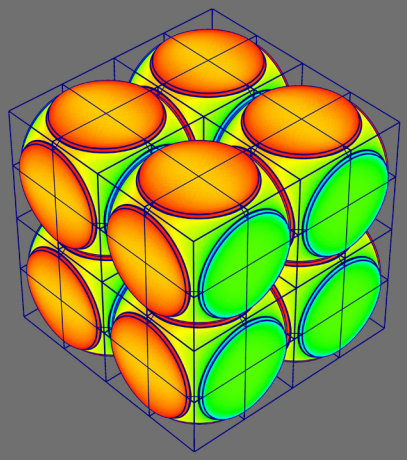
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №4 (4), с. 3-17

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/25/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
07.11.2026 04:59:53

УДК 536.2

Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой

© В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе математической модели теплового взаимодействия включения и матрицы выполнена оценка влияния отклонения формы включений от шаровой на эффективный коэффициент теплопроводности композита и связанное с таким отклонением возможное возникновение анизотропии композита по отношению к свойству теплопроводности. С использованием двойственной вариационной формулировки стационарной задачи теплопроводности в неоднородном теле построены двусторонние оценки эффективных коэффициентов теплопроводности.

Ключевые слова: *композит, включение, эффективная теплопроводность, математическая модель.*

Введение. В качестве конструкционных и строительных материалов, а также функциональных материалов в различных приборных устройствах находят широкое применение композиты, состоящие из матрицы и включений различной формы. К композитам можно отнести большинство применяемых в технике материалов, являющихся гетерогенными твердыми телами. Исследованию теплопроводности таких тел посвящено значительное число научных публикаций, например [1–7]. Расчетные формулы для оценки эффективного коэффициента теплопроводности гетерогенных тел в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо путем априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел.

Если включения в композите имеют близкие размеры во всех направлениях, то в первом приближении их можно рассматривать как шаровые, поскольку шар является статистически усредненной формой таких включений. Близкую к шаровой форму имеют некоторые наноструктурные элементы (в том числе фуллерены), которые в последнее время рассматриваются как перспективные включения для композитов различного назначения [8, 9].

Для композита с шаровыми включениями удается построить адекватные математические модели, позволяющие достаточно достоверно прогнозировать зависимость его эффективного коэффициента теплопроводности от коэффициентов теплопроводности матрицы и включений и от объемной концентрации включений. В силу электротепловой аналогии [10, 11] математические модели, описывающие

процесс теплопроводности в таком композите, могут быть применены для оценки электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости композита. Именно оценке электропроводности неоднородной среды с шаровыми включениями была посвящена первая известная в этом направлении работа, опубликованная К. Максвеллом [12] еще в 1873 г.

Если материалы матрицы и шаровых включений изотропны по отношению к свойству теплопроводности, то такой композит также будет обладать свойством изотропии, т. е. его эффективный коэффициент теплопроводности будет одинаков во всех направлениях. В ряде работ выдвинуто предположение о том, что в случае близости размеров включения в различных направлениях его форму можно в первом приближении принять как шаровую. Оценим количественно влияние отклонения формы включений от шаровой на эффективный коэффициент теплопроводности композита и связанное с таким отклонением возможное возникновение анизотропии композита по отношению к свойству теплопроводности.

Математическая модель теплового взаимодействия включения и матрицы. В качестве возможной формы включения, отличающейся от шаровой и позволяющей построить математическую модель теплового взаимодействия включения и матрицы, является трехосный эллипсоид.

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятого эллипсоидального включения с неограниченным объемом окружающей его матрицы. Начало прямоугольной декартовой системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выберем в центре эллипсоида, причем направления координатных осей совпадают с осями симметрии эллипсоида, уравнение поверхности которого имеет вид $\xi_1^2/b_1^2+\xi_2^2/b_2^2+\xi_3^2/b_3^2=1$, где b_k — полуоси эллипсоида ($k=1,\,2,\,3$). Примем, что на достаточно большом расстоянии от центра включения по сравнению с длиной наибольшей полуоси эллипсоида составляющие градиента установившегося распределения температуры равны $T_{,k}^{\circ}$ (запятая перед нижним индексом k означает производную по направлению оси $O\xi_k$). Тогда во включении возникнет установившееся распределение температуры с составляющими градиента [13]

$$T_{,k}=\frac{T_{,k}^{\circ}}{1-D_{\nu}^{\circ}(1-\lambda_0/\lambda_m)},\quad \nu=k,$$

где λ_0 и λ_m — коэффициенты теплопроводности включения и матрицы соответственно, а

$$D_\nu^\circ = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(b_\nu^2 + u) f(u)}, \quad \nu = k, \tag{1}$$

причем $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$ и $D_1^\circ + D_2^\circ + D_3^\circ = 1$ (в частности, для шара $D_\nu^\circ = 1/3$).

