКМ, полученные по траектории №1 с помощью прямого решения задачи L_{12} (1) и аппроксимации по формуле (40)

На рис. 3 показаны диаграммы деформирования композита по траекториям нагружения № 2 и 3, представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_1(\sigma) = \bar{F}_1(Y_1(\varepsilon))$ и $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$, соответственно. Одна из диаграмм на этих рисунках получена прямым решением задач L_{pq}, а вторая — путем аппроксимации этих кривых с помощью разработанной модели квазиизотропного композита по формулам (47) и (55), соответственно. При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{S10} = 0{,}006541\,,\ \omega_1^0 = 0{,}031363\,,\ b_1 = 4{,}32996\,,$$

$$\varepsilon_{S2} = 0{,}0015368\,,\ \omega_2^0 = 0{,}9431\,,\ b_{20} = 3{,}9724\,.$$

Поскольку наполнитель композита является упругим, а матрица — не обладает пластичностью при объемном сжатии, то композит также не проявляет значительных пластических свойств при объемном сжатии, поэтому диаграмма $Y_1(\sigma) = \bar{F}_1(Y_1(\varepsilon))$ (рис. 3*а*) близка к линейной до больших значений напряжений.



а *б*

Рис. 3. Диаграммы деформирования для ДАКМ, полученные по траекториям № 2 и 3 с помощью прямого решения задач L_{pq} (кривые — 1) и аппроксимации по формулам (47) и (55) (кривые — 2):
а — $Y_1(\sigma) = \bar{F}_3(Y_1(\varepsilon))$; *б* — $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$

На рис. 4 показаны диаграммы деформирования композита при траектории нагружения № 4, представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon), Y_{3\max}(\varepsilon))$ при различных фиксированных значениях инварианта $Y_{3\max}(\varepsilon)$, достигнутых на первом участке траектории № 4. соответственно. Для каждой из таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения (61) с различными значениями параметра b_2. В результате была построения функция зависимости. График этой функции показан на рис. 5. Для аналитической аппроксимации этой функции применялась модель (21). При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{S2} = 0{,}6277\,,\ b_{22} = 47{,}6585\,,\ b_{21} = -5{,}80369\,.$$

На рис. 6 показаны диаграммы деформирования композита при траектории нагружения № 5, представленные в виде зависимостей инвариантов $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon), Y_{2\max}(\varepsilon))$ при различных фиксированных значениях инварианта $Y_{2\max}(\varepsilon)$, достигнутых на первом участке траектории № 5, соответственно. Для каждой из таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения (68) с различными значениями параметра b_3. В результате была построена функция зависимости $b_3(Y_{2\max}(\varepsilon))$ и найдены константы аппроксимации b_{31}, b_{32}. График этой функции показан на рис. 7). При

аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{S3} = 1{,}59305, \quad b_{32} = 27{,}4546, \quad b_{31} = 10{,}5042.$$

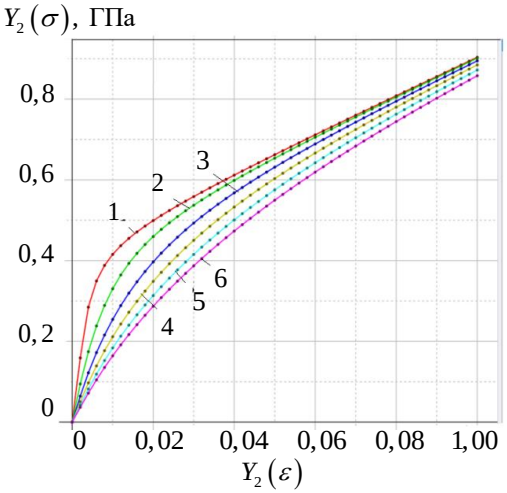


Рис. 4. Диаграммы деформирования для ДАКМ, полученные по траекториям № 4 с помощью прямого решения задач L_{pq} для различных значениях $Y_{3\max}(\varepsilon)$: 0 (1); 0,01 (2); 0,02 (3);0,03 (4); 0,04(5) и 0,05 (6)

