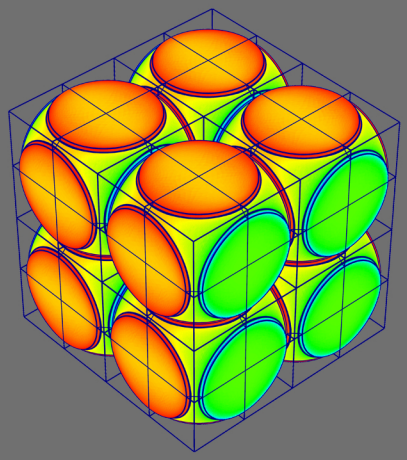
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Черкасова М.С.
Моделирование деформирования слоистых периодических композитов на основе теории пластического течения.
Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 2, с. 15–37.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/248/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
29.01.2026 00:59:52

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-2-1537

Моделирование деформирования слоистых периодических композитов на основе теории пластического течения

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева М.С. Черкасова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Статья посвящена построению модели деформирования слоистых упруго–пластических композитов с периодической структурой. Все слои композита подчиняются теории пластического течения (ассоциативному закону пластичности) с различными поверхностями пластичности. Для решения указанной задачи применяется метод асимптотического осреднения Бахвалова–Победри. Получено аналитическое решение локальных задач пластического течения на ячейке периодичности. Построены эффективные упруго–пластические определяющие соотношения слоистого композита. Приведены примеры численного расчета диаграмм циклического деформирования упруго–пластического композита при различных сочетаниях слоев в композите.

Ключевые слова: *слоистые композиты, теория пластического течения, метод асимптотического осреднения, тензор скоростей деформации, диаграммы деформирования*

Введение. Композиционные материалы широко применяются в самых различных отраслях промышленности: авиационной, ракетно–космической, судостроительной, атомной, автомобильной, двигателестроительной, строительной и других [1–4]. При определенных условиях многие типы композитов проявляют существенные упруго–пластические свойства. Так, металлокомпозиты, образованные различными металлическими сплавами, например, Ti/Al, сталь/Al, сталь/Ni, W/Mo [2], обладают значительными пластическими свойствами, особенно при высоких температурах. Упруго–пластические свойства могут проявлять и некоторые типы полимерных композитов, в частности на основе термопластической матрицы [5].

Моделированию упруго–пластического поведения композитов посвящены многие исследования, отметим лишь некоторые работы [6–9], однако, как правило, все они основаны на определенных структурных допущениях относительно микроскопического напряженно–деформированного состояния компонентов композитов. От этого недостатка свободен метод гомогенизации (метод асимптотического осреднения), предложенный в работах Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [10], Б.Е. Победри [11], Э. Санчес–Паленсии [12], A. Bensoussan, J.D. Lions, G. Papanicolaou [13]. Применению этого метода для упруго–пластических композитов посвящены работы [14–19].

Однако, как правило, в этих работах используется или деформационная теория пластичности [16–19], или теория течения с формальным построением решений, и с последующим приближенным их решением, или с численным анализом задач на ячейках периодичности [15].

Целью настоящей работы являлась разработка алгоритма асимптотического осреднения задачи теории пластического течения слоистого композита с периодической структурой, и построение аналитических решений локальных задач, позволяющих строить эффективные диаграммы деформирования упруго–пластического композита.

Основные допущения асимптотической теории слоистых композитов. Рассмотрим слоистый композит V с периодической структурой. Обозначим x_i — декартовы координаты с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_i$, в котором радиус–вектор каждой точки имеет вид: $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$.

В силу периодичности слоистого композита у него можно выделить ячейку периодичности V_ξ — слой толщиной l.

$$V_\xi = \left\{ x_i : -\frac{l}{2} \le x_3 \le \frac{l}{2}, (x_1, x_2) \in \Sigma_0 \right\}, \tag{1}$$

где Σ_0 — часть плоскости x_1, x_2. Введем характерный размер L области V, занятой всем композитом, а также введем малый параметр $\kappa = l/L << 1$ и два типа безразмерных координат:

$$\begin{gathered} \bar{x}_i = \frac{x_i}{L}; \\ \xi = \frac{\bar{x}_3}{\kappa} = \frac{x_3}{l}, \end{gathered} \tag{2}$$

где ξ — безразмерная локальная координата («быстрая» координаты), $\bar{x}^i$ — безразмерные глобальные координаты («медленные» координаты).

Координаты $\bar{x}_3$ и ξ, как обычно, в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные [10–13], координата ξ для одной ЯП изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi < 0,5$.

Модель теории пластического течения слоев композита. Каждый слой композита будем полагать изотропным упругопластическим материалом, подчиняющимся модели теории пластического течения [20–22], и деформирующимся в условиях малых деформаций. Тогда для каждого слоя композита имеют место следующие определяющие соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{p}\right); \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{p} = h\dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}; \\ f = f\left(I_{\alpha}\left(\sigma_{ij} - H\varepsilon_{ij}^{p}\right)\right) = 0, \quad \alpha = 1,2; \\ H = H\left(I_{2}\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right)\right), \end{cases} \tag{3}$$

где обозначены компоненты следующих тензоров: σ_{ij} — тензора напряжений, ε_{kl} — тензора полных деформаций, ε_{kl}^{p} — тензора пластических деформаций, ε_{ij}^{p} — тензора скоростей пластических деформаций. В системе (3) также обозначены: λ — параметр нагружения, h — индикатор пластического деформирования:

$$h = \begin{cases} 0, & f < 0; \\ 1, & f = 0, \end{cases} \tag{4}$$

здесь $f\left(I_{\alpha}(a_{ij})\right)$ — функция поверхности пластичности, зависящая от двух инвариантов $I_{\alpha}(a_{ij})$, $\alpha = 1,2$ тензора $a_{ij} = \sigma_{ij} - H\varepsilon_{ij}^{p}$:

$$I_{1}\left(a_{ij}\right) = a_{ij}\delta_{ij} = a_{kk}, \; I_{2}\left(a_{ij}\right) = \sqrt{p_{ij}\left(a\right)p_{ij}\left(a\right)} = \sqrt{B_{ijkl}a_{ij}a_{kl}}, \tag{5}$$

где $I_{1}\left(a_{ij}\right)$, $I_{2}\left(a_{ij}\right)$ — функции первого и второго главного инвариантов тензора a_{ij} [23]; здесь $p_{ij}\left(a\right) = a_{ij} - \dfrac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij}$ — девиатор тензора a_{ij}, который можно представить в следующем виде [23]

$$\begin{gathered} p_{ij}\left(a\right) = \Gamma_{ijkl}a_{kl}; \\ \Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}; \\ B_{ijkl} = \Gamma_{ijmn}\Gamma_{mnkl}. \end{gathered} \tag{6}$$

В соотношениях (3) также введен параметр упрочнения $H = H\left(I_{2}\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right)\right)$, зависящий от инварианта $I_{2}\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right)$. Для этой зависимости будем применять степенную модель

$$H = \frac{H_{0}}{1 + \alpha I_{2p}^{2n}}, \quad 0 \le n \le 1, \; \alpha > 0; \tag{7}$$

$$I_{2p}^{2} \equiv I_{2}^{2}\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right) \equiv B_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{kl}^{p}. \tag{8}$$

Функцию пластичности $f\left(I_\alpha(a_{ij})\right)$ для всех слоев композита зададим с помощью модели Губера–Мизеса [22]

$$f\left(I_\alpha(a_{ij})\right)=\frac{1}{2}\left(I_2\left(\sigma_{ij}-H\varepsilon_{ij}^p\right)\right)^2-\sigma_Y=0, \tag{9}$$

где σ_Y — предел текучести.