Интегралы в формуле (1) можно выразить через эллиптические интегралы [14]. Например, при $b_1 > b_2 > b_3$

$$D_1^\circ = \frac{\bar{b}_2 \bar{b}_3 (F(\chi, K) - E(\chi, K))}{(1 - \bar{b}_2^2)\sqrt{1 - \bar{b}_3^2}}, \quad D_3^\circ = \frac{\bar{b}_2 \bar{b}_3}{\bar{b}_2^2 - \bar{b}_3^2} \left(\frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_3} - \frac{E(\chi, K)}{\sqrt{1 - \bar{b}_3^2}} \right),$$

где $\bar{b}_2 = b_2 / b_1$ и $\bar{b}_3 = b_3 / b_1$, а $F(\chi, K)$ и $E(\chi, K)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода с амплитудой и модулем $\chi = \arcsin \sqrt{1 - \bar{b}_3^2}$ и $K = \sqrt{(1 - \bar{b}_2^2)/(1 - \bar{b}_3^2)}$.

Температура вне эллипсоидального включения в точке M с координатами ξ_k будет (здесь и далее использовано правило суммирования по повторяющемуся латинскому индексу)

$$T(M) = T_{,k}^\circ \, \xi_k - (\bar{\lambda} - 1) \frac{D_\nu T_{,k}^\circ \, \xi_k}{1 + D_\nu^\circ (\bar{\lambda} - 1)}, \quad \nu = k, \tag{2}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0 / \lambda_m$ и

$$D_\nu = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_\eta^\infty \frac{du}{(b_\nu^2 + u) f(u)}. \tag{3}$$

Здесь η — положительный корень уравнения

$$\xi_1^2 / (b_1^2 + \eta) + \xi_2^2 / (b_2^2 + \eta) + \xi_3^2 / (b_3^2 + \eta) = 1, \tag{4}$$

характеризующий положение точки M с координатами ξ_k.

Из формулы (2) следует, что наличие включения создает в матрице возмущение температурного поля относительно линейного распределения на большом удалении от этого включения, описываемое соотношением

$$\Delta T^\circ = (1 - \bar{\lambda}) \frac{D_\nu T_{,k}^\circ \, \xi_k}{1 + D_\nu^\circ (\bar{\lambda} - 1)}, \quad \nu = k.$$

Далее рассмотрим случай, когда $T_{,1}^\circ = T_{,2}^\circ = 0$; тогда для возмущения температурного поля получим

$$\Delta T_3^{\circ} = (1-\bar{\lambda})\frac{D_1 T_{,3}^{\circ} \xi_3}{1+D_3^{\circ}(\bar{\lambda}-1)}. \qquad (5)$$

Предположим, что в композите все эллипсоидальные включения имеют одинаковые форму и размеры и одинаково ориентированы относительно выбранной системы координат. Это приведет к различию эффективных коэффициентов теплопроводности в направлениях различных координатных осей, т. е. к анизотропии композита по отношению к свойству теплопроводности. Пусть N таких включений находится в объеме V_N, ограниченном поверхностью эллипсоида с уравнением $\xi_1^2/B_1^2+\xi_2^2/B_2^2+\xi_3^2/B_3^2=1$ и равном $4\pi B_1 B_2 B_3/3$, где $B_k = C_0 b_k$, $C_0 = \text{const} \gg 1$. Поскольку объем каждого включения равен $4\pi b_1 b_2 b_3/3$, объемную концентрацию включений можно определить величной $C_V = N/C_0^3$. Для точки с координатами ξ_k, удаленной от каждого из включений на весьма большое расстояние по сравнению с длиной наибольшей из полуосей эллипсоидов, в силу $(b_\nu/\xi_\nu)^2 \ll 1$ ($\nu = k$) в уравнении (4) можно принять $\eta = \xi_k \xi_k$. Тогда, согласно формуле (5), в этой точке N весьма удаленных включений, расположенных в объеме V_N в виде эллипсоида с полуосями B_k, вызовут возмущение температуры

$$\Delta T = N\Delta T_3^{\circ} = N(1-\bar{\lambda})\frac{D_3 T_{,3}^{\circ} \xi_3}{1+D_3^{\circ}(\bar{\lambda}-1)}. \qquad (6)$$

Если считать эллипсоид объемом V_N представительным элементом композита с рассматриваемыми включениями, то этот элемент с искомым значеним λ_3 эффективного коэффициента теплопроводности в направлении оси $O\xi_3$ создаст в той же весьма удаленной точке с координатами ξ_k с учетом формулы (5) такое же возмущение температуры:

$$\Delta T = (1-\tilde{\lambda}_3)\frac{D_3^* T_{,3}^{\circ} \xi_3}{1+D_3^{\circ}(\tilde{\lambda}_3-1)}, \qquad (7)$$

