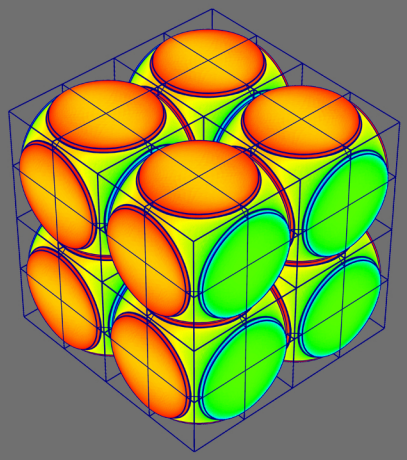
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Абас Висам Махди Абас, Арутюнян Р.В. Моделирование нелинейных динамических и стационарных систем на основе интегро-функциональных рядов Вольтерры и различных классов квадратурных формул. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 2, с. 68–85.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/251/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 10:00:16

УДК 517 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-2-6885

Моделирование нелинейных динамических и стационарных систем на основе интегро–функциональных рядов Вольтерры и различных классов квадратурных формул

© Абас Висам Махди Абас[1], Р.В. Арутюнян[2]

[1]ЮРГПУ (НПИ), г. Новочеркасск, Ростовская обл., 346428, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматриваются вопросы анализа нелинейных динамических и стационарных систем на основе интегро–функциональных рядов Вольтерры и различных классов квадратурных формул. Используется математическая модель типа вход–выход, не учитывающая конкретную физическую природу динамического процесса, которую принято называть черным ящиком. Методы статьи применимы для основных вариантов интегрально–функционального разложения Вольтерры, в том числе для случая стационарных динамических систем, векторного входного сигнала. Дан пример задачи оптимизации на основе рассматриваемых интегростепенных рядов. Отмечено, при анализе и оптимизации нелинейных динамических систем методом интегро–функциональных рядов может возникнуть проблема вычисления многомерных интегралов. Рассмотрено применение для задач анализа нелинейных динамических и стационарных систем комбинированного метода, основанного на интегростепенном ряде Вольтерры и сеточных методах решения соответствующих одно- и многомерных интегральных уравнений. Рассматривается случай, когда известен некоторый набор реализаций входного и выходного сигналов, которые могут быть в принципе случайными процессами. По этим данным осуществляется отыскание ядер в разложении на основе решения соответствующего линейного многомерного интегрального уравнения Фредгольма I рода. Соответствующая задача относится к некорректно поставленным и для ее решения применен метод регуляризации по А.Н. Тихонову. В статье предлагается применять в данной задаче в случае больших размерностей метод квази Монте–Карло, характерный удовлетворительной сходимостью. Исследованы вычислительные качества в рассматриваемой задаче полустатистического метода решения интегральных уравнений большой размерности, метод квазиМонте-–Карло, метод центральных прямоугольников (ячеек) и квадратурные формулы Гаусса–Лежандра. Рассматриваемые подходы позволяют расширить круг решаемых задач теории анализа и оптимизации систем, поскольку предложены методы, практически приемлемые при больших размерностях интегральных уравнений в условиях ограниченной информации о системе.

Ключевые слова: *динамическая нелинейная система, анализ, оптимизация, интегро–функциональные ряды, интегральные уравнения, высокая размерность, методы Монте–Карло и квази Монте–Карло, метод ячеек, квадратуры Гаусса–-Лежандра*

Введение. В статье рассматривается математическая модель типа вход–выход, не учитывающая конкретную физическую природу динамического процесса, которую принято называть черным ящиком.

На рис. 1 черный ящик, соответствует отображению $y(t) = F\left[x(t), t\right]$ нелинейного динамического процесса. Входные факторы обозначены вектором $\boldsymbol{x} = \left\{x_1, x_2, ..., x_m\right\}$, выходные факторы — вектором $\boldsymbol{y} = \left\{y_1, y_2, ..., y_n\right\}$, а фактор случайности, который условно объединяет все случайные факторы — C.

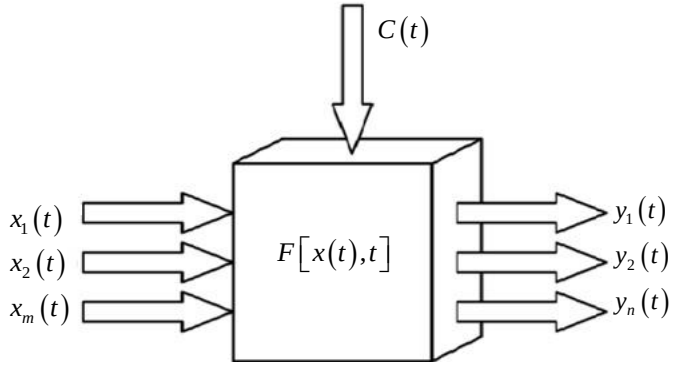


Рис. 1. Схема типа «черный ящик» многофакторного динамического нелинейного объекта исследования

В 1930 году итальянский математик Вито Вольтерра, комбинируя различные представления сигнала, в книге [1] ввел понятие интегро–степенного ряда вида

$$F\left[x(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} K_n\left(t, s_1, ..., s_n\right) \prod_{r=1}^{n} x(s_r) ds_r, \ t \in \left[a, b\right] \qquad (1)$$

и доказал, что разложение (1) обобщает обычную формулу Тейлора для функций n переменных, причем в (1) функции $K_n\left(t, s_1, ..., s_n\right)$ непрерывны и не зависят от $x\left(t\right)$. Фундаментальным результатом оказалось то, что ряд Вольтерры (1) описывает нелинейные системы с памятью. В (1) $K_n\left(t, s_1, ..., s_n\right)$ могут быть ядрами Вольтерры или переходными функциями (характеристиками). Для различных n ряд (1) характеризует различные порядки нелинейности. Сходимость ряда Вольтерры гарантируется теоремой Фреше. Применение рядов Вольтерры к задачам механики сплошных сред, а также их обобщение на случай тензоров $n-$го ранга, можно найти в [2, 3]. Применение рядов Вольтерры для задач теории фильтрации можно найти в [4].