Во второе соотношение формулы (4) входит параметр нагружения $\dot{\lambda}$, для которого получим явное выражение. Для этого продифференцируем функцию $f\left(I_\alpha(a_{ij})\right)$ (9) по времени t

$$\dot{f}=\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial I_\alpha}\left(\frac{\partial I_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial I_\alpha}{\partial\varepsilon_{ij}^p}\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)=0. \tag{10}$$

С учетом (9), уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial I_2{}^2}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial I_2{}^2}{\partial\varepsilon_{ij}^p}\dot{\varepsilon}_{ij}^p=0. \tag{11}$$

Запишем явное выражение для инварианта $I_\alpha\left(a_{ij}\right)$, с учетом выражения (5)

$$I_2{}^2(a_{ij})=I_2^2\left(\sigma_{ij}-H\varepsilon_{ij}^p\right)=B_{ijkl}\left(\sigma_{ij}-H\varepsilon_{ij}^p\right)\left(\sigma_{kl}-H\varepsilon_{kl}^p\right). \tag{12}$$

Вычисляем частные производные от этого инварианта по тензорным аргументам [23]

$$\begin{gathered}\frac{\partial I_2{}^2}{\partial\sigma_{ij}}=2B_{ijkl}\left(\sigma_{kl}-H\varepsilon_{kl}^p\right);\\ \frac{\partial I_2{}^2}{\partial\varepsilon_{mp}^p}=-2B_{ijkl}\left(\sigma_{kl}-H\varepsilon_{kl}^p\right)\left(\varepsilon_{ij}^p\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_{mp}^p}+H\Delta_{ijmp}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\Delta_{mnij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{mi}\delta_{nj}+\delta_{mj}\delta_{ni}\right)$ — единичный тензор 4–го ранга, образованный с помощью символов Кронекера.

Вычислим производные от параметра упрочнения (7)

$$\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_{mp}^p}=\frac{\partial H}{\partial I_{2p}{}^2}\frac{\partial I_2{}^2}{\partial\varepsilon_{mp}^p}=-\frac{2\alpha H_0 n I_{2p}^{2(n-1)}}{\left(1+\alpha I_{2p}^{2n}\right)^2}B_{ijmp}\varepsilon_{ij}^p=\\ =-\frac{2\alpha H^2 n\left(B_{ijmp}\varepsilon_{ij}^p\right)}{I_{2p}^{2(1-n)}H_0}.\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя частную производную параметра упрочнения (14) в формулу частной производной инварианта по пластическим деформациям (13), получим:

$$\frac{\partial I_2{}^2}{\partial \varepsilon_{mp}^p} = -2A_{ij}\left(H\Delta_{ijmp} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{mp}^p}\varepsilon_{mp}^p\right) = -2A_{ij}S_{ijmp}\frac{H}{I_{2p}^{2(1-n)}}, \tag{15}$$

где обозначены следующие тензоры:

$$\begin{gathered} A_{ij} = B_{ijkl}\left(\sigma_{kl} - H\varepsilon_{kl}^p\right); \\ S_{ijmp} = I_{2p}^{2(1-n)}\Delta_{mpij} - \frac{2\alpha nH}{H_0}B_{klmp}\varepsilon_{kl}^p\varepsilon_{ij}^p. \end{gathered} \tag{16}$$

Тогда производную по напряжениям (13) можно представить через введенный выше тензор A_{ij}:

$$\frac{\partial I_2{}^2}{\partial \sigma_{ij}} = 2A_{ij}. \tag{17}$$

Вычислим частную производную функции пластичности $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}$ с учетом (13) и (16), (17)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} = \frac{1}{2}\frac{\partial I_2{}^2}{\partial \sigma_{mn}} = \frac{2}{2}B_{mnij}\left(\sigma_{ij} - H\varepsilon_{ij}^p\right) = A_{mn}. \tag{18}$$

Подставим теперь формулы (15) и (17) в соотношение (11):

$$A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - A_{ij}S_{ijmp}\dot{\varepsilon}_{mp}^p\frac{H}{I_{2p}^{2(1-n)}} = 0. \tag{19}$$

Подставим в эту формулу второе выражение из системы (3) для $\dot{\varepsilon}_{mp}^p$:

$$A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\dot{\lambda}H}{I_{2p}^{2(1-n)}}R_{mp}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mp}} = 0, \tag{20}$$

где обозначено $R_{mp} = A_{ij}S_{ijmp}$.

Тогда из уравнения (20) получаем искомое явное выражение для параметра нагружения $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{I_{2p}^{2(1-n)}A_{ij}}{HR_{mp}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mp}}}\dot{\sigma}_{ij}, \text{ или } \dot{\lambda} = \frac{hI_{2p}^{2(1-n)}A_{ij}}{HS_{klmp}A_{kl}A_{mp}}\dot{\sigma}_{ij}, \tag{21}$$

Рассмотрим случай первоначальной пластичности. Если $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}\left(t_*\right)=0$, где t_* — момент первого входа на поверхность пластичности $f=0$, то имеем

$$A_{ij}=B_{ijkl}\sigma_{kl};\ H=H_0;\ S_{ijmp}=I_{2p}^{2(1-n)}\Delta_{mpij}, \tag{22}$$

$$\dot{\lambda}=\frac{A_{ij}\dot{\sigma}_{ij}}{H_0A_{mp}A_{mp}}. \tag{23}$$

В результате получаем начальное значение параметра нагружения $\dot{\lambda}$ в момент t_*.

Подставим второе выражение (21) для параметра $\dot{\lambda}$ и формулу (18) во второе соотношение (3) для скоростей пластической деформации

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}=h\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{hI_{2p}^{2(1-n)}A_{kl}A_{ij}}{HS_{spmp}A_{sp}A_{mp}}\dot{\sigma}_{ij} \tag{24}$$

и введем обозначение

$$Q_{ijkl}=\frac{I_{2p}^{2(1-n)}A_{kl}A_{ij}}{HS_{spmp}A_{sp}A_{mp}}. \tag{25}$$

Тогда соотношение для тензора скоростей пластических деформаций (24) можно представить в следующем более простом виде

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}=hQ_{klij}\dot{\sigma}_{ij}. \tag{26}$$

Определяющие соотношения теории пластичности в скоростях. Дифференцируя первое соотношение в (3), получим

$$\dot{\sigma}_{ij}=C_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}\right). \tag{27}$$

Подставляя выражение (26) в (27), приходим к следующему выражению

$$\dot{\sigma}_{mp}=\tilde{C}_{mpkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{28}$$

где

$$\tilde{C}_{mpkl}=T_{mpij}^{-1}C_{ijkl} \tag{29}$$

- приведенный тензор модулей упругости, а T_{ijuv}^{-1} — тензор обратный к тензору

$$T_{ijmp}=\Delta_{ijmp}+hC_{ijkl}Q_{klmp}=\Delta_{ijmp}+hI_{2p}^{2(1-n)}\frac{C_{ijkl}A_{kl}A_{mp}}{HS_{swqr}A_{sw}A_{qr}}. \tag{30}$$

Тензор $\tilde{C}_{ijkl}$ зависит от ε_{ij}^{p} и σ_{kl}.