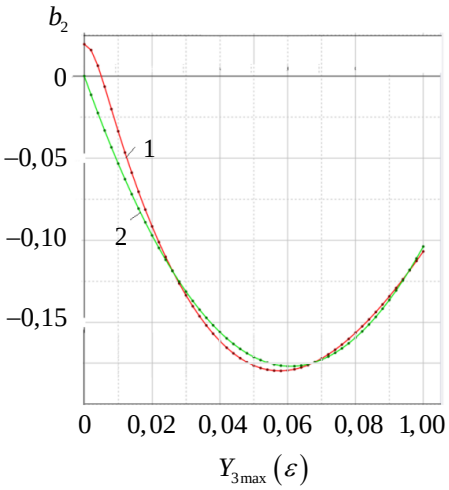


Рис. 5. зависимости параметра b_3 от $Y_{3\max}(\varepsilon)$, полученные прямым решением задач L_{pq} (кривая 1) и с помощью аппроксимации (68) (кривая 2)

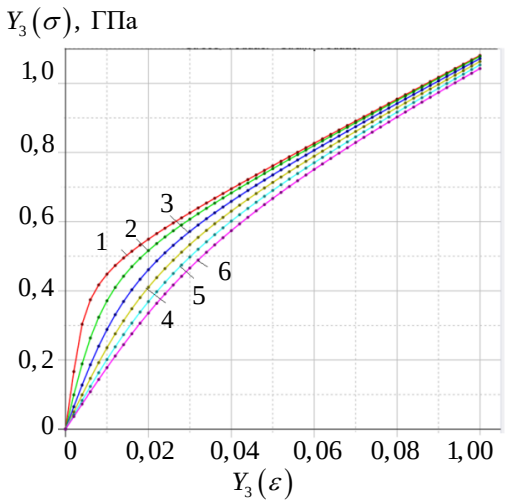


Рис. 6. Диаграммы деформирования $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon), Y_{2\max}(\varepsilon))$ для ДАКМ, полученные по траекториям № 4 с помощью прямого решения задач L_{pq} (кривые —1) для различных значениях $Y_{2\max}(\varepsilon)$ =0 (1): 0 (1); 0,01 (2); 0,02 (3); 0,03 (4); 0,04(5) и 0,05 (6)

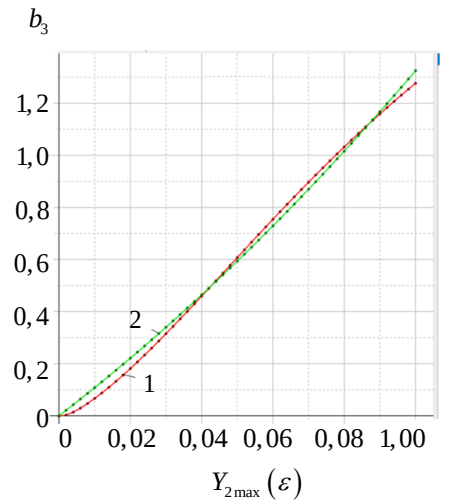
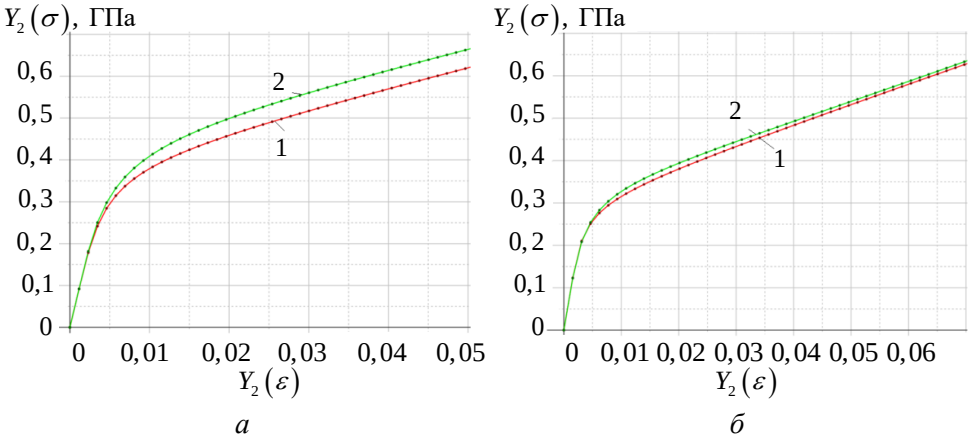


Рис. 7. зависимости параметра b_3 от $Y_{2\max}(\varepsilon)$, полученные прямым решением задач L_{pq} (1) и с помощью аппроксимации (68)

Для верификации разработанной модели были проведены проверочные расчёты по направлениям нагружения (33), которые не были использованы при определении констант модели. Эти направления задавались координатным столбцом значений $\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}$.