Одна из основных задач состоит в восстановлении переходных характеристик на основании откликов системы на специально подобранные входные сигналы. Задача идентификации динамических систем на основе рядов Вольтерры, является обратной задачей. В ряде работ

[5–7] отрезок ряда Вольтерры рассматривается как уравнение Вольтерры I рода относительно входного вектора $x(t)$ в предположении, что ядра уже восстановлены и требуется найти входной сигнал, обеспечивающий желаемый отклик.

Моделирование стационарных динамических систем. Рассмотрим стационарные динамические системы, т.е. такие системы, у которых динамические характеристики за время переходного процесса T остаются неизменными. При $N=1$ из (1), получаем стандартное в линейной теории автоматического регулирования представление выходного сигнала через интеграл типа свертки (Дюамеля)

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\ldots\int_0^t K_n\left(s_1,\ldots,s_n\right)\prod_{r=1}^{n}x(t-s_r)ds_r. \qquad (2)$$

Случай векторного входного сигнала и оптимизация системы. Оптимизация системы возможна на основе интегростепенного ряда Вольтерры, если вектор входного сигнала многомерный, например, $x(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_p(t)\right)^{\mathrm{T}}$. В этом случае интегростепенной ряд Вольтерры имеет следующий вид [1, 2]:

$$F\left[x(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le p}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K_{i_1,\ldots i_n}\left(t,s_1,\ldots,s_n\right)\prod_{r=1}^{n}x_{i_r}(s_r)ds_r. \qquad (3)$$

Рассмотрим пример задачи оптимизации, в которой роль управляющих играют все координаты входного сигнала. Требуется обеспечить поддержание требуемого выходного сигнала

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le p}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K_{i_1,\ldots i_n}\left(t,s_1\ldots,s_n\right)\prod_{r=1}^{n}u_{i_r}(s_r)ds_r=y(t), \qquad (4)$$

при ограничениях на входные сигналы

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}u_i{}^2(s)ds\le C_0$$

и минимальном значении некоторого критерия, например,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_1(s)-w(s))^2ds\to\min.$$

Таким образом, при анализе и оптимизации нелинейных динамических систем методом интегро–функциональных рядов может возникнуть проблема вычисления многомерных интегралов. В [5–7]

идентификация ядер разложений типа (1) осуществляется на основе тестовых сигналов специального вида (обычно ступенчатых) и выводятся формулы для ядер на их основе. Однако на практике не всегда для тестирования системы можно выбирать любой желаемый сигнал. Для случая пассивного эксперимента такой подход, вообще говоря, не приемлем. В данной статье мы продолжаем исследование [8] и рассматриваем случай, когда известен некоторый набор реализаций входного и выходного сигналов, которые могут быть в принципе случайными процессами. По этим данным осуществляется отыскание ядер в разложении (1) на основе решения соответствующего нелинейного многомерного интегрального уравнения Фредгольма I рода. Соответствующая задача относится к некорректно поставленным и для ее решения применен метод регуляризации по А.Н. Тихонову. Таким образом, одной из основных задач является вычисление многомерного интеграла. Для этого в статье предлагается применять методы Монте Карло, квази Монте–Карло, полустатистический метод и его варианты, метод ячеек и квадратур Гаусса–Лежандра.

Метод Монте–Карло находит широкое применение в практике решения вычислительных задач, в том числе при решении интегральных уравнений [1, 9–15]. В то же время не все возможности данного метода используются полностью. Так при решении интегральных уравнений преимущественно используется вариант этого метода, основанный на суммировании резольвенты и использовании цепей Маркова [13]. Это обстоятельство значительно сужает класс решаемых задач, так как требуется ограничение нормы интегрального оператора единицей. В работе [12] предложен подход, названный полустатистическим и основанный на применении квадратурной формулы со случайными узлами. В данной статье проводится сравнительное исследование ранее перечисленных квадратурных формул.

Примеры идентификации ядер в разложении (1). Задача 1. Рассмотрим приближенную модель 2–го порядка. Решается интегральное уравнение типа Вольтерры (1) с учетом только линейного и квадратичного членов:

$$\int_0^t K_1(t,s_1)\,\hat{X}_1(s_1,\varpi)ds_1 + \\ +\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)\,\hat{X}_2(s_1,s_2,\varpi)ds_1ds_2 = y(t,\varpi),\ t\in[0,1], \tag{5}$$

где $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$ — искомые функции, ядрами интегрального уравнения являются функции

$$\hat{X}_1(s,\varpi) = x(s,\varpi), \quad \hat{X}_2(s_1,s_2,\varpi) = x(s_1,\varpi)x(s_2,\varpi)/2!,$$

где $x(t,\varpi)$ — множество входных сигналов, ϖ — некоторый параметр, возможно, векторный и (или) случайный, выходные сигналы имеют вид $y(t,\varpi)$.

Интегральное уравнение (5) имеет неоднородную структуру и часто плохо обусловлено. Поэтому целесообразно осуществить его редукцию на два независимых интегральных уравнения для раздельного отыскания функций $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$. Для этого применим стандартный в анализе систем прием [2], выбрав два типа тестовых сигналов, различающихся только знаком: $x^{\pm} = \pm x^0(t,\varpi)$. Соответствующие отклики системы обозначим $y^{\pm}(t,\varpi)$. Подставим тестовые сигналы в (5), после чего сложим и вычтем соответствующие выражения. Тогда в силу инверсии знаков получим два интегральных уравнения для раздельного отыскания функций $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$:

$$\int_0^t K_1(t,s_1)x^0(s_1,\varpi)ds_1 = \frac{y^+(t,\varpi)-y^-(t,\varpi)}{2}, \qquad (6)$$

$$\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x^0(s_1,\varpi)x^0(s_2,\varpi)ds_1ds_2 = y^+(t,\varpi)+y^-(t,\varpi). \qquad (7)$$

Для решения интегрального уравнения (6) используем, следуя [9] сигналы вида:

$$x_1^0(u,\varpi_1) = d(u) - d(u-\varpi_1),$$

где $d(u) = u^2$.

Соответствующий отклик системы имеет вид

$$y_1(t,\varpi_1) = 2t\varpi_1 - (\varpi_1^2 + 2\varpi_1)(1-e^{-t}).$$

Для отыскания решения интегрального уравнения (7) используем, также следуя [9] сигналы вида:

$$x_2^0(u,\varpi_1) = d(u) - 2d(u-\varpi_1) + d(u-\varpi_1-\varpi_2).$$

Соответствующий отклик системы имеет вид

$$y_2(t,\varpi_1,\varpi_2) = \left(2y_1(t,\varpi_1,\varpi_2) - y_1(t,\varpi_1+\varpi_2,\varpi_2)\right)^2.$$

Известно точное аналитическое решение рассматриваемых интегральных уравнений:

$$K_1(t,s_1)=e^{-t+s_1},\ \ K_2(t,s_1,s_2)=e^{-t+s_1}e^{-t+s_2}.$$

Данное интегральное уравнение относится к разряду некорректно поставленных задач. В результате применения сеточных или аналогичных методов уравнение с интегральным оператором аппроксимируется СЛАУ вида $Az=d$, матрица которой имеет как правило, ранг значительно меньший порядка системы. Поэтому целесообразно применение регуляризации. Опыт показал, что наиболее практичен для решения метод регуляризации по Тихонову. В результате регуляризации получаем новую СЛАУ $A^{\mathrm{T}}Az+\mu z=A^{\mathrm{T}}d$ с некоторым параметром регуляризации μ.

Решение задачи при помощи полустатистического метода. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Фредгольма вида:

$$\mu u(x)-\lambda\int_V K(x,y)b(u(y),y)dy=f(x),\ x\in V, \qquad (8)$$

где $u(x)$ — искомая функция, x — точка области V из $m-$мерного евклидова пространства, μ и λ — некоторые вещественные или комплексные числа, $K(x,y)$ — ядро интегрального оператора, $b(u,y)$ — некоторая непрерывная функция, $f(x)$ — свободный член.

Предположим, что известны n случайных точек области $V: y^1=\left(y_1^1,...,y_m^1\right)$, …, $y^n=\left(y_1^n,...,y_m^n\right)$, полученные из распределения с плотностью $p(y)$, $y\in V$. Условие нормировки:

$$\int_V p(y)dy=1.$$

Интеграл в (8) можно приближенно вычислять при помощи традиционной схемы вычисления интегралов методами Монте–Карло и квази Монте–Карло [8–15]. Используем точки $y^1=\left(y_1^1,...,y_m^1\right)$, …, $y^n=\left(y_1^n,...,y_m^n\right)$, как узлы коллокаций в известном вычислительном методе, при помощи которого получим из (8) соответствующая квадратурную формулу:

$$\mu u_i-\frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K(y^i,y^j)}{p(y^j)}b(u_j,y^j)=f_i,\ u_i\approx u(y^i),\ i=1,\ldots,n. \qquad (9)$$

Поскольку остаточный член квадратурной суммы метода Монте–

Карло с любой наперед заданной вероятностью стремится к нулю при стремлении числа узлов к бесконечности, то обоснованно предполагать, что при достаточно гладком ядре и ограниченности оператора, обратного к оператору интегрального уравнения (8), решение (9) сходится к точному в одной из вероятностных мер. Отличие метода квази Монте–Карло заключается в применении вместо случайных узлов низкодисперсных последовательностей типа последовательностей Хальтона и Соболя. Также автор применял подход на основе случайных последовательностей со специально уменьшенной дисперсией. Применение низкодисперсных последовательностей позволяет существенно улучшить сходимость метода. Соответствующие примеры эффективного применения отмеченного подхода содержатся в статьях автора [8, 10, 11].

Результаты численного моделирования. При численном решении бесконечные интервалы в интегральных операторах усекались до конечных отрезков на основе анализа поведения подынтегральных функций. По указанной причине интегрирование всегда осуществлялось на некотором конечном интервале от a до b. Координаты узлов интегрирования вычислялись при помощи последовательности Хальтона по правилу:

$$s_{1i} = a + (b-a)H_s(i,2),\ s_{2i} = a + (b-a)H_s(i,3),\ i = 1,...,n_1.$$

По аналогичным формулам вычислялись значения параметров ϖ_1, ϖ_2.

Программное вычисление элементов последовательности описывается следующим фрагментом программы на алгоритмическом языке Паскаль:

```
{Последовательность Хальтона с основанием base}
function Hs(index, base: integer): real;
var i : integer;rs,f :real;
begin
  rs:=0;f:=1;i:=index;
  while (i>0) do
  begin
    f:=f/base;rs:=rs+f*(i mod base);i:=floor(i/base);
  end;
  Hs:=rs
 end;
```

При численных вычислениях применялись следующие значения параметров интегральных уравнений, сеточного метода и параметра регуляризации:

$$a = 0;\ \ b = t;\ \ t = 1;\ \ \mu = 10^{-5};\ \ n_1 = 10;\ \ n_2 = 100.$$

Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

Приближенные и точные значения одномерного ядра

i	s_{1i}	$K_1(t=1, s_{1i})$	ε, %	$K_1(t=1, s_{1i})$
1	0,81250	0,85976	3,707	0,82903
2	0,18750	0,42606	3,986	0,44375
3	0,68750	0,77302	5,660	0,73162
4	0,43750	0,59954	5,223	0,56978
5	0,93750	0,94650	0,755	0,93941
6	0,03125	0,31763	16,315	0,37956
7	0,53125	0,66460	6,202	0,62578
8	0,28125	0,49111	0,770	0,48736
9	0,78125	0,83808	4,300	0,80352
10	0,15625	0,40437	5,980	0,43009

Таблица 2

Приближенные и точные значения двумерного ядра

i	s_{1i}	s_{2i}	$K_2(t=1, s_{1i}, s_{2i})$	ε, %	$K_2(t=1, s_{1i}, s_{2i})$
1	0,50000	0,33333	0,33287	6,894	0,31140
11	0,81250	0,70370	0,69234	12,313	0,61644
21	0,65625	0,18519	0,30602	2,523	0,31394
31	0,96875	0,45679	0,59760	6,143	0,56301
41	0,57813	0,82716	0,61666	11,770	0,55172
51	0,79688	0,30864	0,42494	3,944	0,40882
61	0,73438	0,58025	0,56999	13,115	0,50390
71	0,88281	0,95062	0,90872	7,342	0,84656
81	0,53906	0,00412	0,18491	20,630	0,23298
91	0,85156	0,37449	0,48929	6,095	0,46119
100	0,14844	0,41152	0,22422	5,358	0,23692

При решении первого интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 5,3 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,029; среднеквадратическая погрешность 0,033.

При решении второго интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 9,7 %; среднеарифметическая абсолютная

погрешность 0,37; среднеквадратическая погрешность 0,14. Относительно большая абсолютная погрешность связана с некоторым неравномерным распределением погрешности в узлах сетки (в некоторых узлах имеют место «выбросы»).

Метод центральных прямоугольников. Значения координат узлов квадратурной формулы при решении первого интегрального уравнения вычисляются по правилу:

$$s_{1i} = a + (b-a)(i-0,5)/n_1, \quad \varpi_{1i} = a + (b-a)(i-0,5)/n_1, \; i = 1,...,n_1.$$

Для второго интегрального уравнения значения координат узлов и параметров ϖ_1, ϖ_2:

$$s_{1k} = a + (b-a)(i-0,5)/k_0, \quad s_{2k} = a + (b-a)(j-0,5)/k_0,$$
$$\varpi_{1k} = a + (b-a)(i-0,5)/k_0, \quad \varpi_{2k} = a + (b-a)(j-0,5)/k_0,$$
$$i = \left[(k-1)/k_0\right] + 1, \quad j = (k-1) \bmod k_0 + 1, \; k = 1,...,n_2.$$

Параметры интегральных уравнений, сеточного метода и регуляризации:

$$a = 0; \;\; b = t; \;\; t = 1; \;\; \mu = 10^{-6}; \;\; k_0 = n_1 = 10; \;\; n_2 = k_0^2.$$

Результаты вычислений представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Приближенные и точные значения одномерного ядра

i	s_{1i}	$K_1(t=1, s_{1i})$	ε, %	$K_1(t=1, s_{1i})$
1	0,05	0,34874	9,827	0,38674
2	0,15	0,41161	3,698	0,42741
3	0,25	0,47448	0,448	0,47237
4	0,35	0,53736	2,933	0,52205
5	0,45	0,60023	4,035	0,57695
6	0,55	0,66311	3,996	0,63763
7	0,65	0,72598	3,022	0,70469
8	0,75	0,78885	1,291	0,77880
9	0,85	0,85173	1,043	0,86071
10	0,95	0,91460	3,850	0,95123

При решении первого интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 3,4 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,02; среднеквадратическая погрешность 0,022.

Таблица 4

Приближенные и точные значения двумерного ядра

i	s_{1i}	s_{2i}	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$	ε, %	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$
1	0,05000	0,05000	0,12214	18,339	0,14957
11	0,15000	0,05000	0,14409	12,831	0,16530
21	0,25000	0,05000	0,16604	9,111	0,18268
31	0,35000	0,05000	0,18799	6,888	0,20190
41	0,45000	0,05000	0,20994	5,911	0,22313
51	0,55000	0,05000	0,23189	5,964	0,24660
61	0,65000	0,05000	0,25384	6,858	0,27253
71	0,75000	0,05000	0,27579	8,434	0,30119
81	0,85000	0,05000	0,29774	10,553	0,33287
91	0,95000	0,05000	0,31969	13,099	0,36788
100	0,95000	0,95000	0,83678	7,522	0,90484

При решении второго интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 4,8 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,017; среднеквадратическая погрешность 0,021.

Целесообразно отметить, что ядра и плотности не всегда гладкие, что обесценивает квадратуры высокой точности. Примечательно, что для рассматриваемой задачи совершенно неэффективен такой авторитетный математический аппарат, как квадратурные формулы наивысшей точности, в том числе квадратуры Гаусса–Лежандра.

Метод квадратур Гаусса. Узлы и веса исходной квадратуры для случая двух узлов равны

$$z_1 = -1/\sqrt{3}, \quad z_2 = 1/\sqrt{3}, \quad A_1 = 1, A_2 = 1.$$

Координаты узлов коллокаций для одномерного интегрального уравнения и параметров сетки, а также матрица СЛАУ имеют вид

$$\begin{gathered} s_{1k} = (a+b)/2 + (b-a)/2\, z_k, \quad \varpi_{1k} = s_{1k}, \quad k = 1,\ldots,n_1, \\ a_{1ij} = (b-a)/2 A_j\, x^0\left(s_{1j}, \varpi_{1i}\right), \quad i, j = 1,\ldots,n_1. \end{gathered} \tag{10}$$

Соответствующие значения для второго интегрального уравнения

$$\begin{gathered} s_{1k} = (a+b)/2 + (b-a)/2\, z_i, \quad s_{2k} = (a+b)/2 + (b-a)/2\, z_j, \\ A_k^* = A_i A_j, \quad \varpi_{1k} = (a+b)/2 + (b-a)/2\, z_i, \end{gathered}$$

$$\varpi_{2k} = \left(a+b\right)/2 + \left(b-a\right)/2\, z_j,$$

$$i = \left[\left(k-1\right)/k_0\right] + 1, \quad j = \left(k-1\right) \bmod k_0 + 1, \quad k = 1,...,n_2,$$

$$a_{2ij} = \left(b-a\right)^2 \Big/ 4A_j^* \, x^0\left(s_{1j}, \varpi_{1i}, \varpi_{2i}\right) x^0\left(s_{2j}, \varpi_{1i}, \varpi_{2i}\right), \quad i, j = 1,...,n_2.$$

Параметры интегральных уравнений, сеточного метода и регуляризации:

$$a = 0; \;\; b = t; \;\; t = 1; \;\; \mu = 10^{-6}; \;\; k_0 = n_1 = 2; \;\; n_2 = k_0^2.$$

Результаты вычислений представлены в таблицах 5 и 6.

Таблица 5

Приближенные и точные значения одномерного ядра

i	s_{1i}	$K_1\left(t=1, s_{1i}\right)$	ε, %	$K_1\left(t=1, s_{1i}\right)$
1	0,21132	0,45250	0,428	0,45445
2	0,78868	0,81158	0,256	0,80951

При решении первого интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 0,34 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,002; среднеквадратическая погрешность 0,002.

Таблица 6

Приближенные и точные значения двумерного ядра

i	s_{1i}	s_{2i}	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$	ε, %	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$
1	0,21132	0,21132	0,20487	0,799	0,20652
2	0,78868	0,78868	0,36736	0,142	0,36788
3	0,78868	0,21132	0,36736	0,142	0,36788
4	0,78868	0,78868	0,65872	0,520	0,65531

При решении второго интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 0,4 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,0015; среднеквадратическая погрешность 0,002.

Согласно вычислениям авторов, последующие квадратурные формулы Гаусса–Лежандра не приносят результата, что возможно, связано с высокой мерой обусловленности матрицы СЛАУ, конечностью разрядной сетки.

Задача 2. Рассмотрим приближенную модель 2–го порядка. Решается интегральное уравнение типа Фредгольма (1) на числовой оси и в пространстве с учетом только линейного и квадратичного членов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(t,s_1)\hat{X}_1(s_1,\varpi)ds_1 +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(t,s_1,s_2)\hat{X}_2(s_1,s_2,\varpi)ds_1ds_2 = y(t,\varpi),\ t\in(-\infty,\infty),$$

где $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$ — искомые функции, ядрами интегрального уравнения являются функции

$$\hat{X}_1(s,\varpi) = x(s,\varpi),$$
$$\hat{X}_2(s_1,s_2,\varpi) = x(s_1,\varpi)x(s_2,\varpi)/2!,$$

где $x(t,\varpi)$ — множество входных сигналов, ϖ — некоторый параметр, возможно, векторный и случайный, выходные сигналы имеют вид $y(t,\varpi)$.

Осуществим редукцию интегрального уравнения на два независимых интегральных уравнения для раздельного отыскания функций $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$. Для этого применим тот же стандартный в анализе систем прием [2], выбрав два типа тестовых сигналов, различающихся только знаком: $x^{\pm} = \pm x^0(t,\varpi)$. В силу инверсии знаков получим два интегральных уравнения для раздельного отыскания функций $K_1(t,s_1)$ и $K_2(t,s_1,s_2)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(t,s_1)x^0(s_1,\varpi)ds_1 = \frac{y^+(t,\varpi)-y^-(t,\varpi)}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(t,s_1,s_2)x^0(s_1,\varpi)x^0(s_2,\varpi)ds_1ds_2 = y^+(t,\varpi)+y^-(t,\varpi).$$

Для решения одномерного интегрального уравнения используем, следуя [9] сигналы вида:

$$x_1^0(u,\varpi_1,\varpi_2) = d(u-\varpi_1)+d(u-\varpi_1-\varpi_2),$$

где $d(u) = e^{-|u|}$.

Соответствующий отклик системы имеет вид

$$y_1(t,\varpi_1,\varpi_2) = d_1(\varpi_1)+d_1(\varpi_1+\varpi_2),$$
$$d_1(u) = e^{-|u|}(1+|u|).$$

Для отыскания решения двумерного интегрального уравнения используем, также следуя [9] сигналы вида:

$$x_2^0\left(u,\varpi_1,\varpi_2\right)=d\left(u-\varpi_1\right)+d\left(u-\varpi_1-\varpi_2\right).$$

Соответствующий отклик системы имеет вид

$$y_2\left(t,\varpi_1,\varpi_2\right)=\left(d_1\left(\varpi_1\right)+d_1\left(\varpi_1+\varpi_2\right)\right)^2.$$

Известно точное аналитическое решение рассматриваемых интегральных уравнений:

$$K_1\left(t,s_1\right)=e^{-|s_1|},$$
$$K_2\left(t,s_1,s_2\right)=e^{-|s_1|}e^{-|s_2|}.$$

Результаты численного решения задачи 2. Результаты вычислений методом центральных прямоугольников представлены в таблицах 7 и 8.

Параметры интегральных уравнений, сеточного метода и регуляризации:

$$a=-3;\ \ b=3;\ \ t=1;\ \ \mu=10^{-2};$$
$$k_0=n_1=25;\ \ n_2=k_0^2.$$

Таблица 7

Приближенные и точные значения одномерного ядра

i	s_{1i}	$K_1\left(t=1,s_{1i}\right)$	ε, %	$K_1\left(t=1,s_{1i}\right)$
1	–2,88000	0,12590	124,290	0,05613
4	–2,16000	0,11356	1,529	0,11533
7	–1,44000	0,23682	0,047	0,23693
10	–0,72000	0,49130	0,935	0,48675
13	0,00000	0,87651	12,349	1,00000
16	0,72000	0,49130	0,935	0,48675
19	1,44000	0,23682	0,047	0,23693
22	2,16000	0,11356	1,529	0,11533
25	2,88000	0,12590	124,290	0,05613

При решении первого интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая относительная погрешность в узлах сетки 13,2 %; среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,014; среднеквадратическая погрешность 0,032.

Таблица 8

Приближенные и точные значения двумерного ядра

i	s_{1i}	s_{2i}	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$	ε, %	$K_2\left(t=1, s_{1i}, s_{2i}\right)$
239	0,72000	0,24000	0,38514	0,587	0,38289
261	0,48000	0,48000	0,39107	2,136	0,38289
264	0,48000	0,24000	0,48865	0,391	0,48675
289	0,24000	0,24000	0,61361	0,836	0,61878
309	0,00000	0,96000	0,35509	7,261	0,38289
312	0,00000	0,24000	0,70918	9,845	0,78663
315	0,00000	0,48000	0,56783	8,234	0,61878
335	0,24000	–0,72000	0,38514	0,587	0,38289
341	0,24000	0,72000	0,38856	1,480	0,38289
363	0,48000	0,00000	0,56783	8,234	0,61878
387	0,72000	–0,24000	0,38514	0,587	0,38289

При решении второго интегрального уравнения параметры точности расчета составили: среднеарифметическая абсолютная погрешность 0,012; среднеквадратическая погрешность 0,024.

Качественно относительно высокая точность сеточного решения иллюстрируется графиками на рис. 2 и 3.

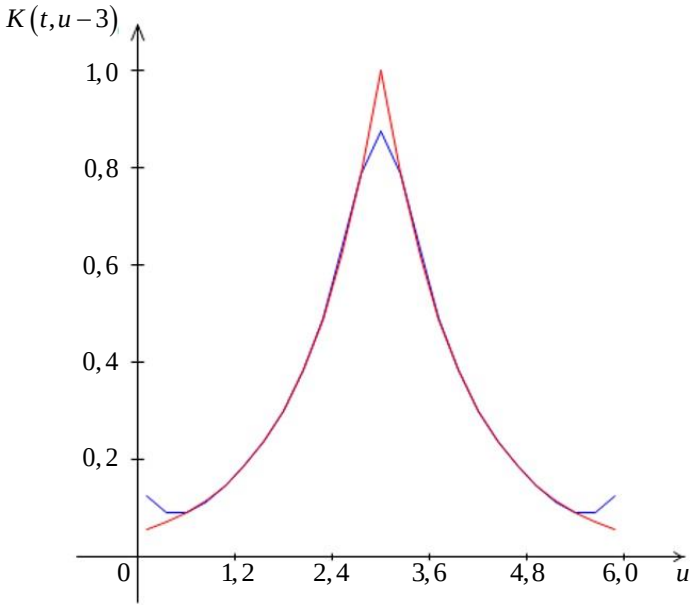


Рис. 2. График точного и приближенного решений одномерного интегрального уравнения

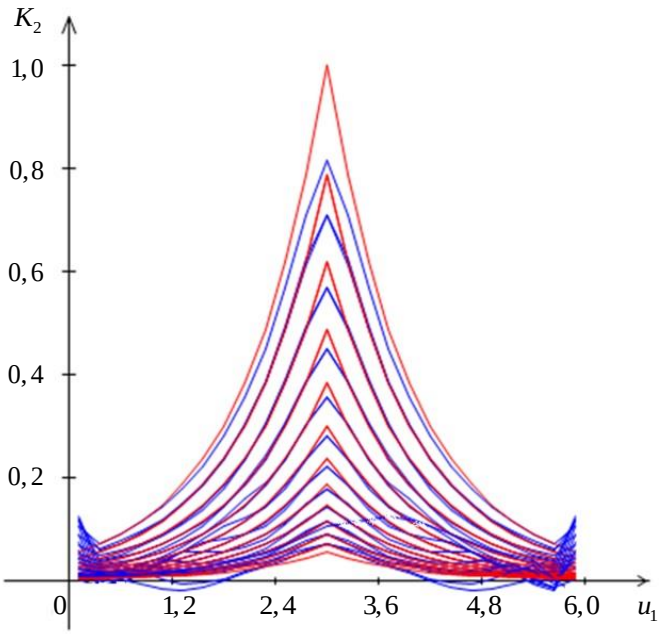


Рис. 3. Серия графиков точного и приближенного решений двумерного интегрального уравнения

Заключение. Рассмотрено применение для задач анализа нелинейных динамических и стационарных систем комбинированного метода, основанного на интегростепенном ряде Вольтерры и сеточных методах решения соответствующих одно- и многомерных интегральных уравнений.

Исследованы вычислительные качества в рассматриваемой задаче полустатистического метода решения интегральных уравнений большой размерности, метод квази Монте–Карло, метод центральных прямоугольников (ячеек) и квадратурные формулы Гаусса–Лежандра.

Рассматриваемые подходы позволяют расширить круг решаемых задач теории анализа и оптимизации систем, поскольку предложены методы, практически приемлемые при больших размерностях интегральных уравнений в условиях ограниченной информации о системе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro–differential equations*. New York, Dover Publ., 2005, 226 p.

[2] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[3] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[4] Арутюнян Р.В. Моделирование стохастических процессов фильтрации в решетчатых системах. *Математическое моделирование и численные методы,* 2017, № 4, с. 17–30.

[5] Милов В.Р. Восстановление многомерных нелинейных зависимостей по экспериментальным данным. *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта*, 2003, № 4, с. 163–168.
[6] Apartsyn A.S., Solodusha S.V., Spiryaev V.F. Modeling of nonlinear dynamic systems with Volterra polynomials: elements of theory and applications. *International Journal of Energy Optimization and Engineering (IJEOE)*, 2013, vol. 2, iss. 4. DOI:10.4018/ijeoe.2013100102
[7] Бобрешов А.М., Мымрикова Н.Н. Проблемы анализа сильно нелинейных режимов электронных устройств на основе рядов Вольтерры. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, с. 15–25.
[8] Абас В.М.А., Арутюнян Р.В. Методы решения интегральных уравнений на случайной и псевдослучайной сетке и их применение в прикладных задачах. *Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Технические науки*, 2021, № 1 (209), с. 27–37.
[9] Сидоров Д. Н. *Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения.* Иркутск, Изд–во ИГУ, 2013, 293 с.
[10] Некрасов С.А., Абас В.М.А. Исследование методов решения интегральных уравнений на случайной и псевдослучайной сетке. *Результаты исследований — 2021. Материалы VI Национальной конференции профессорско–преподавательского состава и научных работников*, Новочеркасск, 2021, с. 44–47.
[11] Абас В.М.А., Арутюнян Р.В. Анализ и оптимизация нелинейных систем с памятью на основе интегро–функциональных рядов Вольтерра и методов Монте–Карло. *Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Технические науки*, 2021, № 3 (211), с. 30–34.
[12] Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю., Кореневский М.Л. Комбинированный метод решения интегральных уравнений. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 1998, № 1, с. 1–40.
[13] Ермаков С.М. *Метод Монте–Карло в вычислительной математике (вводный курс)*. Санкт–Петербург, Бином, 2011, 192 с.
[14] Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю. Метод численного решения интегральных уравнений на случайной сетке. *Дифференциальные уравнения*, 1990, т. 26, № 2, с. 333–341.
[15] Берковский Н.А. *Модернизация полустатистического метода численного решения интегральных уравнений*. Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. Санкт–Петербург, 2006, 15 с.

Статья поступила в редакцию 25.04.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Абас Висам Махди Абас, Арутюнян Р.В. Моделирование нелинейных динамических и стационарных систем на основе интегро–функциональных рядов Вольтерры и различных классов квадратурных формул. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 68–85.