Подставляя (28) в (26), получаем соотношение между скоростями пластических деформаций и скоростями полных деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p} = hY_{klij}\dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{31}$$

где обозначен тензор концентрации пластических деформаций

$$Y_{klij} = Q_{klmp}\tilde{C}_{mpij}. \tag{32}$$

Для вычисления пластических деформаций и напряжений по известным скоростям этих тензоров используем формулы

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau;\\ \varepsilon_{ij}^{p}(t) = \varepsilon_{ij}^{p}(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(\tau)\,d\tau;\\ \sigma_{ij}(t) = \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{33}$$

Постановка линеаризованной задачи теории пластического течения для слоистого композита.. Разобьём промежуток времени $[0,t]$ на N промежутков $[t_{m-1},t_m]$, $m=1,...,N$, и обозначим значения тензоров скоростей изменения напряжений, деформаций и пластических деформаций в моменты времени t_m следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} = \dot{\sigma}_{ij}(t_m);\\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m-1\}} = \dot{\varepsilon}_{kl}(t_m);\ \ \dot{\varepsilon}_{kl}^{p\{m\}} = \dot{\varepsilon}_{kl}^{p}(t_m).\end{gathered} \tag{34}$$

Используя формулу трапеции для приближенного вычисления интегралов, с учетом обозначений (34), придем к формулам для вычисления тензоров напряжений, деформаций и пластических деформаций

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(t) = \frac{\Delta t}{2}\sum_{m=1}^{N}\left(\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} + \dot{\sigma}_{ij}^{\{m-1\}}\right);\\ \varepsilon_{ij}(t) = \frac{\Delta t}{2}\sum_{m=1}^{N}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m-1\}}\right);\\ \varepsilon_{ij}^{p}(t) = \frac{\Delta t}{2}\sum_{m=1}^{N}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}}\right).\end{gathered} \tag{35}$$

Для вычисления значений $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}$ и $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p\{m\}}$ рассмотрим линеаризованные определяющие соотношения (28) и (31)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} &= \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}; \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{p\{m\}} &= hY_{klij}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}. \end{aligned} \tag{36}$$

где $\{m\}$ — номер итерации, а компоненты приведенного тензора модулей упругости $\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}}$ и компоненты тензора $Y_{klij}^{\{m-1\}}$ — зависят от пластических деформаций $\varepsilon_{kl}^{p\{m-1\}}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{\{m-1\}}$ на $\{m-1\}$ итерации и определяются по формулам (29) и (32).

Рассмотрим для слоистого композита трехмерную задачу теории пластичности в тензорной форме [22], записанную в скоростях для $m-$го приближения

$$\begin{cases} \nabla_i \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} = 0; \\ \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} = \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}; \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{p\{m\}} = hY_{klij}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}; \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_i V_k^{\{m\}} + \nabla_k V_l^{\{m\}}\right); \\ V_i^{\{m\}}\Big|_{\Sigma_2} = V_{ei}; \;\; n_i \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}\Big|_{\Sigma_1} = \dot{S}_{ej}; \\ \left[V_i\right] = 0; \; \left[\dot{\sigma}_{i3}\right] = 0, \end{cases} \tag{37}$$

и состоящую из уравнений равновесия в скоростях, определяющих соотношений, соотношений Коши в скоростях, граничных условий на внешней границе $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ всего композита, V_{ei} — заданный вектор скорости. На поверхности раздела слоев композита задаются условия идеального контакта, где $\left[V_i\right]$ — скачок функций при переходе через границу раздела слоев, V_i — компоненты вектора скорости, $\nabla_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — частные производные по координатам x_i, n_i — компоненты вектора нормали.

Асимптотические разложения для основных неизвестных задачи для упругопластического слоистого композита. В силу периодичности слоистого композита решение задачи (37) будем искать в виде квазипериодических функций $V_i(x_k) = V_i(\bar{x}_k, \xi)$ от медленных и быстрой координат (2). Квазипериодические функции дифференцируются по правилу дифференцирования сложной функции [10–13]:

$$\nabla_i V_j \to V_{j,i} + \frac{1}{\kappa}\delta_{i3} V_{j/3}, \tag{38}$$

где обозначены производные по медленной и быстрой координате:

$$V_{j,i} = \frac{\partial V_j}{\partial \overline{x}_i},\ V_{j/3} = \frac{\partial V_j}{\partial \xi}.$$

Для каждого слоя приведенные модули упругости $\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}}$ и компоненты тензоров $hN_{klij}^{\{m-1\}}$, вообще говоря, различны, поэтому в определяющих соотношениях (36), записанных для всех слоев, эти величины можно рассматривать как разрывные функций от координаты ξ и зависящие от x_s:

$$\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} = \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}}(\overline{x}_s, \xi);\ Y_{klij}^{\{m-1\}} = Y_{klij}^{\{m-1\}}(\overline{x}_s, \xi). \tag{39}$$

С учетом (38) и (39) решение задачи (37) будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде квазипериодических функций:

$$\begin{gathered} V_k^{\{m\}}(\overline{x}_s, \xi) = V_k^{\{m\}(0)}(\overline{x}_s) + \kappa V_k^{\{m\}(1)}(\overline{x}_s, \xi) + \\ + \kappa^2 V_k^{\{m\}(2)}(\overline{x}_s, \xi) + \kappa^3 V_k^{\{m\}(3)}(\overline{x}_s, \xi) + \dots . \end{gathered} \tag{40}$$

С учетом четвертой группы уравнений в (35) и (38) для скоростей деформаций также имеет место асимптотическое разложение

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \dots, \tag{41}$$

где

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(n)} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}(n)} + \frac{1}{2}\left(\delta_{j3} V_{i/3}^{\{m\}(n+1)} + \delta_{i3} V_{j/3}^{\{m\}(n+1)}\right),\ n \ge 0; \tag{42}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j}^{\{m\}(n)} + V_{j,i}^{\{m\}(n)}\right). \tag{43}$$

В аналогичном асимптотическом виде ищем выражения для самих деформаций $\varepsilon_{ij}^{\{m\}}$, пластических деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\{m\}}$, скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}}$, напряжений $\sigma_{ij}^{\{m\}}$ и скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}$

$$\begin{gathered} \Omega^{\{m\}} = \Omega^{\{m\}(0)} + \kappa \Omega^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \dots, \\ \Omega^{\{m\}} = \{\varepsilon_{ij}^{\{m\}}, \varepsilon_{ij}^{p\{m\}}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}}, \sigma_{ij}^{\{m\}}, \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}\}. \end{gathered} \tag{44}$$