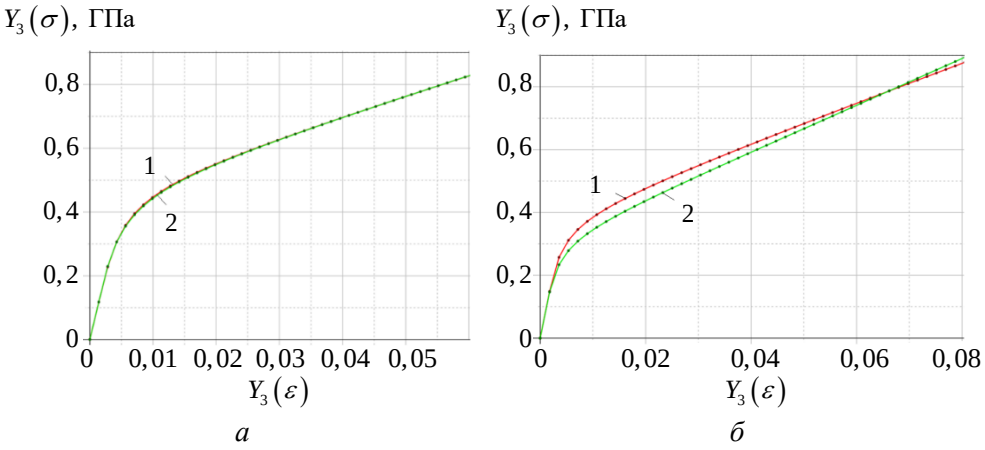
На рис. 8 показаны диаграммы деформирования $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$, полученные прямым решением задач L_{pq} и с помощью микроструктурной модели, при нагружении $\{\dot{\sigma}\} = \{2,0,5,0,5,0,0,0\}$, составленном из 2-х видов: объемного сжатия и растяжения с нулевым первым инвариантом, как для траектории № 3, а также при нагружении $\{\dot{\sigma}\} = \{1,-0,5,-0,5,1,0,0\}$, составленном из сдвига и растяжения с нулевым первым инвариантом. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 7,124% — для первого их указанных нагружений и 0,537% — для второго.

На рис. 9 показаны диаграммы деформирования $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon))$, полученные прямым решением задач L_{pq} и с помощью микроструктурной модели, при нагружении $\{\dot{\sigma}\} = \{1,1,1,1,0,0\}$, составленном из 2-х видов: объемного сжатия и сдвига, а также при нагружении $\{\dot{\sigma}\} = \{1,-0,5,-0,5,1,0,0\}$, составленном из сдвига и растяжения с нулевым первым инвариантом. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 0,218% — для первого их указанных нагружений и 4,08% — для второго.



а *б*

Рис. 8. Диаграммы деформирования $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$ для ДАКМ, полученные с помощью прямого решения задач L_{pq} (кривые —1) и с помощью микроструктурной модели (кривые — 2) по траекториям: *а* — $\{\dot{\sigma}\} = \{2,0,5,0,5,0,0,0\}$; *б* — $\{\dot{\sigma}\} = \{1,-0,5,-0,5,1,0,0\}$



а *б*

Рис. 9. Диаграммы деформирования $Y_3(\sigma) = \bar{F}_3(Y_3(\varepsilon))$ для ДАКМ, полученные с помощью прямого решения задач L_{pq} (кривые —1) и с помощью микроструктурной модели (кривые — 2) по траекториям: *а* — $\{\dot{\sigma}\} = \{2, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 0\}$; *б* — $\{\dot{\sigma}\} = \{1, -0, 5, -0, 5, 1, 0, 0\}$

Заключение. Предложена микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов, основанная на тензорно-симметрийном представлении определяющих соотношений теории анизотропной пластичности, конкретных моделях спектральных функций пластичности и методе асимптотического осреднения для определения констант этой модели. Проведен численный пример расчетов констант модели для дисперсно-армированного композиционного материала на алюминиевой матрице, для которого вычислены все константы модели. А также проведены верификационные расчеты диаграмм пластичности при различных путях нагружения, показано, что разработанная модель обеспечивает высокую точность прогнозирования упруго-пластических свойств композита.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni-based matrix composites – III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp.195–204.

[2] Rawal S. Metal-matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 14–17.

[3] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.

[4] Ковтунов А.И., Мямин С.В., Семистенова Т.В. *Слоистые композиционные материалы: электронное учебное пособие.* Тольятти, Изд-во ТГУ, 2017, 75 с.

[5] Никитин В.С., Половинкин В.Н. Применение композитных материалов в зарубежном подводном кораблестроении. *Информационное агентство*

«ПРоАтом» [Электронный ресурс]. URL: http://www.proatom.ru/ (дата обращения 20.10.2021).