Абас Висам Махди Абас — аспирант кафедры «Прикладной математика» Южно–Российского государственного политехнического университета (НПИ) имени М.И. Платова (ЮРГПУ (НПИ)). e-mail: abas.wisam.82@mail.ru

Арутюнян Роберт Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: rob57@mail.ru

Modeling of nonlinear dynamic and stationary systems based on Volterra integro–functional series and various classes of quadrature formulas

© Abas Wisam Mahdi Abas[1], R.V. Arutyunyan[2]

[1]SRSPU (NPI), Novocherkassk, Rostov region, 346428, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article deals with the analysis of nonlinear dynamic and stationary systems based on Volterra integro–functional series and various classes of quadrature formulas. A mathematical model of the input–output type is used, which does not take into account the specific physical nature of the dynamic process, which is commonly called a black box. The methods of the article are applicable to the main variants of the Volterra integral–functional decomposition, including for the case of stationary dynamical systems, a vector input signal. An example of an optimization problem based on the considered integrative series is given. It is noted that when analyzing and optimizing nonlinear dynamical systems by the method of integro–functional series, the problem of calculating multidimensional integrals may arise. The article considers the application of the combined method based on the Volterra integrative series and grid methods for solving the corresponding one -— and multidimensional integral equations for the analysis of nonlinear dynamic and stationary systems. This article considers the case when a certain set of implementations of input and output signals is known, which can be in principle random processes. According to these data, the kernels are found in the decomposition based on the solution of the corresponding linear multidimensional Fredholm integral equation of the first kind. The corresponding problem belongs to the incorrectly posed ones and the regularization method according to A.N. Tikhonov is used to solve it. The article proposes to apply the quasi Monte–Carlo method, characterized by satisfactory convergence, in this problem in the case of large dimensions. The computational qualities in the considered problem of a semi-statistical method for solving integral equations of large dimension, the quasi Monte–Carlo method, the method of central rectangles (cells) and the quadrature formulas of Gauss–Legendre are studied. The approaches under consideration allow us to expand the range of problems to be solved in the theory of analysis and optimization of systems, since methods are proposed that are practically acceptable for large dimensions of integral equations in conditions of limited information about the system.

***Keywords**: dynamic nonlinear system, analysis, optimization, integro–functional series, integral equations, high dimension, Monte–Carlo and quasi Monte–Carlo methods, cell method, Gauss–Legendre quadratures*

REFERENCES

[1] Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro–differential equations*. New York, Dover Publ., 2005, 226 p.
[2] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.
[3] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[4] Arutyunyan R.V. Modeling of stochastic filtration processes in lattice systems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 17–30.

[5] Milov V.R. Recovery of multivariate nonlinear functions on the basis of experimental data. *Bulletin of VSAWT*, 2003, no. 4, pp. 163–168.
[6] Apartsyn A.S., Solodusha S.V., Spiryaev V.F. Modeling of nonlinear dynamic systems with Volterra polynomials: elements of theory and applications. *International Journal of Energy Optimization and Engineering (IJEOE)*, 2013, vol. 2, iss. 4. DOI:10.4018/ijeoe.2013100102
[7] Bobreshov A.M., Mymrikova N.N. The problems of strongly nonlinear analysis for electron circuits based on Volterra series. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 15–25.
[8] Abas V.M.A., Harutyunyan R.V. The calculation of solutions of integral equations on random and pseudorandom grid and its application. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2021, no. 1 (209), pp. 27–37.
[9] Sidorov D.N. Metody analiza integral'nyh dinamicheskih modelej: teoriya i prilozheniya [Methods of analysis of integral dynamic models: theory and applications]. Irkutsk, ISU Publ., 2013, 293 p.
[10] Nekrasov S.A., Abas V.M.A. The calculation of solutions of integral equations on random and pseudorandom grid and its application. *Rezul'taty issledovanij — 2021. Materialy VI Nacional'noj konferencii professorsko–prepodavatel'skogo sostava i nauchnyh rabotnikov* [Research results — 2021. Materials of the VI National Conference of Faculty and Researchers], Novocherkassk, 2021, pp. 44–47.
[11] Abas V.M.A., Harutyunyan R.V. Analysis and optimization of nonlinear systems with memory based on Volterra integro–functional series and Monte–Carlo methods. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2021, no. 3 (211), pp. 30–34.
[12] Ivanov V.M., Kulchitsky O.Yu., Korenevsky M.L. A combined method for solving integral equations. *Journal Differential Equations and Control Processes*, 1998, no. 1, pp. 1–40.
[13] Ermakov S.M. *Metod Monte–Karlo v vychislitel'noj matematike (vvodnyj kurs)* [Monte–Carlo method in computational mathematics (introductory course)]. St. Petersburg, Binom Publ., 2011, 192 p.
[14] Ivanov V.M., Kulchitsky O.Yu. Method of numerical solution of integral equations on a random grid. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, iss. 2, pp. 259–265.
[15] Berkovsky N.A. *Modernizaciya polustatisticheskogo metoda chislennogo resheniya integral'nyh uravnenij* [Modernization of the semi-statistical method of numerical solution of integral equations]. Abstract of dissertation of the Cand. Sc. (Phys. — Math.). St. Petersburg, 2006, 15 p.

Abas Wisam Mahdi Abas, Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Platov South–Russian State Polytechnic University (NPI) (SRSPU (NPI)). e-mail: abas.wisam.82@mail.ru

Arutyunyan R.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: rob57@mail.ru