где $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3/\lambda_m$ и

$$D_3^* = \frac{B_1 B_2 B_3}{2}\int_{\eta}^{\infty}\frac{du}{(B_3^2+u)F(u)}, \qquad (8)$$

причем $F(u) = \sqrt{(B_1^2+u)(B_2^2+u)(B_3^2+u)}$. Приравняв правые части формул (6) и (7), запишем

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1+(\bar{\lambda}-1)(D_3^\circ + (1-D_3^\circ)\bar{D}_3 C_V)}{1+(\bar{\lambda}-1)D_3^\circ(1-\bar{D}_3 C_V)}, \qquad (9)$$

где $\bar{D}_3 = D_3 / D_3^*$, т. е. равно отношению интегралов при $\nu = 3$ в формулах (3) и (8). Для весьма удаленной точки $|\xi_1| \to \infty$, что в уравнении (4) равносильно $\eta \to \infty$ и стремлению к нулю каждого из этих интегралов. Для раскрытия неопределенности типа $0/0$ используем правило Лопиталя, продифференцировав каждый из интегралов по переменному пределу η. В итоге получим

$$\bar{D}_3 = \lim_{\eta\to\infty} \frac{(B_3^2+\eta)F(\eta)}{(b_3^2+\eta)f(\eta)} = 1.$$

Таким образом, формула (9) принимает вид [15]

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1+(\bar{\lambda}-1)(D_3^\circ + (1-D_3^\circ)C_V)}{1+(\bar{\lambda}-1)D_3^\circ(1-C_V)}. \qquad (10)$$

В частном случае шаровых включений при $D_3^\circ = 1/3$ композит будет изотропным, а формула (10) совпадает с известной формулой Максвелла [13, 15, 16]

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} = \frac{2+\bar{\lambda}-2(1-\bar{\lambda})C_V}{2+\bar{\lambda}+(1-\bar{\lambda})C_V}. \qquad (11)$$

Аналогичным путем можно найти формулы для $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 / \lambda_m$ и $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 / \lambda_m$, где λ_1 и λ_2 — эффективные коэффициенты теплопроводности композита в направлении осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$ соответственно. В итоге при $\nu = 1,2,3$ имеем

$$\tilde{\lambda}_\nu = \frac{1+(\bar{\lambda}-1)(D_\nu^\circ + (1-D_\nu^\circ)C_V)}{1+(\bar{\lambda}-1)D_\nu^\circ(1-C_V)}. \qquad (12)$$

Двусторонние оценки. С целью проверки степени достоверности прогноза значений эффективного коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита применим двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности в неоднородном теле [17, 18] для получения двусторонних оценок этого коэффициента. Используем трехфазную модель композита в виде цилиндрической области V, имеющей в направлении координатной оси $O\xi_3$ высоту H и ограниченной параллельными основаниями, каждое с достаточно большой площадью S_0 (рис. 1). Эта область содержит половину эллипсоидального включения с полуосями b_1, b_2 и b_3, по-

крытого слоем матрицы, ограниченным половиной поверхности эллипсоида с полуосями $b_1^* = C_* b_1$, $b_2^* = C_* b_2$ и $b_3^* = C_* b_3$, $C_* > 1$, центр которого совпадает с началом выбранной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Плоскости симметрии половины включения и слоя матрицы совпадают с основанием цилиндра, лежащим в координатной плоскости $\xi_1 O \xi_2$. Остальная часть области содержит однородный материал с искомыми свойствами композита.

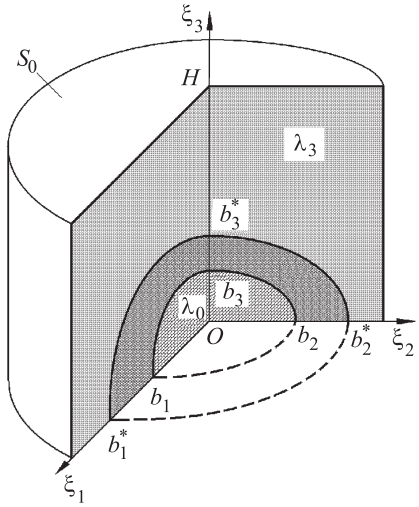


Рис. 1. Модель структуры композита при построении двусторонних оценок

Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $\xi_3 = 0$ положим равной нулю, а на втором основании при $\xi_3 = H$ зададим температуру $T_{,3}^{\circ} H$. Таким образом, в неоднородной цилиндрической области объемом $V_0 = HS_0$, ограниченной поверхностью S, распределение температуры $T(M)$ и коэффициент теплопроводности $\Lambda(M)$ являются функциями координат точки $M \in V$, причем функция $\Lambda(M)$ кусочно постоянна в каждой из подобластей области V (см. рис. 1).

Примем в качестве допустимого для минимизируемого функционала [17]

$$J[T] = \frac{1}{2}\int_V \Lambda(M)(\nabla T(M))^2 dV(M),$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента $T_{,3}^{\circ}$. Получим

$$J_3[T] = \lambda_3 \frac{(T_{,3}^{\circ})^2}{2} HS_0 - \frac{2\pi b_1^* b_2^* b_3^*}{3}\lambda_1 \frac{(T_{,3}^{\circ})^2}{2} +$$
$$+2\pi \frac{b_1^* b_2^* b_3^* - b_1 b_2 b_3}{3}\lambda_m \frac{(T_{,3}^{\circ})^2}{2} + 2\pi \frac{b_1 b_2 b_3}{3}\lambda_0 \frac{(T_{,3}^{\circ})^2}{2}. \qquad (13)$$

Для максимизируемого функционала [17]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2}\int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)} dV(M) - \int_{S_0} f_T(P)\mathbf{q}(P)\cdot\mathbf{n}(P)dS(P),$$

где **n** — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_0; в качестве допустимого распределения вектора **q** плотности теплового потока примем постоянное значение $q = -\lambda_3 T_{,3}^{\circ}$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В этом случае

$$I_3[q] = -\frac{(\lambda_1 T_{,3}^{\circ})^2}{2}\left(\frac{HS_0 - 2\pi b_1^* b_2^* b_3^*/3}{\lambda_3} + 2\pi \frac{b_1^* b_2^* b_3^* - b_1 b_2 b_3}{3\lambda_m} + \right.$$

$$\left. + 2\pi \frac{b_1 b_2 b_3}{3\lambda_0} \right) + \lambda_3 (T_{,3}^{\circ})^2 HS_0. \qquad (14)$$

Принятые допустимые распределения температуры и вектора плотности теплового потока для неоднородной области не совпадают с действительными, поэтому значения $J_3[T]$ и $I_3[q]$ не будут совпадать, причем $J_3[T] > I_3[q]$. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = (\lambda_1/2)(T_{,3}^{\circ})^2 HS_0$ минимизируемого функционала для однородной области с коэффициентом теплопроводности λ_1. Тогда при $b_1 b_2 b_3 / (b_1^* b_2^* b_3^*) = 1/C_*^3 = C_V$ с учетом формулы (13) из условия $J_3[T] \geqslant J_0$ получим верхнюю оценку

$$\tilde{\lambda}_3 \leqslant 1 - C_V + \bar{\lambda} C_V = \tilde{\lambda}_+, \qquad (15)$$

а с учетом формулы (14) из условия $I_3[q] \leqslant J_0$ найдем нижнюю оценку

$$\tilde{\lambda}_3 \geqslant 1/(1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}) = \tilde{\lambda}_-. \qquad (16)$$

Использованные достаточно простые допустимые распределения плотности теплового потока и температуры учитывают лишь объемное содержание каждой из трех изотропных фаз в принятой трехфазной модели композита. Поэтому для всех трех направлений координатных осей представленные в формулах (15) и (16) оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита будут идентичными.

Результаты расчетов. На рис. 2 и 3 при различных значениях $\bar{\lambda}$ приведены построенные по формулам (15) и (16) графики зависимостей от C_V оценок $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$. Для эллипсоидального включения со значениями $\bar{b}_2 = \sqrt{3}/2$ и $\bar{b}_3 = 1/2$ получим амплитуду $\chi = \pi/3$ и модуль $K = 1/\sqrt{3}$ эллиптических интегралов со значениями [19] $F(\chi, K) = 1{,}1049$ и $E(\chi, K) = 0{,}9945$.

По этим значениям вычислены $D_1^\circ = 0,221$, $D_2^\circ = 0,274$ и $D_3^\circ = 0,506$, а затем по формуле (12) на рис. 2 и 3 для тех же значений $\overline{\lambda}$ построены сплошными кривыми графики зависимостей $\tilde{\lambda}_\nu$ от C_V, причем гладким кривым соответствуют зависимости для $\tilde{\lambda}_1$, кривым с квадратами — для $\tilde{\lambda}_2$ и кривым с точками — для $\tilde{\lambda}_3$.

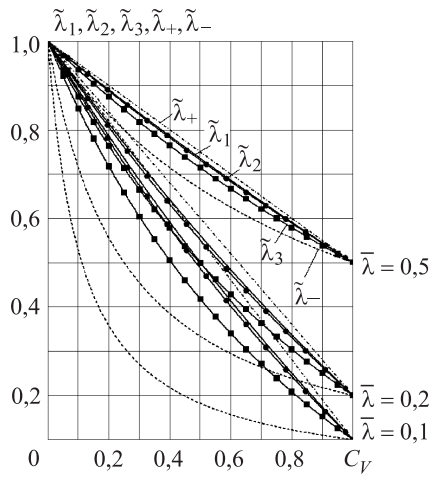


Рис. 2. Графики зависимостей при $\overline{\lambda} < 1$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок эффективного коэффициента теплопроводности и оценок $\tilde{\lambda}_1$ — $\tilde{\lambda}_3$ от объемной концентрации C_V

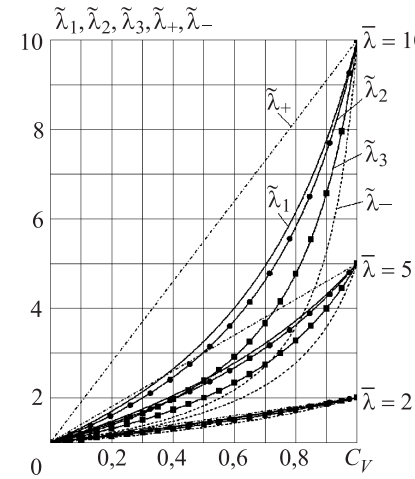


Рис. 3. Графики зависимостей при $\overline{\lambda} > 1$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок эффективного коэффициента теплопроводности и оценок $\tilde{\lambda}_1$ — $\tilde{\lambda}_3$ от объемной концентрации C_V

Из рис. 2 и 3 видно, что для фиксированного значения $\overline{\lambda}$ все сплошные кривые расположены в полосе между соответствующими кривыми, причем в случае малого отклонения значения $\overline{\lambda}$ от единицы для выбранной формы включения различие между значениями $\tilde{\lambda}_\nu$ невелико, т. е. анизотропия композита оказывается сравнительно слабой. По мере отклонения $\overline{\lambda}$ от единицы, несмотря на совпадение оценок и значений $\tilde{\lambda}_\nu$ при $C_V = 0$ и $C_V = 1$, разность $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$ для промежуточных значений C_V становится значительной и одновременно увеличивается различие между значениями $\tilde{\lambda}_\nu$, что приводит к более существенной анизотропии композита. Тем не менее разница между значениями $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}_\circ$ для выбранной формы эллипсоидального включения остается сравнительно малой.

Отмеченная тенденция сохраняется и для других сочетаний полуосей эллипсоидального включения, причем необходимые для применения формулы (12) значения коэффициентов D_v° могут быть определены с помощью графиков зависимостей D_1° и D_3° от $\bar{b}_2$ при различных значениях $\bar{b}_3$ (рис. 4). В случае $\bar{b}_3 = 1$ и $\bar{b}_2 \in (0;1)$ включение имеет форму сплющенного эллипсоида вращения (сфероида) и $D_1^\circ = D_3^\circ$. Для $\bar{b}_3 < 1$ ординаты кривых ниже этой кривой равны значениям D_1°, а выше этой кривой — значениям D_3°, по которым затем можно вычислить $D_2^\circ = 1 - D_1^\circ - D_3^\circ$.

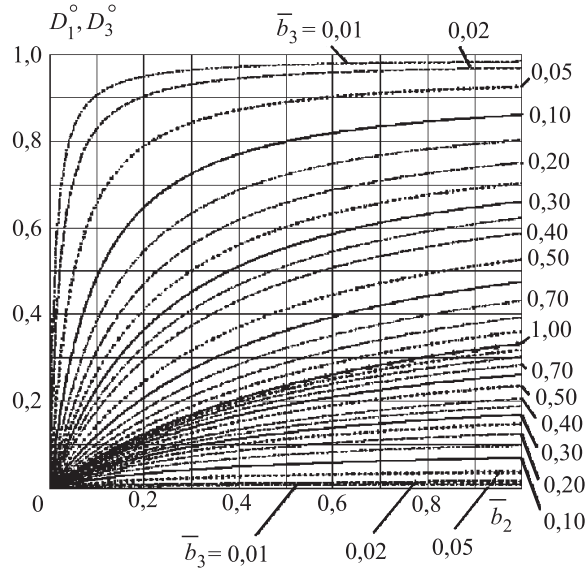


Рис. 4. Графики зависимостей D_1° и D_3° от $\bar{b}_2$ при различных значениях $\bar{b}_3$

При хаотической ориентации эллипсоидальных включений композит станет изотропным по отношению к свойству теплопроводности. При этом значение $\lambda_\circ$ его эффективного коэффициента теплопроводности будет равно 1/3 первого инварианта тензора теплопроводности анизотропного композита [20], т. е.

$$\tilde{\lambda}_\circ = \lambda_\circ / \lambda_m = (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)/3. \qquad (17)$$

В случае принятого выше соотношения между полуосями эллипсоидального включения отличие значения $\tilde{\lambda}_\circ$ от значения $\tilde{\lambda}$, вычисленного по формуле (11) для композита с шаровыми включениями,

мало. Ясно, что эти значения совпадают при $\overline{\lambda}=1$ и любых значениях C_V объемной концентрации включений, а также при $C_V=0$ и $C_V=1$ и любых значениях $\overline{\lambda}$. В таблице приведены отношения $\tilde{\lambda}_\circ/\tilde{\lambda}$ для тех же значений $\overline{\lambda}$, которые использованы при построении графиков на рис. 2 и 3.

C_V	$\overline{\lambda}=0{,}1$	$\overline{\lambda}=0{,}2$	$\overline{\lambda}=0{,}5$	$\overline{\lambda}=2$	$\overline{\lambda}=5$	$\overline{\lambda}=10$
0,1	0,997042	0,998231	0,999720	1,000501	1,005848	1,013258
0,2	0,995335	0,997213	0,999558	1,000799	1,009514	1,021948
0,3	0,994563	0,996771	0,999492	1,000929	1,011447	1,027188
0,4	0,994495	0,996770	0,999501	1,000925	1,011956	1,029601
0,5	0,994952	0,997096	0,999564	1,000819	1,011269	1,029503
0,6	0,995793	0,997653	0,999662	1,000644	1,009583	1,027011
0,7	0,996897	0,998347	0,999775	1,000434	1,007118	1,022123
0,8	0,998137	0,999076	0,999884	1,000227	1,004198	1,014894
0,9	0,999329	0,999705	0,999967	1,000066	1,001414	1,006049

Более детальный количественный анализ влияния отклонения формы включений от шаровой проведем применительно к включениям в виде эллипсоидов вращения, для которых интегралы в формуле (1) можно выразить через элементарные функции [13]. Для сплющенных эллипсоидов вращения (сфероидов) при условии $b_1=b_2>b_3$

$$D_1^\circ=D_2^\circ=\frac{\operatorname{arcctg}\mu-\mu/(1+\mu^2)}{2(1-\overline{b}^2)^{3/2}}\overline{b},\quad D_3^\circ=\frac{1/\mu-\operatorname{arcctg}\mu}{(1-\overline{b}^2)^{3/2}}\overline{b},$$

где $\mu=\overline{b}/\sqrt{1-\overline{b}^2}$; $\overline{b}=b_3/b_1<1$, а для вытянутых эллипсоидов вращения при условии $b_1=b_2<b_3$

$$D_1^\circ=D_2=\frac{\overline{b}_*^2}{4(1-\overline{b}_*^2)^{3/2}}\left(\frac{2\psi}{1-\psi^2}-\ln\frac{1+\psi}{1-\psi}\right),$$

$$D_3^\circ=\frac{\overline{b}_*^2}{2(1-\overline{b}_*^2)^{3/2}}\left(\ln\frac{1+\psi}{1-\psi}-2\psi\right),$$

где $\psi=\sqrt{1-\overline{b}^2}$; $\overline{b}_*=b_1/b_3<1$. Эти формулы используем для расчета значений $\tilde{\lambda}_\circ$ по формуле (17) с применением равенств (12).

На рис. 5 для включений в виде сфероидов представлены графики зависимостей отношения $\tilde{\lambda}_\circ/\tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях параметра $\overline{b}$, указанных около соответствующих кривых, причем сплош-

ным кривым соответствует достаточно малое значение $\bar{\lambda} = 0,01$, прерывистым — сравнительно большое значение $\bar{\lambda} = 100$. Даже при отличии на два порядка коэффициентов теплопроводности включения и матрицы при $\bar{\lambda} = 0,01$ погрешность замены значения $\tilde{\lambda}_\circ$ значением $\tilde{\lambda}$ для шаровых включений не превышает 11 % и в случае $\bar{b} = 0,1$, т. е. для сильно сплющенных сфероидов. При обратном отношении коэффициентов теплопроводности включения и матрицы ($\bar{\lambda} = 100$) такая же погрешность возникнет для менее сплющенных сфероидов ($\bar{b} = 0,5$), причем в этом случае $\tilde{\lambda}_\circ > \tilde{\lambda}$.

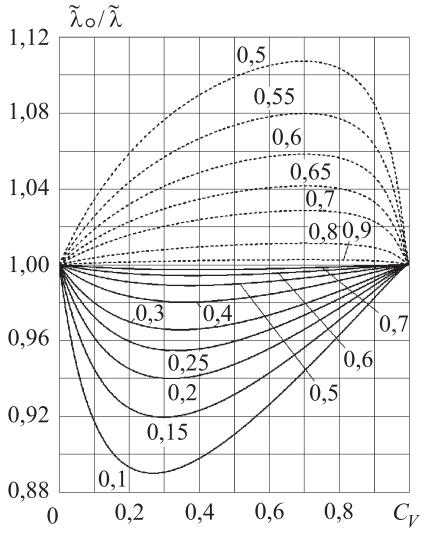


Рис. 5. Графики зависимостей отношения $\tilde{\lambda}_\circ / \tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях параметра $\bar{b}$ для включений в виде сфероидов

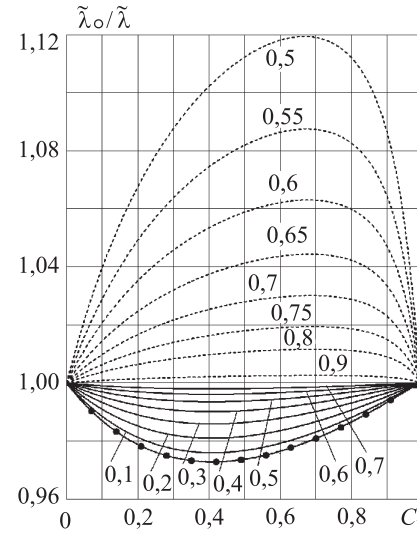


Рис. 6. Графики зависимостей отношения $\tilde{\lambda}_\circ / \tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях параметра $\bar{b}$ для включений в виде сильно вытянутых эллипсоидов вращения

На рис. 6 для включений в виде вытянутых эллипсоидов вращения построены графики зависимостей отношения $\tilde{\lambda}_\circ / \tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях параметра $\bar{b}_*$, указанных около соответствующих кривых, для $\bar{\lambda} = 0,01$ (сплошные линии) и $\bar{\lambda} = 100$ (прерывистые линии). При $\bar{\lambda} = 0,01$ для включений в виде сильно вытянутых эллипсоидов вращения, которые можно рассматривать как весьма тонкие волокна, погрешность замены величины $\tilde{\lambda}_\circ$ величиной $\tilde{\lambda}$ не превышает 3 % (кривая с кружками). При обратном отношении ко-

эффициентов теплопроводности включения и матрицы ($\overline{\lambda} = 100$) погрешности такой замены для одинаковых значений $\overline{b}_*$ и $\overline{b}$ (см. рис. 5) практически совпадают.

Заключение. Проведенный количественный анализ влияния отклонения формы включений от шаровой даже при существенном отличии параметра $\overline{\lambda}$ от единицы показывает, что отклонение отношения $\tilde{\lambda}_\circ / \tilde{\lambda}$ от единицы будет сравнительно небольшим для включений с близкими размерами во всех направлениях. При этом возникающей анизотропией композита по отношению к свойству теплопроводности в силу малого различия между значениями эффективного коэффициента теплопроводности композита в ортогональных направлениях можно в первом приближении пренебречь. Эти обстоятельства расширяют область практического применения расчетных формул, полученных в предположении шаровой формы включений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1432.2014.8), гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-6618.2013.8) и проекта № 1.2640.2014 в рамках реализации государственного задания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чудновский А.Ф. *Теплофизические характеристики дисперсных материалов*. Москва, Физматгиз, 1962, 456 с.

[2] Миснар А. *Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций*. Москва, Мир, 1968, 464 с.

[3] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов*. Ленинград, Энергия, 1974, 264 с.

[4] Han Z., Fina A. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: A review. *Progress in Polymer Science*, 2011, vol. 7, pp. 914–944.

[5] Pierson H.O. *Handbook of Carbon, Graphite, Diamond and Fullerences: Properties, Processing and Applications*. New Jersey, Noyes Publications, 1993.

[6] Wypych G. *Handbook of Fillers: Physical Properties of Fillers and Filled Materials*. Toronto, ChemTec Publishing, 2000.

[7] Wang J., Carson J.K., North M.F., Cleland D.J. A new structural model of effective thermal conductivity for 92 heterogeneous materials with co-continuous phases. *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 2008, vol. 51, pp. 2389−2397.

[8] Кац Е.А. *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей*. Москва, Изд-во ЛКИ, 2008, 296 с.

[9] Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Eklund P.C. *Science of fullerenes and carbon nanotubes*. San Diego, Academic Press, 1996.

[10] Зарубин В.С. *Математическое моделирование в технике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 496 с.