[6] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[7] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[8] Былим А.В., Сараев Л.А., Сахабиев В.А. Особенности упругопластического деформирования двухкомпонентных композитов. *Вестник СамГУ*, 1998, № 4, с. 113–119.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[11] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.

[12] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer-Verlag, 2002, 276 p.

[13] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[15] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

[16] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры,* 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.

[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2, с. 3–22.

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[19] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asympotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[20] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[21] Санчес–Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[22] Ильюшин А.А. *Пластичность.* Упруго-пластические деформации. Москва, URSS, 2018, 392 с.

[23] Ильюшин А.А., Ленский В.В. *Сопротивление материалов*. Москва, Физматлит, 1959, 372 с.

[24] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций*. Москва, URSS, 2019, 344 с.

[25] Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. Москва, Физматлит, 2008, 176 с.

[26] Горшков А.Г., Старовой Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций.* Москва, Физматлит, 2005, 576 с.

[27] Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. Москва, Гостехиздат, 1956, 407 с.

[28] Ишлинский А.Ю. *Прикладные задачи механики. Книга 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел*. Москва, URSS, 2021, 358 с.

[29] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[30] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.

[31] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[32] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[33] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Беленовская Ю.В., Анискович В.А., Перевислов С.Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC. *Наука и образование. Электронный журнал*, 2013, № 11, с. 475–496. DOI: 10.7463/1113.0659438

[34] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[35] Свидетельство № 2019666176 *Программа NonlinearEl_Disp_Manipula для прогнозирования диаграмм нелинейно-упругого деформирования дисперсно-армированных композитов при малых деформациях на основе конечно-элементного решения 3D локальных задач микромеханики*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2019665098; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019 — [1].

[36] Свидетельство № 2019666172 *Программа StrengthCom SMCM для конечно-элементного расчета прочностных характеристик композитных материалов со сложной структурой с учетом накопления микроповреждений и кинетики мезоскопических дефектов*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана – № 2019665109; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019. – [1].

[37] Свидетельство № 2018614767 *Программа MultiScale_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода*

многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2018677684; заявл. 21.02.2018; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17.04.2018. — [1].

Статья поступила в редакцию 27.10.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Сборщиков Сергей Васильевич — научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: servasbor@gmail.com

Димитриенко Александр Юрьевич — магистрант МГУ им.М.В. Ломоносова. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Modeling microstructural model of the plasticity deformation theory for quasi-isotropic composite materials

© Yu.I. Dimitrienko[1], S.V. Sborschikov[1],
A.Yu. Dimitrienko[2], Yu.V. Yurin[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

A model of constitutive relations for elastic-plastic composites with cubic symmetry of properties is proposed. This class includes a significant number of composite materials: dispersed-reinforced composites, which have an ordered rather than a chaotic reinforcement system, as well as some types of spatially reinforced composites. To build a model of nonlinear constitutive relations, a tensor-symmetry approach was used, based on the spectral expansions of stress and strain tensors, as well as the spectral representation of nonlinear tensor relations between these tensors. The deformation theory of plasticity is considered, for which the tensor-symmetric approach is used, and specific models are proposed for plasticity functions that depend on the spectral

invariants of the strain tensor. To determine the model constants, a method is proposed in which these constants are calculated based on the approximation of deformation curves obtained by direct numerical solution of three-dimensional problems on the periodicity cell of elastic-plastic composites. These problems arise in the method of asymptotic averaging of periodic media. To solve problems on a periodicity cell, a finite element method and special software was used that implements solutions to problems on periodicity cells, developed at the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Packages of Bauman Moscow State Technical University. An example of calculating the constants of a composite model using the proposed method for a dispersed-reinforced composite based on a metal matrix is considered. Also, the verification of the proposed model for various ways of multiaxial loading of the composite was carried out with direct numerical simulation. It is shown that the proposed microstructural model and the algorithm for determining its constants provide a sufficiently high accuracy in predicting the elastic-plastic deformation of the composite.

***Keywords**: composites, numerical simulation, deformation theory of plasticity, quasi-isotropic materials, microstructural model, asymptotic averaging method, finite element method, dispersed-reinforced composites, metal composites, deformation diagrams, invariants*

REFERENCES

[1] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni-based matrix composites – III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp.195–204.

[2] Rawal S. Metal-matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 14–17.

[3] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. Springer-Verlag. 1990, 779 p.

[4] Kovtunov A.I., Mamin S.V., Semistenova T.V. *Sloistyye kompozitsionnyye materialy: elektronnoye uchebnoye posobiye. [Layered composite materials: electronic textbook]*. Togliatti, TSU Publ., 2017, 75 p.