Поскольку $\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}}(\overline{x}_s,\xi)$ и $Z_{klij}^{\{m-1\}}$ зависят от $\varepsilon_{kl}^{p\{m-1\}}$ и $\sigma_{ij}^{\{m-1\}}$, то для них также имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} &= \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(0)}(\overline{x}_s,\xi)+\kappa\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(1)}(\overline{x}_s,\xi)+\kappa^2\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(2)}(\overline{x}_s,\xi)+\ldots;\\ Y_{klij}^{\{m-1\}} &= Y_{klij}^{\{m-1\}(0)}(\overline{x}_s,\xi)+\kappa Y_{klij}^{\{m-1\}(1)}(\overline{x}_s,\xi)+\kappa^2 Y_{klij}^{\{m-1\}(2)}(\overline{x}_s,\xi)+\ldots\ .\end{aligned} \tag{45}$$

Подставляя разложения (44) и (45) в определяющие соотношения системы (37), получим следующие соотношения между членами различных приближений в асимптотических рядах

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(n)} &= \sum_{s=0}^{n}\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(s)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(n-s)};\\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(n)} &= h\sum_{s=0}^{n}Y_{ijkl}^{\{m-1\}(s)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(n-s)}.\end{aligned} \tag{46}$$

Подставляя выражение (44) для $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}$ в первое уравнение системы (37), получим асимптотическое разложения уравнений равновесия

$$\begin{gathered}\frac{1}{\kappa}\dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(0)}+\dot{\sigma}_{ij,j}^{\{m\}(0)}+\frac{\kappa}{\kappa}\dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(1)}+\kappa\dot{\sigma}_{ij,j}^{\{m\}(1)}+\\ +\kappa\dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(2)}+\kappa^2\dot{\sigma}_{ij,j}^{\{m\}(2)}+\ldots=0.\end{gathered} \tag{47}$$

Задачи теории пластического течения на ячейке периодичности слоистого композита. Приравнивая в (47) члены при одинаковых степенях малого параметра к нулю, получаем рекуррентную систему уравнений равновесия. Если присоединить к этой системе соответствующие определяющие соотношения (46) и кинематические соотношения (43), с граничными условиями на поверхностях раздела слоев в ЯП, то получим следующую рекуррентную последовательность задач на ЯП.

Задача нулевого приближения ($n=0$) на ЯП

$$\begin{gathered}\dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(0)}=0;\\ \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)}=\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(0)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(0)};\\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(0)}=hY_{ijkl}^{\{m-1\}(0)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(0)};\\ 2\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(0)}=2\dot{\overline{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}}+\delta_{j3}V_{i/3}^{\{m\}(1)}+\delta_{i3}V_{j/3}^{\{m\}(1)};\\ [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)}]=0,\ [V_i^{\{m\}(1)}]=0;\\ [[V_i^{\{m\}(1)}]]=0,\ \ [[\sigma_{i3}^{\{m\}(0)}]]=0;\\ \left\langle V_i^{\{m\}(1)}\right\rangle=0.\end{gathered} \tag{48}$$

Задача $n-$го приближения на ЯП

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^{\{m\}(n-1)} + \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(n)} = 0;$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(n)} = \sum_{s=0}^{n} \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(s)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(n-s)};$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(n)} = h\sum_{s=0}^{n} Y_{ijkl}^{\{m-1\}(s)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(n-s)};$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(n)} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}(n)} + \frac{1}{2}\left(\delta_{j3} V_{i/3}^{\{m\}(n+1)} + \delta_{i3} V_{j/3}^{\{m\}(n+1)}\right); \qquad (49)$$

$$[\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(n)}] = 0, \quad [V_i^{\{m\}(n+1)}] = 0;$$

$$[[V_i^{\{m\}(n+1)}]] = 0, \quad [[\sigma_{i3}^{\{m\}(n)}]] = 0;$$

$$\left\langle V_i^{\{m\}(n+1)} \right\rangle = 0.$$

Здесь обозначены условия периодичности функций: $[[\Omega]] = \Omega\big|_{\xi=1/2} - \Omega\big|_{\xi=-1/2} = 0$, а также обозначена операция осреднения: $\langle \Omega \rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \Omega(\bar{x}_i, \xi) d\xi = \langle \Omega \rangle (\bar{x}_i)$. Условие $\left\langle V_i^{\{m\}(n+1)} \right\rangle = 0$ в этих задачах на ЯП является условием нормировки, оно присоединяется для однозначности решения задачи.

В задаче нулевого приближения (48) основными неизвестными являются компоненты вектора скорости $V_i^{\{m\}(1)}$, а осредненные скорости деформации

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}} = \frac{1}{2}\left(V_{k,l}^{\{m\}(0)} + V_{l,k}^{\{m\}(0)}\right) \qquad (50)$$

являются входными данными задачи.

В задаче $n-$го приближения (49) основными неизвестными являются компоненты вектора скорости $V_i^{\{m\}(n+1)}$, а скорости деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}(n)}$, а также скорости напряжений $\dot{\sigma}_{kl}^{\{m\}(n-s)}$ и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(n-s)}$, $s = 0,1,...,n-1$ являются входными данными задачи.

Осредненные уравнения теории течения для слоистого композита. Если задача (48) на ЯП решена, т.е. найдены функции скорости $V_i^{\{m\}(1)}$, зависящие параметрическим образом от функций скорости в нулевом приближении $V_i^{\{m\}(0)}(\vec{\bar{x}})$, то для нахождения этих функций следует использовать осредненную систему уравнений теории пластического течения, которая состоит из осредненных уравнений

равновесия в системе (50), осредненных определяющих соотношений и соотношений Коши:

$$\begin{cases} \left\langle \dot{\sigma}_{ij,j}^{\{m\}(0)} \right\rangle = 0; \\ \left\langle \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} \right\rangle = \left\langle \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(0)} \right\rangle; \\ \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(0)} \right\rangle = h \left\langle Y_{ijkl}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(0)} \right\rangle; \\ 2\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}} = V_{i,j}^{\{m\}(0)} + V_{j,i}^{\{m\}(0)}. \end{cases} \tag{51}$$

Здесь учтена периодичность функций по быстрым координатам: $\left\langle \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(n)} \right\rangle = 0$. К системе (51) присоединяются осредненные граничные условия из системы (37)

$$V_i^{\{m\}(0)}\Big|_{\Sigma_u} = V_{ei}; \ \left\langle \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} \right\rangle\Big|_{\Sigma_\sigma} = \dot{S}_i. \tag{52}$$

Решение задачи теории течения на ЯП в нулевом приближении. На каждом $m-$м шаге итерации задача (48) является линейной, тогда ее решение можно представить в виде формальной зависимости от входных данных — от тензора $\dot{\bar{\varepsilon}}_{mn}^{\{m\}}$

$$V_k^{\{m\}(1)} = N_{kij}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}}, \tag{53}$$

где $N_{kmn}^{\{m-1\}}(x_i, \xi)$ — компоненты некоторого тензора, зависящего от $\left(x_i, \xi\right)$, от $V_i^{\{m-1\}(0)}$ и $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m-1\}(0)}$ и не зависящего от $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}}$.

Подставляя выражение (53) в четвертое соотношение системы (48), получаем зависимость между тензором скоростей деформаций и осредненным тензором скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p\{m\}(0)} = B_{klij}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}}, \tag{54}$$

где введен $B_{klij}^{\{m-1\}}$ — тензор концентрации деформации:

$$B_{klij}^{\{m-1\}} = \Delta_{klij}^{\{m\}} + \frac{1}{2}\left(N_{kij/3}^{\{m-1\}} \delta_{l3} + N_{lij/3}^{\{m-1\}} \delta_{k3} \right). \tag{55}$$

Подставляя выражение (54) во второе и третье уравнения системы (47), записываем их следующим образом:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} = \hat{\tilde{C}}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}; \tag{56}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(0)} = h \hat{Y}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}, \tag{57}$$

где обозначены

$$\hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} = \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(0)} B_{klsp}^{\{m-1\}};$$
$$\hat{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}(0)} = Y_{ijkl}^{\{m-1\}} B_{klsp}^{\{m-1\}}. \tag{58}$$

Подставим выражение (56) с учетом (58) и (55) в первое уравнение системы (48), тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения функций $N_{kij}^{\{m-1\}}$ с точностью до констант

$$\left(\tilde{C}_{i3kl}^{\{m-1\}(0)}\left(\Delta_{klmn}^{\{m\}} + \frac{1}{2}\left(N_{kmn/3}^{\{m-1\}}\delta_{l3} + N_{lmn/3}^{\{m-1\}}\delta_{k3}\right)\right)\right)_{/3} = 0. \tag{59}$$

Интегрируя один раз это уравнение, получаем

$$\tilde{C}_{i3k3}^{\{m-1\}(0)} N_{kqr/3}^{\{m-1\}} = \Phi_{iqr}^{\{m-1\}} - \tilde{C}_{i3qr}^{\{m-1\}(0)}, \tag{60}$$

где $\Phi_{iqr}^{\{m-1\}}$ — тензор, который не зависит от ξ, но может зависеть от x_i.

Интегрируя полученное выражение (60) по ξ, находим выражение для тензора $N_{kqr}^{\{m-1\}}$

$$N_{sqr}^{\{m-1\}} = \int_{-0,5}^{\xi} (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} d\xi\, \Phi_{iqr}^{\{m-1\}} -$$
$$- \int_{-0,5}^{\xi} (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{i3qr}^{\{m-1\}(0)} d\xi + U_{sqr}^{\{m-1\}}, \tag{61}$$

где $U_{sqr}^{\{m-1\}}$ — тензор, не зависящий от ξ.

Применяя условие периодичности и условие нормировки к уравнению (61), находим тензоры $\Phi_{imn}^{\{m-1\}}$ и $U_{smn}^{\{m-1\}}$

$$\Phi_{lmn}^{\{m-1\}} = \left\langle (\tilde{C}_{l3s3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{i3mn}^{\{m-1\}(0)} \right\rangle; \tag{62}$$

$$U_{sqr}^{\{m-1\}} = \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{i3qr}^{\{m-1\}(0)} d\xi \right\rangle -$$
$$- \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} d\xi \right\rangle \Phi_{iqr}^{\{m-1\}}. \tag{63}$$

После подстановки (62) и (63) в (61) и введения обозначений

$$\langle f \rangle_{\xi} \equiv \int_{-0,5}^{\xi} f(\xi) d\xi - \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} f(\xi) d\xi \right\rangle, \tag{64}$$

$$Z_{sqr}^{\{m-1\}} \equiv (\tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{i3qr}^{\{m-1\}(0)}, \tag{65}$$

итоговое выражение для $N_{smn}^{\{m-1\}}$ можно записать так

$$N_{sqr}^{\{m-1\}} = \left\langle \tilde{C}_{s3i3}^{\{m-1\}-1} \right\rangle_{\xi} \left\langle \tilde{C}_{i3k3}^{\{m-1\}-1} \right\rangle^{-1} \left\langle Z_{kqr}^{\{m-1\}} \right\rangle - \left\langle Z_{sqr}^{\{m-1\}} \right\rangle_{\xi}. \tag{66}$$

Подставляя это выражение в (55), вычисляем тензор концентрации деформации $B_{klij}^{\{m-1\}}$

$$\begin{gathered} B_{klij}^{\{m-1\}} = \Delta_{klij}^{\{m\}} + \left\langle \tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}-1} \right\rangle^{-1} \left\langle Z_{rij}^{\{m-1\}} \right\rangle \frac{1}{2} (\tilde{C}_{k3q3}^{\{m-1\}-1} \delta_{l3} + \tilde{C}_{l3q3}^{\{m-1\}-1} \delta_{k3}) - \\ - \frac{1}{2} (Z_{kij}^{\{m-1\}} \delta_{l3} + Z_{lij}^{\{m-1\}} \delta_{k3}). \end{gathered} \tag{67}$$

Тогда, после подстановки (67) в (58), находим выражения для $\tilde{C}_{ijsp}^{\{m-1\}(0)}$ и $\tilde{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}(0)}$

$$\begin{gathered} \hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} = \tilde{C}_{ijsp}^{\{m-1\}(0)} + \tilde{C}_{ijk3}^{\{m-1\}(0)} (\tilde{C}_{k3q3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \times \\ \times \left(\left\langle (\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle (\tilde{C}_{r3l3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{l3sp}^{\{m-1\}(0)} \right\rangle - \tilde{C}_{q3sp}^{\{m-1\}(0)} \right); \end{gathered} \tag{68}$$

$$\begin{gathered} \hat{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}} = Y_{ijsp}^{\{m-1\}(0)} + Y_{ijk3}^{\{m-1\}(0)} (\tilde{C}_{k3q3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \times \\ \times \left(\left\langle (\tilde{C}_{q3r3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle (\tilde{C}_{r3l3}^{\{m-1\}(0)})^{-1} \tilde{C}_{l3sp}^{\{m-1\}(0)} \right\rangle - \tilde{C}_{q3sp}^{\{m-1\}(0)} \right). \end{gathered} \tag{69}$$

Эффективные определяющие соотношения для упруго–пластического слоистого композита. Подставив эти выражения в (56) и (57), применим к получившимся уравнениям операцию осреднения, тогда получим эффективные определяющие соотношения упруго–пластического слоистого композита

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}} = \tilde{\bar{C}}_{ijmn}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{mn}^{\{m\}}; \tag{70}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{p\{m\}} = h \tilde{\bar{Y}}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}^{\{m\}}, \tag{71}$$

где обозначены средние по ЯП значения компонент тензоров скоростей напряжений и скоростей пластических деформаций

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}} = \left\langle \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} \right\rangle; \ \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{p\{m\}} = \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(0)} \right\rangle, \tag{72}$$

а также введены эффективный приведенный тензор модулей упругости и эффективный тензор концентраций пластических деформаций слоистого композита

$$\tilde{\bar{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijsp}^{\{m-1\}} \right\rangle; \ \bar{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}} = \left\langle \hat{Y}_{ijsp}^{\{m-1\}} \right\rangle. \tag{73}$$

Таким образом, после решения задачи на ячейке периодичности в явном виде были получены эффективные упругопластические соотношения, которые связывают компоненты среднего тензора скоростей напряжений и компоненты среднего тензора скоростей деформаций.

Скорости напряжений и пластических деформаций в слоях композита. Для того, чтобы выразить $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)}$ через $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{m\}}$, обратим соотношение (70)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{\{m\}} = \bar{\Pi}_{ijmn}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\sigma}}_{mn}^{\{m\}}, \tag{74}$$

где обозначен тензор эффективных упругих податливостей

$$\bar{\Pi}_{ijmn}^{\{m-1\}} = \tilde{\bar{C}}_{ijmn}^{\{m-1\}-1}. \tag{75}$$

Подставляя (75) в (56) и (57), получим

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} = \Gamma_{ijsp}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\sigma}}_{sp}^{\{m\}}; \tag{76}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(0)} = hR_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\sigma}}_{kl}^{\{m\}} \tag{77}$$

— формулы для вычисления скорости напряжений и скорости пластических деформаций в слоях композита, если известные осредненные значения тензора напряжений. Здесь обозначены тензоры концентрации напряжений

$$\Gamma_{ijsp}^{\{m-1\}} = \hat{\tilde{C}}_{ijkl}^{\{m-1\}} \bar{\Pi}_{klsp}^{\{m-1\}}; \tag{78}$$

$$R_{ijsp}^{\{m-1\}} = \hat{Y}_{ijkl}^{\{m-1\}} \bar{\Pi}_{klsp}^{\{m-1\}}. \tag{79}$$

Численный расчет диаграмм деформирования слоистого упругопластического композита в модели теории течения. С использованием разработанного алгоритма по формулам (70), (71) были проведены расчеты осредненных диаграмм деформирования $\bar{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\bar{\varepsilon}_{mn})$ слоистого композита при одноосных нагружениях для одного цикла: нагрузка — разгрузка. ЯП состояла из 2–х слоев: сталь/алюминий. Слои композита были изотропные, для них тензор модулей упругости C_{ijkl} имел стандартный вид [22]

$$C_{ijkl}^{\{m-1\}} = C_{ijkl} = C_{ijkl}^{0} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right); \tag{80}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{81}$$

где λ, μ — константы Ламе, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона [22].

При численном расчете были приняты следующие значения:

- для алюминиевого сплава: $E = 70$ ГПа;
- для высокопрочной стали: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,31$.

Константы, характеризующие пластические свойства слоев, согласно модели (7), (9) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Константы, описывающие пластические свойства материалов слоев композита

Материал	H_0, ГПа	α	n	σ_T, ГПа
Сталь	100	0,7	0,9	0,6400
Алюминий	40	0,5	0,7	0,0625

Были рассмотрены 3 варианта композита с различным соотношением относительных их толщин: h_S и $h_A = 1 - h_S$:

- $h_S = 0,7$;
- $h_S = 0,5$;
- $h_S = 0,1$

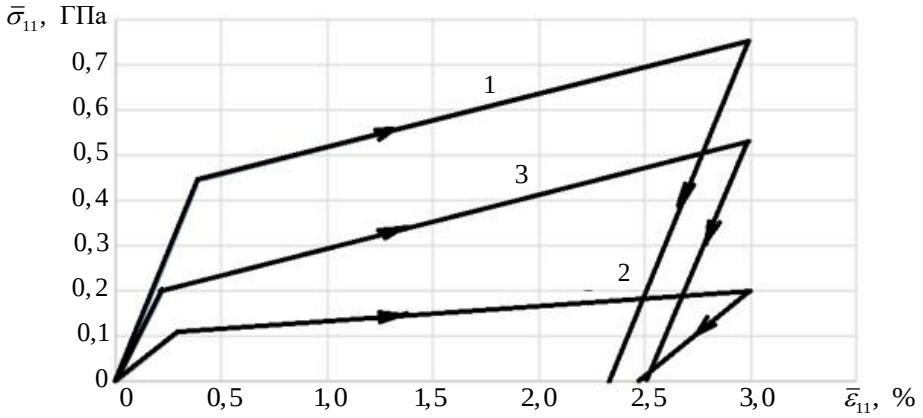
Диаграммы деформирования были рассчитаны для одноосного нагружения в продольном направлении Ox_1, в поперечном направлении Ox_3 и при межслойном сдвиге в плоскости Ox_1x_3.

На рис. 1 показаны диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{11} \sim \bar{\varepsilon}_{11}$ композита при одном цикле: нагружение — разгрузка в продольном направлении. Диаграммы построены для отдельных слоев композита и для самого композита при различных значениях соотношения h_S толщин слоев.

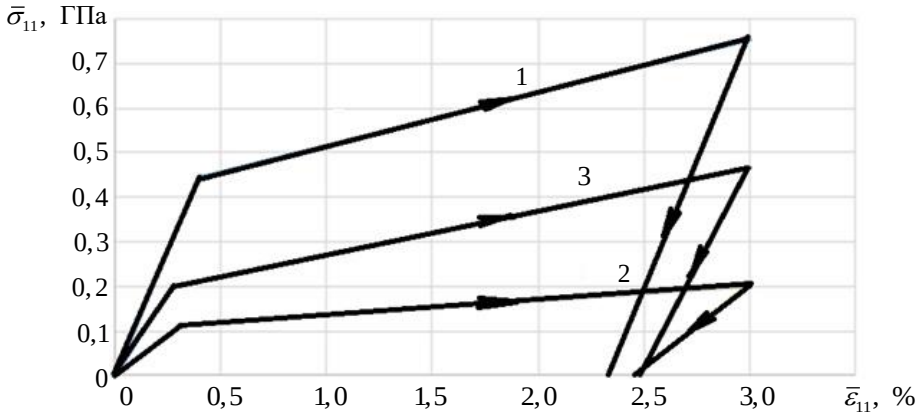
Диаграмма деформирования для композита располагается между соответствующими диаграммами для отдельных его слоев: слоя стали, обладающей более высокими характеристиками упругости и пластичности, и слоя алюминия с более низкими значениями упруго–пластической диаграммы деформирования.

Аналогичные эффективные диаграммы деформирования представлены на рис. 2 при одноосном нагружении в поперечном направлении ($\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$),и на рис. 3 — при межслойном сдвиге ($\bar{\sigma}_{13} \sim \bar{\varepsilon}_{13}$).

На рис. 4 представлены сравнительные эффективные диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{11} \sim \bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$ и $\bar{\sigma}_{13} \sim \bar{\varepsilon}_{13}$ при одинаковых значениях параметра h_S. Эти результаты иллюстрируют проявление анизотропных упруго–пластических свойств слоистого композита, различных для продольного и поперечного направлений.

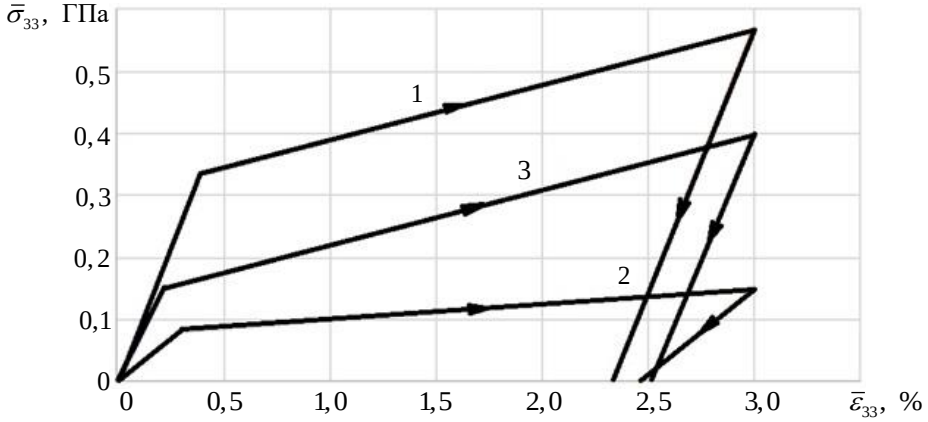


а



б

Рис. 1. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{11} \sim \bar{\varepsilon}_{11}$ при одноосном растяжении в продольном направлении:
1 — сталь; 2 — алюминий; 3 — композит сталь/алюминий
а — $h_S = 0,7$; *б* — $h_S = 0,5$



а

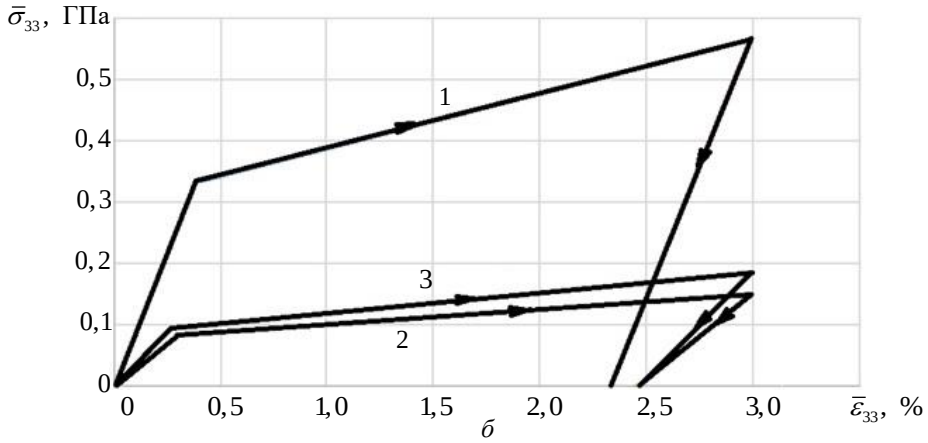
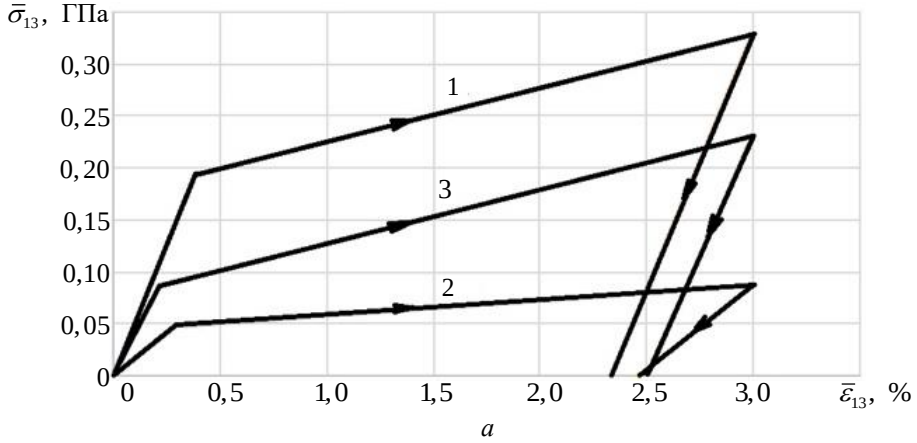


Рис. 2. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$ при одноосном растяжении в продольном направлении:
1 — сталь; 2 — алюминий; 3 — композит сталь/алюминий
а — $h_S = 0,7$; *б* — $h_S = 0,5$



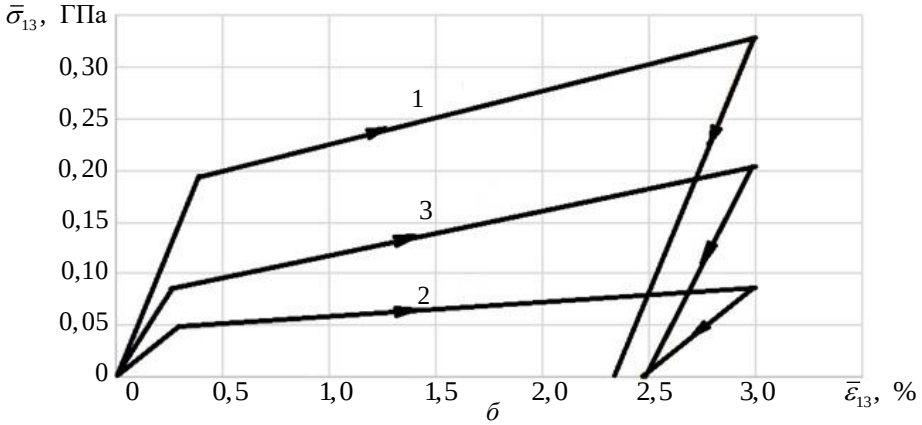
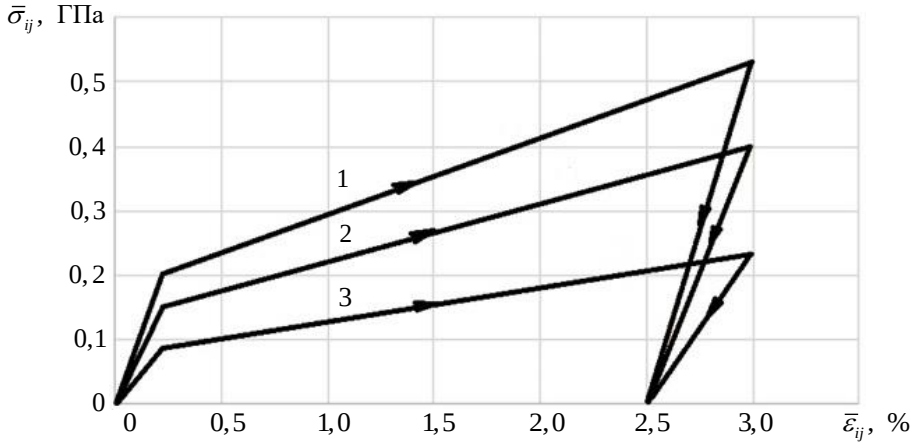
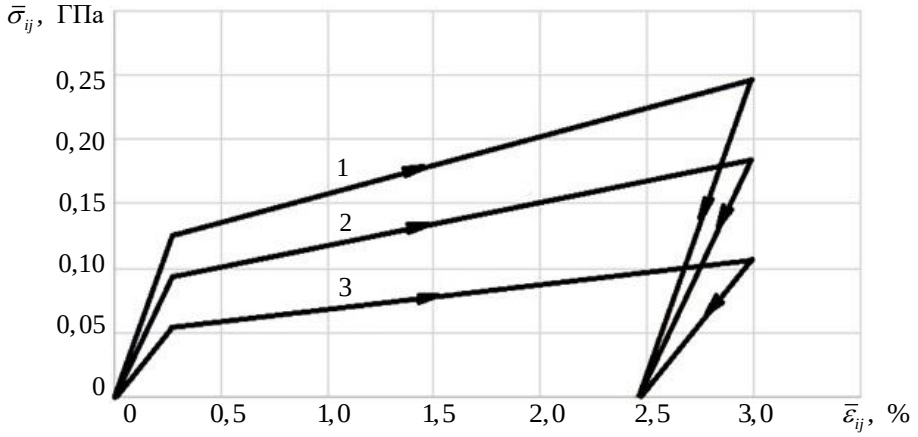


Рис. 3. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$ при одноосном растяжении в продольном направлении:
1 — сталь; 2 — алюминий; 3 — композит сталь/алюминий
а — $h_S = 0,7$; *б* — $h_S = 0,5$



а



б

Рис. 4. Диаграммы деформирования $\bar{\sigma}_{ij} \sim \bar{\varepsilon}_{ij}$ композита сталь/алюминий, при различных видах нагружения и разгрузки
1 — $\bar{\sigma}_{11} \sim \bar{\varepsilon}_{11}$; 2 — $\bar{\sigma}_{33} \sim \bar{\varepsilon}_{33}$; 3 — $\bar{\sigma}_{13} \sim \bar{\varepsilon}_{13}$
а — $h_S = 0,7$; *б* — $h_S = 0,5$

Диаграмма деформирования композита в продольном направлении располагается выше диаграммы деформирования в поперечном направлении, поскольку, как и для модели чисто упругого деформирования, на свойства в поперечном направлении у слоистого композита наибольшее влияние оказывает наиболее «слабый» слой, с более низко располагающейся диаграммой деформирования.

Выводы. В работе предложен вариант метода асимптотического осреднения для слоистых упруго–пластических композитов, слои которых подчиняются теории пластического течения. Применен метод последовательных приближений, который позволил получить явные аналитические выражения для решения локальных задач теории пластичности на ячейке периодичности и получить явные соотношения для построения эффективных соотношений

анизотропной теории пластичности композита.

Приведен численный пример, демонстрирующий возможность расчета диаграмм деформирования слоистого упруго–пластического композита по разработанной математической модели и численному алгоритму.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. New York, Springer–Verlag Publ., 1991, 779 p.

[2] Ковтунов А.И., Мямин С.В., Семистенова Т.В. *Слоистые композиционные материалы: электронное учебное пособие*. Тольятти, Изд–во ТГУ, 2017, 75 с.

[3] Никитин В.С., Половинкин В.Н. Современное состояние и перспективы применения композитов в зарубежном подводном кораблестроении. *Труды Крыловского государственного научного центра*, 2017, № 4 (382), с. 57–74.

[4] Rawal S. Metal–matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 53, iss. 4, pp. 14–17.

[5] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[6] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[7] Былим А.В., Сараев Л.А., Сахабиев В.А. Особенности упругопластического деформирования двухкомпонентных композитов. *Вестник СамГУ*, 1998, № 4, с. 113–119.

[8] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[11] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[12] Санчес–Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[13] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[14] Эглит М.Э. Об усредненном описании процессов в периодических упругопластических средах. *Механика композитных материалов*, 1984, № 5, с. 825–831.

[15] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[16] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2, с. 3–22.

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[19] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

[20] Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. Москва, Гостехиздат, 1956, 407 с.

[21] Ишлинский А.Ю. *Прикладные задачи механики. Книга 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел*. Москва, URSS, 2021, 358 с.

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

Статья поступила в редакцию 15.03.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых периодических композитов на основе теории пластического течения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 15–37.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Черкасова Мария Сергеевна — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: cerkasovam220@gmail.com

Modeling the deformation of layered periodic composites based on the theory of plastic flow

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, M.S. Cherkasova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The aim of this work is to find the constitutive relations for a layered elastoplastic composite according to the flow theory using the method of asymptotic averaging. This

goal is achieved by developing an algorithm for solving the problem of the theory of plastic flow for a layered composite material, taking into account various characteristics and properties of these layers of the material, followed by visualizing the result in the form of effective plasticity diagrams connecting the components of averaged stress tensors and components of averaged strain tensors.

***Keywords**: layered composites, plastic flow theory, asymptotic averaging method, strain rate tensor, deformation diagrams*

REFERENCES

[1] Dvorak G.J. *Inelastic deformation of composite materials*. New York, Springer–Verlag Publ., 1991, 779 p.

[2] Kovtunov A.I., Myamin S.V., Semistenova T.V. *Sloistye kompozicionnye materialy: elektronnoe uchebnoe posobie* [Layered composite materials: electronic textbook]. Togliatti, TSU Publ., 2017, 75 p.

[3] Nikitin V.S., Polovinkin V.N. State of the art and prospects of composites in foreign submarine shipbuilding. *Transactions of the Krylov State Research Centre*, 2017, no. 4 (382), pp. 57–74.

[4] Rawal S. Metal–matrix composites for space applications. *JOM*, 2001, vol. 53, iss. 4, pp. 14–17.

[5] Katsiropoulos Ch.V., Pantelakis Sp.G., Meyer B.C. Mechanical behavior of non-crimp fabric PEEK/C thermoplastic composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, vol. 52, iss. 2, pp. 122–129.

[6] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.

[7] Bilim A.V., Saraev L.A., Sahabiev V.A.The persicularities of two–component composite materials elastic–plastic deformation. *Vestnik of Samara University*, 1998, no. 4, pp. 113–119.

[8] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic–plastic stress/strain response for injection–molded long–fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[11] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[12] Sanches–Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[13] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[14] Églit M.E. An averaged description of processes in periodic elasticoplastic media. *Mechanics of Composite Materials*, 1985, vol. 20, iss. 5, pp.568 –574.

[15] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït–Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[16] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[17] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I. Modeling the elastic–plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 3–22.

[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of elastic–plastic composites with an allowance for fault probability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, № 2, pp. 3–23.

[19] Dimitrienko Y.I., Sborschikov S.V, Yurin Y.V. Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, № 4, pp. 3–26.

[20] Hill R. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956, 407 p.

[21] Ishlinskiy A.Yu. *Prikladnye zadachi mekhaniki. Kniga 1. Mekhanika vyazkoplasticheskih i ne vpolne uprugih tel* [Applied problems of mechanics. Book 1. Mechanics of viscoplastic and not completely elastic bodies]. Moscow, URSS, 2021, 358 p.

[22] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Cherkasova M.S., student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: cerkasovam220@gmail.com