[11] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008, 512 с.
[12] Maxwell C. *Treatise on electricity and magnetism*. Oxford, 1873.
[13] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 488 с.
[14] Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1963, 248 с.
[15] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 76−85.
[16] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. *Теплопроводность композитов с шаровыми включениями*. Deutschland, Saarbrucken, LAMBERT Academic Publishing, 2013, 77 с.
[17] Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. Москва, Энергоатомиздат, 1983, 328 с.
[18] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5−17.
[19] Абрамовица М., Стиган И., ред. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Москва, Наука, 1979, 832 с.
[20] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977, 400 с.

Статья поступила в редакцию 01.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3–17.

Зарубин Владимир Степанович родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 300 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна родилась в 1985 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

Effective thermal conductivity of a composite in case of inclusions shape deviations from spherical ones

© V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savelyeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

On the basis of mathematical model of thermal interaction between inclusion and the matrix we estimated influence of inclusions deviations from spherical shape on the effective thermal conductivity coefficient of the composite and associated with such deviation a possible occurrence of the anisotropy of the composite with respect to the property of thermal conductivity. Using the dual variational formulation of the stationary problem of heat conduction in an inhomogeneous body we built bilateral estimates of effective thermal conductivity.

Keywords: *composite, inclusion, effective thermal conductivity, mathematical model.*

REFERENCES

[1] Chudnovskiy A.F. *Teplofizicheskie kharakteristiki dispersnykh materialov* [Thermophysical characteristics of dispersed materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 456 p.

[2] Missenard A. *Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges*. Editions Eyrolles, Paris, 1965 [Russ. ed.: Missenard A. *Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkostey, gazov i ikh kompozitsiy*. Moscow, Mir Publ., 1968, 464 p.].

[3] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov* [Heat conductivity of mixes and composite materials]. Leningrad, Energiya Publ., 1974, 264 p.

[4] Han Z., Fina A. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: A review. *Progress in Polymer Science*, vol. 7, 2011, pp. 914–944.

[5] Pierson H.O. *Handbook of Carbon, Graphite, Diamond and Fullerences: Properties, Processing and Applications*. New Jersey, Noyes Publications, 1993.

[6] Wypych G. *Handbook of Fillers: Physical Properties of Fillers and Filled Materials*. Toronto, ChemTec Publishing, 2000.

[7] Wang J., Carson J.K., North M.F., Cleland D.J. A new structural model of effective thermal conductivity for 92 heterogeneous materials with co-continuous phases. *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 2008, vol. 51, pp. 2389−2397.

[8] Kats E.A. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey* [Fullerena, carbon nanotubes and nanoclusters. Family tree of forms and ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008, 296 p.

[9] Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Eklund P.C. *Science of fullerenes and carbon nanotubes*. San Diego, Academic Press, 1996.

[10] Zarubin V.S. *Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike* [Mathematical modeling in equipment]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 496 p.

[11] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p. (Seriya Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike i tekhnologii).

[12] Maxwell C. *Treatise on electricity and magnetism*. Oxford, 1873.

[13] Carslaw H., Jaeger J. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford University Press, USA, 1959, 510 p. [Russ. ed.: Carslaw H., Jaeger J. *Teploprovodnost' tverdykh tel.* Moscow, Nauka, 1964, 488 p.].
[14] Eshelby J.D. *Kontinual'naya teoriya dislokaciy. Sbornik statey* [Continual theory of dislocations. Coll. articles]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963, 248 p. [in Russian].
[15] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences,* 2012, no. 3, pp. 76–85.
[16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. *Teploprovodnost' kompozitov s sharovymi vklyucheniyami* [Heat conductivity of composites with spherical inclusions]. Saarbrucken, Deutschland: LAMBERT Academic Publishing, 2013, 77 p.
[17] Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods of the solution of problems of heat conductivity]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983, 328 p.
[18] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.
[19] Abramovits M., Stigan I., reds. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami* [Directory of Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables]. Moscow, Nauka, 1979, 832 p.
[20] Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micronon-uniform environments]. Moscow, Nauka, 1977, 400 p.

Zarubin V.S. (b. 1933) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. Dr. Sci. (Eng.), professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Honored Science and Technology Woker of the Russian Federation, Laureate of the RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 300 publications in the fields of mathematical simulation of thermomechanical processer in materials and construction members.
e-mail: fn2@bmstu.ru

Kuvyrkin G.N. (b. 1946) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. Dr. Sci. (Eng.), professor, head of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Laureate of the RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 200 publications in the fields of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members. e-mail: fn2@bmstu.ru

Savelyeva I.Yu. (b. 1985) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2008. Ph. D., assoc. professor of the Applied Mathematics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members. e-mail: fn2@bmstu.ru