[5] Nikitin V.S., Polovinkin V.N. Primenenie kompozitnyh materialov v zarubezhnom podvodnom korablestroenii [Application of composite materials in foreign underwater shipbuilding[. *Information Agency "PRoAtom"* [Electronic resource]. URL: http://www.proatom.ru / (accessed 20.10.2021).

[6] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[7] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.

[8] Bilim A.V., Saraev L.A., Sahabiev V.A.The persicularities of two–component composite materials elastic–plastic deformation. *Vestnik of Samara University*, 1998, no. 4, pp. 113–119.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[11] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[12] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer-Verlag, 2002, 276 p.

[13] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[14] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[15] Dimitrienko Y.I., Sborschikov S.V, Yurin Y.V. Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, № 4, pp. 3–26.

[16] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Prozorovsky A.A., Gubareva E.A., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Krylov V.D., Grigorev M.M., Fedonyuk N.N. Development of a multilayer polymer composite material with discrete structural-orthotropic fillers. *Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.

[17] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I. Modeling the elastic–plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 3–22.

[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of elastic–plastic composites with an allowance for fault probability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, № 2, pp. 3–23.

[19] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asympotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[20] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[21] Sanches–Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[22] Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Elastic-plastic deformations]. Moscow, URSS, 2018, 392 p.

[23] Ilyushin A.A., Lensky V.V. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, 372 p.

[24] Moskvitin V.V. *Ciklicheskie nagruzheniya elementov konstrukcij* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS, 2019, 344 p.

[25] Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proporcional'nye i nepro-porcional'nye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and disproportionate loads]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 176 p.

[26] Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistyh vyazkoupru-goplasticheskih elementov konstrukcij* [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 576 p.

[27] Hill R. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956, 407 p.

[28] Ishlinskiy A.Yu. *Prikladnye zadachi mekhaniki. Kniga 1. Mekhanika vyazkoplasticheskih i ne vpolne uprugih tel* [Applied problems of mechanics. Book 1. Mechanics of viscoplastic and not completely elastic bodies]. Moscow, URSS, 2021, 358 p.

[29] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[30] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Higher School Publ., 2001, 576 p.

[31] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[32] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[33] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Belenovskaya Yu.V., Aniskovich V.A., Perevislov S.N. Modeling microstructural destruction and strength of ceramic composites based on the reaction-bonded SiC. *Science and Education: Electronic Scientific and Technical Journal*, 2013, no. 11, pp. 475–496. DOI: 10.7463/1113.0659438

[34] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[35] Certificate no. 2019666176 *Programma NonlinearEl_Disp_Manipula dlya prognozirovaniya diagramm nelinejno-uprugogo deformirovaniya dispersno-armirovannyh kompozitov pri malyh deformaciyah na osnove konechno-elementnogo resheniya 3D lokal'nyh zadach mikromekhaniki: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The program NonlinearEl_Disp_Manipula for predicting diagrams of nonlinear elastic deformation of dispersed-reinforced composites under small deformations based on the finite element solution of 3D local problems of micromechanics: certificate of ofic. registration of a computer program] / Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, S.V. Sobshchikov, I.O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2019665098; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

[36] Certificate no. 2019666172 *Programma StrengthCom SMCM dlya konechno-elementnogo rascheta prochnostnyh harakteristik kompozitnyh materialov so slozhnoj strukturoj s uchetom nakopleniya mikro-povrezhdenij i kinetiki mezoskopicheskih defektov: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The StrengthCom SMCM program for finite element calculation of strength characteristics of composite materials with a complex structure, taking into account the accumulation of micro-damage and the kinetics of mesoscopic defects]: certificate of ofic. registration of a computer program / Yu. I. Dimitrienko, E. A. Gubareva, Yu. V. Yurin, S. V. Sobshchikov, I. O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2019665109; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

[37] Certificate no. 2018614767 *Programma MultiScale_SMCM dlya mnogomasshtabnogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstrukcij iz kompozicionnyh materialov, na osnove metoda mnogourovnevoj asimptoticheskoj gomogenizacii i konechno-elementnogo resheniya trekhmernyh zadach teorii uprugosti* [MultiScale_SMCM program for

multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of three-dimensional problems of elasticity theory]: certificate of ofic. registration of computer programs/ Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2018677684; application 21.02.2018; registered in the register of computer programs 17.04.2018 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Sborschikov S.V., researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: servasbor@gmail.com

Dimitrienko A.Yu., magistrant of Lomonosov Moscow State University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru